

의사결정을 위한 확률모형

- 2장 지수분포와 포아송 과정 -

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 지수분포
- 포아송 과정
- 복합 포아송 과정
- 비정상 포아송 과정

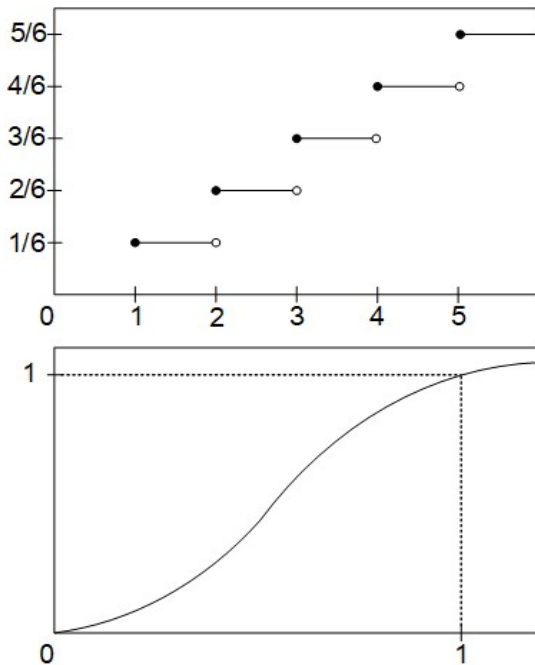
목 차

- 지수분포
- 포아송 과정
- 복합 포아송 과정
- 비정상 포아송 과정

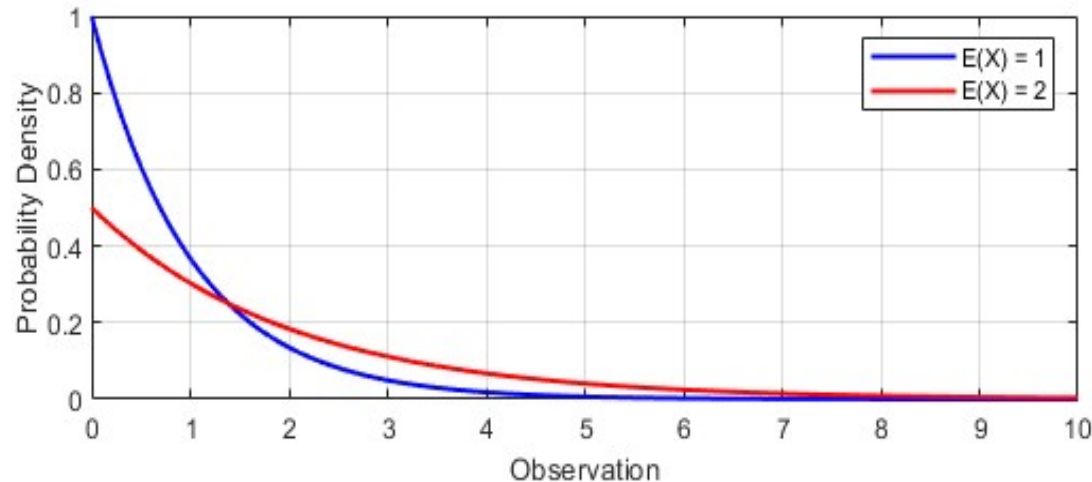
지수분포

• 정의

- 사건 λ 가 처음 발생할 때까지의 대기 시간에 대한 연속확률 분포
 - 연속확률분포: 확률변수가 가질 수 있는 실수 값이 연속적인 분포
 - 모수 λ 는 단위시간 당 사건 평균 발생횟수 의미



<그림 2.1> 이산확률분포와 연속확률분포



<그림 2.2> 지수 확률분포의 PDF

λ : 단위시간 당 사건 평균 발생횟수, $E(X)$: 평균 사건 발생시간

- 파랑: 특정 사건이 1시간에 1번 발생하는 경우에 대한 분포
- 빨강: 특정 사건이 2시간에 1번 발생하는 경우에 대한 분포

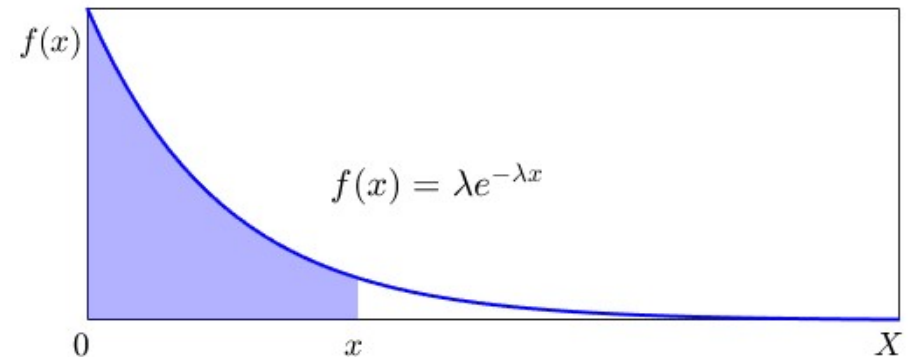
$x = 2$ (2시간)에서 가장 높은 밀도를 가지는 것이 아닌, $x = 0$ 에서 가장 높은 밀도를 가짐

지수분포

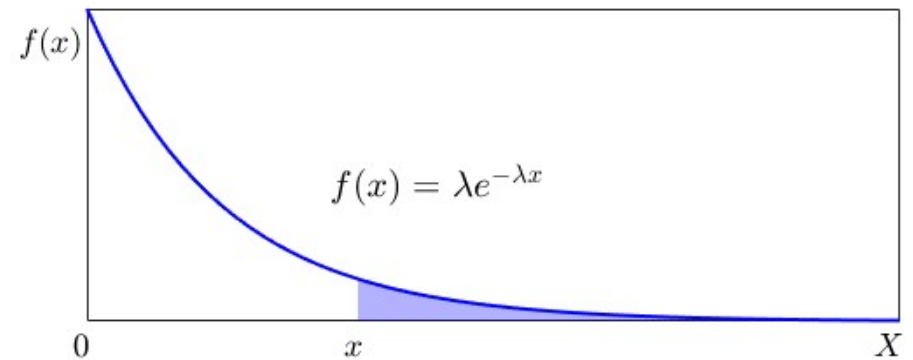
- 표현법 (1/2)

- PDF(Probability Density Function): $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$
- DF(Distribution Function): $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$

- $P(X \geq x) = \int_x^{\infty} f(x)dx$
 $= \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda x}, x > 0$



- $P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx$
 $= 1 - \int_x^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$
 $= 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$



<그림 2.3> 지수분포의 DF 증명을 위한 PDF

지수분포

- 표현법 (2/2)

- 평균: $E(x) = 1/\lambda$

- 특정 사건이 발생하는 평균 대기 시간

- 분산: $Var(x) = E(X^2) - E(X)^2 = 1/\lambda^2$

- 특정 사건에 대한 발생 시간의 변동성

- 분산이 클수록 사건 발생 시간의 변동이 큼

- 분산이 작을수록 대기 시간은 평균에 가까워짐

- e.g., $\lambda = 2$ 이면, 평균 대기시간은 $E(X) = 1/2 = 0.5$ 이고, 그에 대한 분산은 $Var(X) = 1/4 = 0.25$ 임. 이는 사건 발생 시간이 평균 대기 시간으로부터 $\sqrt{0.25} = \pm 0.5$ (표준편차) 범위의 변동성이 존재함을 의미

지수분포

- 특징

- 변동계수(CV, Coefficient of Variation)는 1임
 - 표준편차를 평균으로 나눈 값
- 기억상실성질(Memoryless Property)을 가짐
 - 과거 조건이 현재 확률에 영향을 미치지 않는 특성
- 특정 사건이 발생하기까지의 대기 시간이나 특정 사건이 발생하는 시간 간격을 모델링하는 데 사용됨
 - e.g., 전자기기의 고장 간격, 다음 고장 발생까지의 대기 시간, 패킷 도착 간격, 콜센터 대기 시간 등

지수분포

• 변동계수(CV, Coefficient of Variation)

- 표준편차를 평균으로 나눈 값: $CV(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} / \left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1$
 - 평균 대기시간의 크기와 무관하게 상대적으로 일정한 변동성을 가짐을 의미
- 집단이 가진 데이터의 흩어진 정도를 비교하는 데 사용
- 변동계수가 작은 집단의 데이터가 더 안정적임

• 예제 2.1

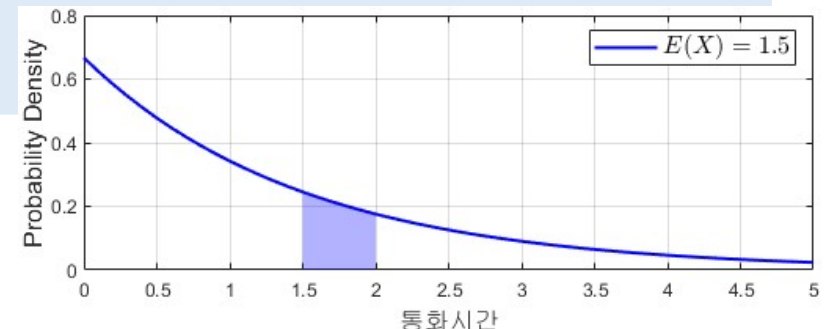
콜센터 문의전화 하나의 통화 시간 X 가 평균이 1분 30초인 지수 확률분포를 따른다.

- (i) 한 통화 시간이 1분 30초 이상 2분 이내일 확률
- (ii) 한 통화 시간이 3분을 넘을 확률

• $\frac{1}{\lambda} = 1.5$ 분이므로, $\lambda = \frac{2}{3}$

(i) $P(1.5 \leq X \leq 2) = \int_{1.5}^2 \frac{2}{3} e^{-\left(\frac{2}{3}\right)x} dx = 0.1043$

(ii) $P(X \geq 3) = 1 - F(3) = e^{-\left(\frac{2}{3}\right) \times 3} = 0.1353$



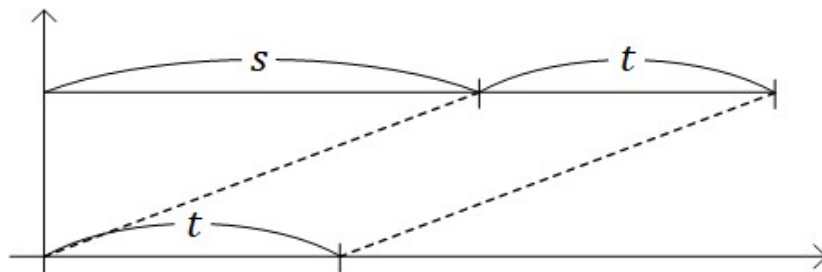
<그림 2.4> 예제 2.1(i) 그림

지수분포

• 기억상실성질(Memoryless Property) (1/3)

• 과거 조건이 현재 확률에 영향을 미치지 않는 특성

- (i) 시간 s 동안 통화가 진행 중일 때($X > s$), 추가로 시간 t 가 지나도 통화가 지속될 확률($X > t + s$)은 처음 통화를 시작하여 시간 t 이상 지속될 확률($X > t$)과 같음
- (ii) 시점 s 에서 통화가 다시 처음 시작된 것과 같은 효과임
- (iii) 이는 모든 s, t 에 대해 성립하므로, 통화는 매 순간 다시 개시되는 것과 확률적으로 같음
- (iv) 즉, 매 순간마다 과거 기억을 상실하고 다시 출발하는 것과 같음



<그림 2.5> 지수 확률변수의 기억상실성질(1)

$$F(t) = P(0 \leq X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$
$$1 - F(t) = P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

$P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$ 에 대한 증명

$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}$$
$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

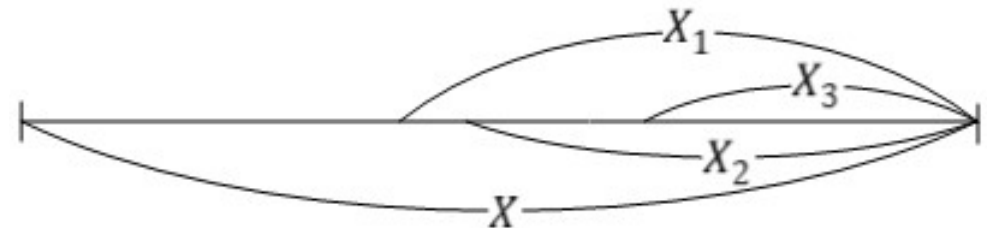
$$P(X > t) = e^{-\lambda t}$$

$$\therefore P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$$

지수분포

• 기억상실성질(Memoryless Property) (2/3)

- (v) 과거 경험 또는 기억이 없으므로, 통화시간 길이의 예측이 어려움
 - 완전한 랜덤성을 가진 어떤 사건의 발생간격을 모형화할 수 있음
- (vi) 역으로, 어떤 연속확률변수가 기억상실성질을 가지는 경우, 해당 확률변수는 지수 확률변수임
 - 지수분포는 연속확률분포 중 유일하게 기억상실성질을 가짐
- $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 인 경우, X_1, X_2, \dots, X_i 는 모두 X 와 동일한 모수의 지수 확률변수임
 - 지수 확률변수 X 는 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 로 표기



<그림 2.6> 지수 확률변수의 기억상실성질(2)

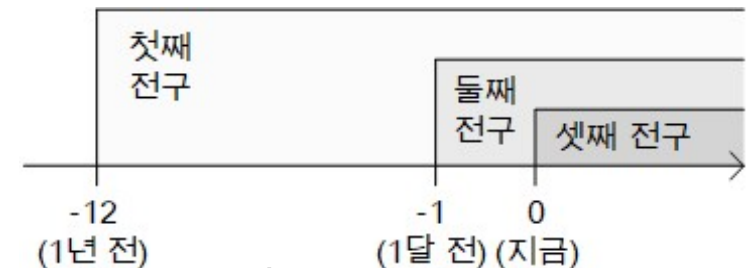
지수분포

• 기억상실성질(Memoryless Property) (3/3)

• 예제 2.2

전구의 수명 X 가 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 이다. 첫째 전구는 1년 전부터 켜두었고, 둘째 전구는 1달 전부터 켜두고 있다. 이제 셋째 전구를 막 켜올 때, 셋째 전구가 가장 먼저 끊어질 확률은 얼마인가?

- 기억상실성질에 의해, 셋째 전구를 막 켜 시점부터 세 전구의 수명은 모두 동일한 지수분포를 따름
- 이러한 대칭성에 의해 가장 먼저 끊어질 확률은 세 전구 모두 동일하게 $1/3$ 임
- 따라서, c 시간 동안 끊어지지 않았다는 조건 하에, 앞으로의 전구 수명의 평균은 여전히 $1/\lambda$ 임
- 현재 시점 c 까지 끊어지지 않은 전구의 추가 수명을 $E(X|X > c)$ 라고 하면,
 $E(X|X > c) = c + 1/\lambda$
(상수 c 시점부터의 시간도 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 임)



<그림 2.7> 예제 2.2 그림

지수분포

• 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (1/12)

• $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

1. 서로 독립인 지수 확률변수들의 최소값

- 여러 독립 사건 중 가장 빨리 발생하는 사건의 시간 모델링에 활용
 - e.g., 여러 장비의 고장 시간 중 가장 빨리 고장나는 장비의 고장 시간 예측
- 공식: $\min(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

2. 서로 독립인 지수 확률변수들의 비교

- 여러 독립 사건 발생 시간을 비교할 때 활용
 - e.g., 하나의 장비가 다른 장비보다 먼저 고장날 확률 예측
- 공식: $P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

3. 서로 독립인 지수 확률변수들 중 최대-최소 차이의 기댓값

- 여러 독립 사건의 발생 시간 차이를 비교하여 시스템 유지보수에 활용
 - e.g., 고객이 여러 서비스를 받는 대기시간을 예측하여 시스템 성능 최적화에 활용
- 공식: $E(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)) = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (2/12)

- $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

1. 서로 독립인 지수 확률변수들의 최소값

- 지수 확률변수들의 최솟값 $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 의 확률분포

$$P(\min(X_1, X_2) > t) = P((X_1 > t) \cap (X_2 > t))$$

$$= P(X_1 > t)P(X_2 > t) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$P(\min(X_1, X_2) \leq t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, t \geq 0$$

$$\therefore \min(X_1, X_2) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- $\text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 누적분포함수: $F(x) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}$

- 또한, $\min(X_1, \dots, X_n) = \min(X_1, \min(X_2, \dots, X_n))$ 임을 활용하여, $\min(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ 로 일반화

독립사상의 곱셈법칙

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (3/12)
 - $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정
1. 서로 독립인 지수 확률변수들의 최소값

- 예제 2.3

만약 3개의 장비가 있고, 각 장비의 고장률이 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 라고 할 때, 가장 빨리 고장나는 장비의 고장 시간은 $\text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ 의 지수분포를 따른다.

- 각 장비의 고장률이 각각 $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.3$ 인 경우, 가장 빨리 고장나는 장비의 고장 시간은 $\text{Exp}(0.1 + 0.2 + 0.3) = \text{Exp}(0.6)$ 의 지수분포를 따름
- 이는 평균적으로 $\frac{1}{0.6} \approx 1.67$ 단위시간이 걸림을 의미함

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (4/12)
 - $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정
- ## 1. 서로 독립인 지수 확률변수들의 최소값

- 예제 2.4

콜센터에 가입(=1) 및 탈퇴(=2) 요청 등 2가지 종류의 문의전화가 온다.
전화 도착간격이 각각 $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i) (i = 1, 2)$ 이고 서로 독립일 때, 문의전화의 도착 간격은 $\min(X_1, X_2) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 이며, 도착률은 시간당 $\lambda_1 + \lambda_2$ 이다.

- 가입 문의전화 도착 간격: $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$, 탈퇴 문의전화 도착 간격: $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$
- λ_1, λ_2 는 각 사건이 발생할 확률 즉, 문의전화 도착률을 의미함
- $\min(X_1, X_2)$: 두 종류의 문의전화 중 더 빨리 도착하는 전화의 도착 시간
- 따라서, 문의전화의 전체 도착 간격은 $\min(X_1, X_2)$ 가 되고, 이는 지수분포 성질에 의해 $\text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 를 따름
- 즉, 빨리 도착하는 문의전화의 분포는 단위시간 당 $\lambda_1 + \lambda_2$ 인 지수분포를 따른다는 의미

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (5/12)
- $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

2. 서로 독립인 지수 확률변수들의 비교

- 지수 확률변수 X_1, X_2 를 비교할 때, X_1 이 X_2 보다 먼저 발생할 확률을 계산하는 것

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty P(X_1 < X_2 | X_1 = x) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \\ &= \int_0^\infty P(X_2 > x) \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

$$\therefore P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

- 또한, 이를 확장하여 $P(X_j = \min_{k=1, \dots, n} (X_k)) = P(X_j < \min_{j \neq k} (X_k))$
 $= \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ 으로 일반화

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (6/12)
- $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

2. 서로 독립인 지수 확률변수들의 비교

• 예제 2.5

세 개의 지수 확률변수 X_1, X_2, X_3 가 각각 $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.3$ 일 때, 각 확률변수가 가장 빨리 발생할 확률은 무엇인가?

- $P(X_1 = \min(X_1, X_2, X_3)) = \frac{0.1}{0.1+0.2+0.3} = \frac{0.1}{0.6} \approx 0.167$
- $P(X_2 = \min(X_1, X_2, X_3)) = \frac{0.2}{0.1+0.2+0.3} = \frac{0.2}{0.6} \approx 0.333$
- $P(X_3 = \min(X_1, X_2, X_3)) = \frac{0.3}{0.1+0.2+0.3} = \frac{0.3}{0.6} \approx 0.500$
- 따라서, X_3 이 가장 빨리 발생할 것임

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (7/12)
- $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

2. 서로 독립인 지수 확률변수들의 비교

• 예제 2.6

(예제 2.4) 콜센터에 가입(=1) 및 탈퇴(=2) 요청 등 2가지 종류의 문의전화가 온다. 전화 도착간격이 각각 $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i) (i = 1, 2)$ 이고 서로 독립일 때, 문의전화의 도착 간격은 $\min(X_1, X_2) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 이며, 도착률은 시간당 $\lambda_1 + \lambda_2$ 이다.

예제 2.4에서 첫 번째 문의전화가 가입 요청 문의일 확률은 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 이다.

- 첫 번째 문의전화가 가입 요청 문의이기 위해서, $P(X_1 < X_2)$ 이어야 함
- 지수분포의 기억상실성질의 특성에 기반하여, 독립적인 확률변수 X_1, X_2 에 대한 $P(X_1 < X_2)$ 는 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 이므로, 해당 확률 값은 $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ 임

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (8/12)

- $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

3. 서로 독립인 지수 확률변수들 중 최대-최소 차이의 기댓값

- $Y = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$ 일 때, 전체확률의 법칙(Rule of the Total Probability) 사용하는 경우

$$E(Y) = E(Y|X_1 < X_2)P(X_1 < X_2) + E(Y|X_2 \leq X_1)P(X_2 \leq X_1)$$

- $X_1 < X_2$ 인 경우

- $Y = X_2 - X_1, E(Y|X_1 < X_2) = E(X_2)$, 기억상실성질에 의해 $E(X_2|X_1 < X_2) = E(X_2) = \frac{1}{\lambda_2}$

- 이 경우의 확률은 $P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

- $X_1 \geq X_2$ 인 경우

- $Y = X_1 - X_2, E(Y|X_1 \geq X_2) = E(X_1)$, 기억상실성질에 의해 $E(X_1|X_1 \geq X_2) = E(X_1) = \frac{1}{\lambda_1}$

- 이 경우의 확률은 $P(X_1 \geq X_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (9/12)

- $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

3. 서로 독립인 지수 확률변수들 중 최대-최소 차이의 기댓값

- 이때 기억상실성질에 의해, $E(Y|X_1 < X_2) = E(X_2) = 1/\lambda_2$,

$$E(Y|X_2 \leq X_1) = E(X_1) = 1/\lambda_1$$

$$\therefore E(Y) = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (10/12)

- $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

3. 서로 독립인 지수 확률변수들 중 최대-최소 차이의 기댓값

- 예제 2.7

서버가 두 가지 다른 서비스 요청을 처리할 때, 각 요청의 응답 시간은 지수 분포를 따르며 서로 독립이다.

- 요청 1의 응답 시간 $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ 의 응답 도착률은 $\lambda_1 = 0.2$

- 요청 2의 응답 시간 $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$ 의 응답 도착률은 $\lambda_2 = 0.3$

- $E(Y) = E(Y|X_1 < X_2)P(X_1 < X_2) + E(Y|X_2 \leq X_1)P(X_2 \leq X_1)$

$$= \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{0.3} \cdot \frac{0.2}{0.2 + 0.3} + \frac{1}{0.2} \cdot \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = 4.33$$

- 따라서, 두 서비스 요청의 응답시간의 차이는 평균적으로 약 4.33초이며, 이 값보다 더 큰 차이를 가지는 경우에는 시스템 성능 개선이 필요한 것으로 간주할 수 있음

지수분포

• 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (11/12)

- $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

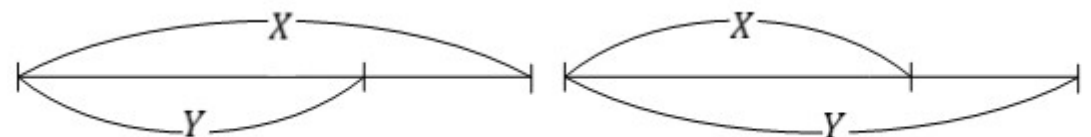
3. 서로 독립인 지수 확률변수들 중 최대-최소 차이의 기댓값

• 예제 2.8 (1/2)

업무가 과중한 콜센터 직원이 있다. 하나의 문의전화의 통화시간은 $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ 인데, 각 문의전화의 도착간격은 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ 이며, 이 둘은 서로 독립이다.

(a) 직원이 하나의 문의전화를 응대하는 동안 다른 문의전화가 하나도 걸려오지 않았을 확률은 $P(X > Y) = \mu/(\lambda + \mu)$ 이다.

- $P(X > Y)$: 하나의 문의전화 이후에 다음 전화가 도착할 확률
- $P(X < Y)$: 하나의 문의전화 도중에 다음 전화가 도착할 확률
- (a)는 하나의 문의전화 응대 중 다른 문의전화가 걸려오지 않을 확률이므로 $P(X > Y)$ 에 해당하고, 이는 2변 성질(서로 독립인 지수 확률변수들의 비교)에 의해 $P(X > Y) = \mu/(\lambda + \mu)$ 가 성립



<그림 2.8> 예제 2.8(a) 그림

지수분포

- 여러 지수 확률변수들의 확률적 성질 (12/12)

- $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, n$ 이고, 서로 독립이라고 가정

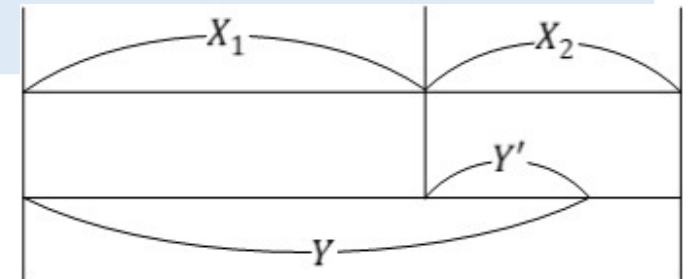
3. 서로 독립인 지수 확률변수들 중 최대-최소 차이의 기댓값

- 예제 2.8 (2/2)

(b) 하나의 문의전화를 응대하는 동안 다른 문의전화가 한 개만 걸려왔을 확률을 구하는 것은 다음 그림과 같이 생각하자. 첫 번째 길이다툼에서는 Y 가 X 보다 길었다(문의전화 1회 도착). 나머지 통화시간을 나타내는 Y' 도 기억상실성질에 의해 $Y' \sim \text{Exp}(\mu)$ 이다. 두 번째 길이다툼에서는 Y' 이 X 보다 짧아야 한다. 이 두사상은 서로 독립이므로, 구하는 확률은 $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \times \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ 이다.

이와 같은 방법을 적용하면 하나의 문의전화를 응대하는 동안 다른 문의전화가 $k(k = 1, 2, \dots)$ 개 걸려왔을 확률은 $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \times \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ 이다.

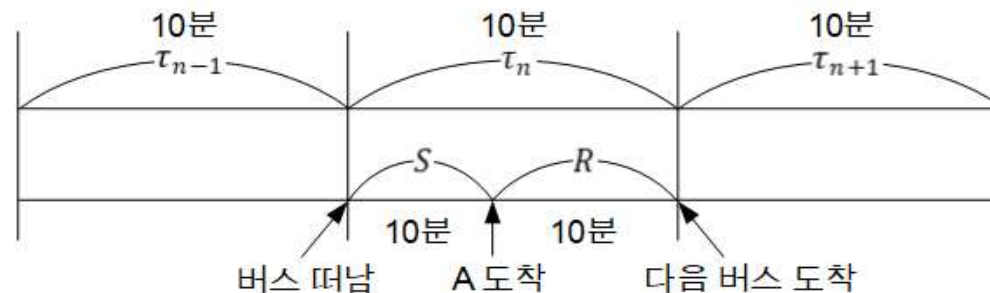
- 첫 번째 길이: $P(X_1 < Y)$, 나머지: $P(X_2 > Y')$, 이들은 독립임
- 구하고자 하는 확률: $P(X_1 < Y)P(X_2 > Y') = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \times \frac{\mu}{\lambda+\mu}$



<그림 2.8> 예제 2.8(b) 그림

지수분포

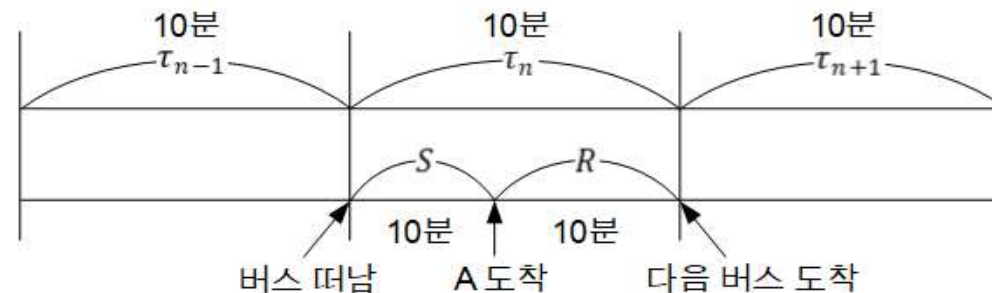
- 검사시점의 역설(Inspection Paradox) (1/4)
 - 임의로 선택된 한 시점에서 발생한 사건의 평균 길이가 실제 사건의 평균 길이보다 더 길게 나타나는 현상
- 예시 (1/2)
 - 버스 정류장에 도착하는 버스들의 시간간격 $\tau_k, k = 1, 2, \dots$ 가 평균 10분인 지수분포를 따른다고 가정
 - A가 버스 정류장에 도착한 후, 버스를 탈 때까지의 시간 (=잔여시간 R)도 지수 확률변수의 기억상실성질에 의해 평균이 10분인 지수분포이므로 A의 대기시간은 평균 10분



<그림 2.9> 예시 그림

지수분포

- 검사시점의 역설(Inspection Paradox) (2/4)
 - 임의로 선택된 한 시점에서 발생한 사건의 평균 길이가 실제 사건의 평균 길이보다 더 길게 나타나는 현상
- 예시 (2/2)
 - 그러나, A가 정류장에 도착하기 전, 이전 버스가 정류장에서 떠난 이후 A의 도착 시점까지의 시간(=경과시간 S) 또한 평균 10분인 지수분포를 따름
 - 따라서, (버스 도착간격 τ) = (경과시간 S) + (잔여시간 R)
 - 이는 (평균 10분) = (평균 10분) + (평균 10분)을 의미



<그림 2.9> 예시 그림

지수분포

- 검사시점의 역설(Inspection Paradox) (3/4)
 - 특정 시점에서 특정 구간에 속할 확률은 구간의 길이인 x 의 크기에 비례
 - x 가 2배인 경우 그 구간이 선택될 가능성도 2배를 의미
 - 예시) 버스 정류장에 버스가 도착하는 간격(x)이 길면, 승객이 정류장에 도착하는 시점이 그 긴 구간 내에 포함될 가능성이 더 커짐
- 구간의 길이가 x 인 구간의 출현횟수는 구간의 길이가 x 일 확률($\lambda e^{-\lambda x} dx$)에 비례
 - 긴 구간일수록 사건이 발생할 확률이 낮음(출현횟수가 적음)
 - 지수 확률변수 X 의 PDF는 $\lambda e^{-\lambda x}$ 이고, X 가 클수록 낮은 확률을 가짐
- 예시) 평균적으로 버스 대기 시간이 1~2분으로 짧아서 버스가 자주 도착한다고 할 때, 그 대기 시간은 자주 출현할 것임
그러나, 버스 대기 시간이 10~20분으로 길어진다고 할 때, 긴 구간은 자주 출현할 수 없음

지수분포

- 검사시점의 역설(Inspection Paradox) (4/4)
- 도착시점을 포함하는 시간간격 τ 의 확률분포와 평균 $E(\tau)$
 - 도착 간격은 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, 도착 시점 X_1, X_2 는 독립으로 가정
 - $f_\tau(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$, $F_\tau(x) = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

시간 간격 τ 는 $\tau = X_2 - X_1$ 로 정의됨

$$P(X_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, P(X_2 \leq X_1 + x) = 1 - e^{-\lambda(X_1 + x)}$$

$$F_\tau(x) = P(\tau \leq x) = P(X_2 - X_1 \leq x) = P(X_2 \leq X_1 + x) = \int_0^\infty P(X_2 \leq X_1 + x | X_1 = t) f_{X_1}(t) dt \\ = \int_0^\infty [1 - e^{-\lambda(t+x)}] \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}$$

$$f_\tau(x) = F'_\tau(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

- $E(\tau) = 2/\lambda$

$$E(\tau) = \int_0^\infty x f_\tau(x) dx = \int_0^\infty x (\lambda^2 x e^{-\lambda x}) dx = \lambda^2 \cdot \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda}$$

- 위 공식을 활용하여 검사시점의 역설을 반영하도록 예측 모델을 조정함으로써, 기존 시스템보다 정확한 예측 및 분석을 수행하고, 효과적으로 개선된 시스템을 제공할 수 있음

목 차

- 지수분포
- 포아송 과정
- 복합 포아송 과정
- 비정상 포아송 과정

포아송 과정

• 정의

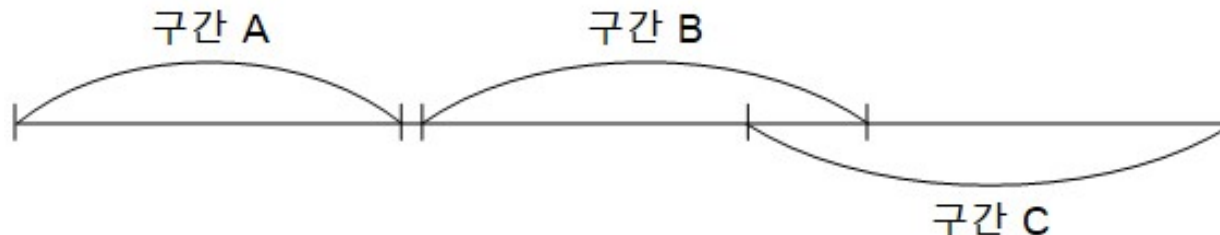
- 시간 t 동안의 사건 발생횟수 $N(t)$ 를 나타내는 확률과정
 - 확률과정: 시간에 따라 발생하는 사건들이 확률적으로 변화하는 구조
 - $N(t)$: 시점 $t(\geq 0)$ 까지 발생한 어떤 사건의 누적 횟수이자 확률변수 (단, $N(0) = 0$)

• 특징

- 시간 t 까지의 사건 발생횟수를 모델링하여 확률적 예측 및 분석을 수행할 수 있음
 - e.g., 시점 t 까지 콜센터에 걸려온 문의전화 수, 교환기에 도착한 트래픽 수, 온라인 쇼핑사이트에 접속한 고객 수 등 예측
- 포아송 과정은 3가지 가정을 만족해야 하며, 이를 통해 포아송 분포를 유도할 수 있음
 - 독립증분, 정상증분, 단일증분

포아송 과정

- 가정 1 – 독립증분(Independent Increment)
 - 겹치지 않는 두 구간에서 각각 발생한 사건의 개수들은 서로 독립임
 - e.g., 문의전화 시간에 따른 전화 빈도 수
 - 15:00 ~ 15:30 동안 콜센터에 걸려온 문의전화 개수는 15:30 ~ 15:45 동안의 문의전화 개수와 무관함
- 포아송 과정에서는 독립증분에 의해, 서로 다른 시간의 구간에서 사건이 발생하는 것은 서로 독립적으로 고려됨
 - 구간 A와 구간 B에서의 사건 수는 서로 독립이나, 구간 B와 구간 C에서의 사건 수는 독립이 아님

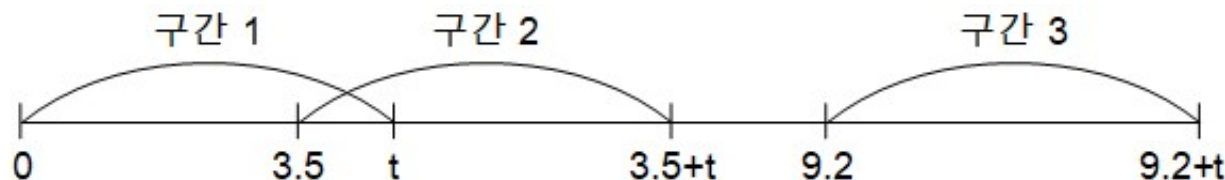


<그림 2.10> 독립증분의 가정

포아송 과정

• 가정 2 – 정상증분(Stationary Increment)

- 구간내에서 발생한 사건수는 그 구간의 길이에만 영향을 받고 구간의 시간적 위치와는 무관함
 - e.g., 시간에 따른 불량품 생산 개수
 - 24시간 부품을 생산하는 기계에서 15:00 ~ 15:30의 30분 동안 생산된 불량품 개수에 대한 확률분포는 07:00 ~ 07:30의 30분 동안과 동일
- 포아송 과정에서는 정상증분에 의해, 사건 발생 빈도가 일정한 사건 발생 확률은 지수분포의 평균 시간에 대한 구간 길이에 비례함
 - 구간 1에서 $k(k = 0, 1, 2, \dots)$ 개의 사건이 발생할 확률은 구간 2, 3에서도 모두 동일함
 - 그러나, 콜센터 문의전화 같이 시간대에 따라 다양한 빈도수를 가지는 시스템에서는 본 가정이 부적합할 수 있음



<그림 2.11> 정상증분의 가정

포아송 과정

• 가정 3 – 단일증분(Single Increment) (1/2)

- 충분히 짧은 시간이나 작은 공간에서는 2개 이상의 결과가 동시에 발생할 확률이 0에 가까움

- 충분히 작은 값 Δt 에 대해 다음이 성립함

(a) $P(N(t + \Delta t) - N(t) = 0) \approx 1 - \lambda \Delta t,$

(b) $P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) \approx \lambda \Delta t,$

(c) $P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) \approx 0$

- Δt 가 0에 가까울수록 값이 정확함

Δt : 시간 변화율
 λ : 단위시간 당 사건 발생률
 $N(t)$: 사건 발생횟수

- e.g., 짧은 시간 간격($\Delta t = 1s$) 동안 다량의 불량품 발생

- 일반적으로 1초 동안 불량품이 발생하지 않을 확률이 더 높음

: $P(N(t + \Delta t) - N(t) = 0) \approx 1 - \lambda \Delta t$

- 1초 동안 하나의 불량품이 발생할 확률은 $\lambda \Delta t$ 에 비례함

: $P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) \approx \lambda \Delta t$

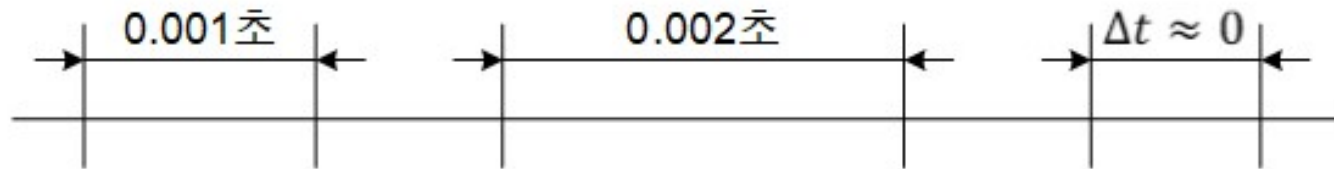
- 그러나 1초 동안 2개 이상의 불량품이 발생할 확률은 거의 0에 가까움

: $P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) \approx 0$

포아송 과정

• 가정 3 – 단일증분(Single Increment) (2/2)

- 포아송 과정에서는 단일증분에 의해, 사건은 하나씩만 발생하고, 구간 길이가 충분히 짧은 경우에는 해당 구간에서 하나의 사건이 발생할 확률이 그 구간 길이에 비례함
 - 구간 길이가 짧을수록 사건이 한 번 발생할 확률도 적음을 의미



<그림 2.12> 단일증분의 가정

- 단일증분의 가정을 이완하여 둘 이상의 사건발생도 허용되는 경우는 복합(Compound) 포아송 과정이라고 함

포아송 과정

• 3가지 가정에 의한 포아송 과정

정의 2.1

$N(t) \sim PP(\lambda)$ 이면 $N(t)$ 는 모수 λt 의 포아송 확률변수이다. 즉, $N(t)$ 는 다음과 같은 확률 분포를 가진다.

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

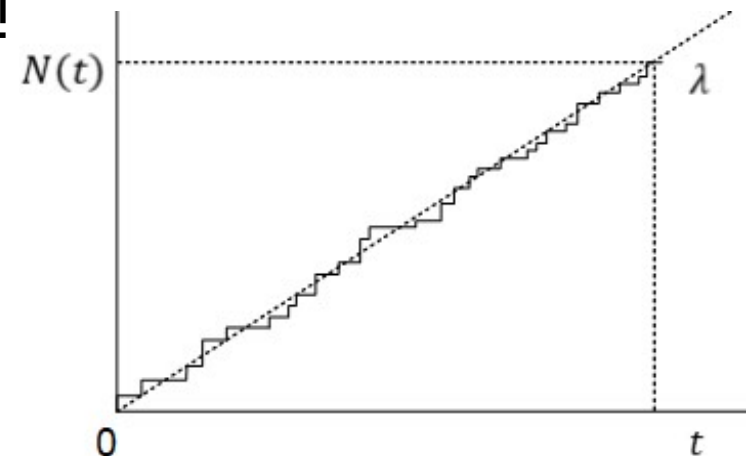
λ : 단위시간 당 사건 발생률
 $N(t)$: 사건 발생횟수

그러므로 $E(N(t)) = \lambda t, Var(N(t)) = \lambda t$ 이다.

• 모수 λ 의 의미

• t 가 충분히 큰 경우, $N(t)$ 의 대략적인 기울기(=표본경로)

- $N(t) \approx \lambda t$, 즉 $\lambda \approx N(t)/t$ 이므로 총 사건 발생횟수를 시간으로 나눈 값
- 단위시간당 사건 평균 발생횟수, 즉 사건의 의미에 따라 발생률, 도착률, 출생률, 전이율 등으로 해석 가능



<그림 2.13> 포아송 과정에서 모수 λ 의미

포아송 과정

• 예제 2.9

$N(t) \sim PP(\lambda)$ 일 때,

$$P(N(t+s) = m+k | N(s) = m) = P(N(t+s) - N(s) = k) = P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}.$$

두 번째 등식은 $N(0) = 0$ 과 정상증분에 의해 성립한다.

- m 은 시간 s 에 대한 사건 발생횟수, k 는 시간 t 에 대한 사건 발생횟수
- “ $N(0) = 0$ 과 정상증분에 의해 성립한다.”는 포아송 과정의 초기 조건인 $N(0) = 0$ 을 제공하고, 정상증분에 의해 시간 t 동안의 $N(t)$ 가 포아송 분포를 따름을 의미
- 이에 따라, $P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$ 이 성립함
- 또한 포아송 과정에서 $N(t+s) - N(s)$ 는 시간 t 동안의 포아송 분포를 따르므로
$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$
임
- 이때 포아송 과정의 독립증분에 의해 $N(t+s) - N(s)$ 과 $N(s)$ 는 독립이므로 위 식이 성립함

포아송 과정

• 예제 2.10 (1/2)

$$\begin{aligned} P(N(t+s) = m+k, N(s) = m) &= P(N(t+s) - N(s) = k, N(s) = m) \\ &= P(N(t+s) - N(s) = k)P(N(s) = m) \\ &= P(N(t) = k)P(N(s) = m) \\ &= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^m}{m!} \end{aligned}$$

첫 번째와 두 번째 등식은 독립증분의 성질을 이용한 것이며, 세 번째 등식은 정상증분에 의한 것이다.

- m 은 시간 s 에 대한 사건 발생횟수, k 는 시간 t 에 대한 사건 발생횟수
- $P(N(t+s) = m+k, N(s) = m)$ 는 시간 s 까지 m 개의 사건이 발생하고, 이후 t 동안 k 개의 사건이 더 발생하여 총 $m+k$ 개의 사건이 $t+s$ 까지 발생했을 확률
- 포아송 과정의 독립증분에 의해 $N(t+s) - N(s)$ 와 $N(s)$ 는 독립임
- 포아송 과정의 정상증분에 의해 $N(t+s) - N(s)$ 는 시간 t 동안의 포아송 분포를

따라서 $P(N(t+s) - N(s) = k) = P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$ 임

포아송 과정

• 예제 2.10 (2/2)

만약에 아래와 같이 잘못 쓴다면 두 번째와 세 번째 등식에서 두 번의 실수를 저지르는 셈이다.

$$\begin{aligned}P(N(t+s) = m+k, N(s) = m) &= P(N(t+s) - N(s) = k, N(s) = m) \\&= P(N(t) = k, N(s) = m) \\&= P(N(t) = k)P(N(s) = m) \\&= \dots\end{aligned}$$

두 번째 등식에서 $N(t+s) - N(s)$ 와 $N(t)$ 는 확률분포가 같지만 $N(s)$ 와 결합된 확률분포는 다르다. 또 세 번째 등식에서는 $N(t)$ 와 $N(s)$ 가 서로 독립이라는 잘못된 추론을 하였다.

- 두 번째 등식에서, $N(t+s) - N(s)$ 는 시간 t 동안의 포아송 분포를 따르므로, $N(t+s) - N(s)$ 와 $N(t)$ 의 확률분포는 동일하나, 결합 확률과는 다름
- 또한, 세 번째 등식에서, $N(t+s) - N(s)$ 와 $N(s)$ 는 독립이나, $N(t)$ 와 $N(s)$ 는 독립이 아님
- 결론적으로, 독립증분 성질을 잘못 적용함에 따라 잘못된 추론을 한 경우에 해당함

포아송 과정

• 예제 2.11

$N(t) \sim PP(10)$ 일 때, $P(N(0.4) = 2, N(0.7) = 5, N(1.2) = 5)$ 를 계산해보자.

$$\begin{aligned} P(N(0.4) = 2, N(0.7) = 5, N(1.2) = 5) \\ &= P(N(0.4) = 2, N(0.7) - N(0.4) = 3, N(1.2) - N(0.7) = 0) \\ &= P(N(0.4) = 2)P(N(0.7) - N(0.4) = 3)P(N(1.2) - N(0.7) = 0) \\ &= P(N(0.4) = 2)P(N(0.3) = 3)P(N(0.5) = 0) \\ &= \frac{e^{-0.4 \times 10} (0.4 \times 10)^2}{2!} \cdot \frac{e^{-0.3 \times 10} (0.3 \times 10)^3}{3!} \cdot \frac{e^{-0.5 \times 10} (0.5 \times 10)^0}{0!} \\ &= 0.00022. \end{aligned}$$

- 포아송 과정의 독립증분에 의해, $t + s = 0.7, s = 0.4$ 라고 볼 때,
 $N(0.7) - N(0.4)$ 는 시간 $0.3 (= 0.7 - 0.4)$ 동안의 포아송 분포를 따름
 $\therefore N(0.7) - N(0.4) = 5 - 2 = 3$
- 이와 같은 방식으로 $t + s = 1.2, s = 0.7$ 이라고 볼 때, $N(1.2) - N(0.7)$ 는
시간 $0.5 (= 1.2 - 0.7)$ 동안의 포아송 분포를 따름
 $\therefore N(1.2) - N(0.7) = 5 - 5 = 0$
- 이후, $P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda t)^n}{n!}$ 에 따라 값을 대입하여 계산한 식임

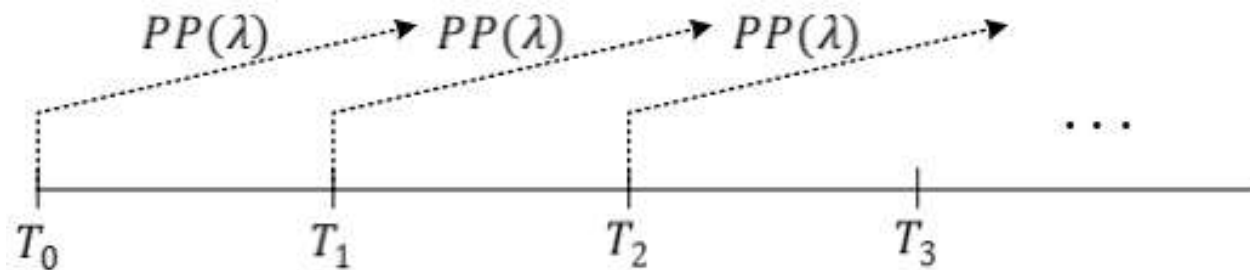
포아송 과정

- 포아송 과정의 사건발생 간격
 - 포아송 과정에서 T_1, T_2, \dots, T_n 을 각각 1, 2, ..., n 번째 사건이 발생한 시점들이라고 가정
 - $N(t) \sim PP(\lambda)$ 에서, $\{N(x) = 0\}$ 인 사상은 $\{T_1 > x\}$ 인 사상과 동치(Equivalent)임
 - 동치는 두 명제가 논리적으로 같음을 의미
 - $N(x) = 0$: 시간 x 까지 사건이 발생하지 않음을 의미
 - $T_1 > x$: 첫 번째 사건이 시간 x 이후에 발생했음을 의미
 - 따라서, $P(N(x) = 0) = e^{-\lambda x} = P(T_1 > x)$ 이고 첫 번째 사건이 발생할 때까지의 시간 T_1 은 $T_1 \sim Exp(\lambda)$, 즉 모수 λ 의 지수분포를 따름
 - 포아송 과정에서 기억상실성질을 가짐

포아송 과정

• 포아송 과정의 사건발생 간격

- 포아송 과정의 독립증분에 의해, 구간 $[0, T_1]$ 에서의 확률은 구간 $[T_1, \infty)$ 과 독립적이므로, 시점 T_1 에서 포아송 과정이 처음부터 다시 시작한다고 생각할 수 있음
- 구간 $[T_1, \infty)$ 에서 보면, T_2 또한 첫 번째 사건발생 시점이므로 $T_2 - T_1$ 도 모수 λ 의 지수분포를 따르며, T_1 과는 독립임
- 그러므로 $T_3 - T_2$ 도 $T_1, T_2 - T_1$ 과 독립이며, 모수 λ 의 지수 분포를 따름



<그림 2.14> 포아송 과정의 사건발생 간격

포아송 과정

• 포아송 과정의 사건발생 간격

정의 2.2

$N(t) \sim PP(\lambda)$ 일 때, 사건의 발생 간격 $T_{k+1} - T_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 는 iid*이며, 모수 λ 의 지수 분포를 따른다.

*iid(independent and identically distributed): 독립적이고 동일한 분포

- 포아송 과정은 사건발생 간격에 대해 독립적이고 동일한 분포를 가짐
 - $T_{k+1} - T_k$ 에 대한 동일한 지수분포를 따름
- 포아송 과정은 기억상실성질을 가지는 지수분포를 따름
- 포아송 과정은 완전한 랜덤성을 가진 특정 사건들이 발생하는 것을 표현할 수 있음
 - e.g., 콜센터에 걸려오는 문의전화, 방사능 물질에서 방출되는 방사능 입자 수 등

포아송 과정

- 포아송 과정의 사건발생 간격

- $T_k = (T_k - T_{k-1}) + (T_{k-1} - T_{k-2}) + \dots + T_1$ 이므로 T_k 는
모수 (k, λ) 를 가지는 일랑(Erlang) 확률변수임
 - 일랑 확률변수: k 개의 독립적인 지수 확률변수 합
 - 포아송 과정에서 사건 발생까지의 총 시간 모델링에 유용

- T_k 의 PDF: $f_{T_k}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}$

- T_k 의 DF: $F_{T_k}(t) = P(T_k \leq t) = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx$

- T_k 의 평균: $E(T_k) = k \times \left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{k}{\lambda}$

λ : 단위시간 당 사건 발생률

포아송 과정

• 예제 2.12

$N(t) \sim PP(\lambda)$ 일 때, 다음이 성립한다.

(a) $E(T_4) = \frac{4}{\lambda}.$

(b) $E(T_4 - T_3) = \frac{1}{\lambda}.$

(c) $E(T_7 - T_3) = \frac{4}{\lambda}.$

(d) $E(T_7 - T_3 | T_3 = c) = \frac{4}{\lambda}. (c \text{는 상수})$

- (a)는 일랑분포 평균 공식에 따라 계산함
- (b)는 사건발생 간격이 $T_{k+1} - T_k$ 는 지수분포를 따르므로 지수분포의 평균 공식을 따름
- (c)는 $T_7 - T_3$ 는 4개의 지수분포를 따르는 간격의 합이므로 $4 \times 1/\lambda$
- (d)는 기억상실성질에 의해 $T_7 - T_3$ 가 $T_3 = c$ 와 무관하게 동일한 분포를 따르므로 (c)와 동일하게 계산됨

포아송 과정

• 조건부 발생시점

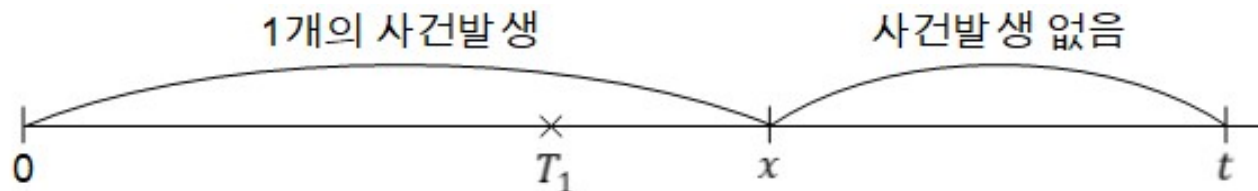
- 포아송 과정에서 첫 번째 사건의 발생시점 T_1 은 지수분포를 따르고, 시간 구간 $[0, t]$ 동안 사건이 한 번 발생했다는 조건 하에 가지는 확률분포

- 첫 번째 사건 발생시점 T_1 의 분포, $T_1|N(t) = 1$

$$\begin{aligned} P(T_1 \leq x | N(t) = 1) &= \frac{P(T_1 \leq x, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P([0, x] \text{에서 한 사건 발생, } (x, t] \text{에서 발생 없음})}{P(N(t) = 1)} \\ &= \frac{P(N(x) = 1)P(N(t) - N(x) = 0)}{P(N(t) = 1)} = \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x) \cdot e^{-\lambda(t-x)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)} = \frac{x}{t}, \quad 0 \leq x \leq t \end{aligned}$$

- $T_1|N(t) = 1$ 은 $[0, t]$ 에서 균일분포를 따름

- e.g., 전화가 10분($= t$)에 한 번 온다고 할 때, 그 전화가 1분 후에 올 확률이나 5분 후에 올 확률 등은 모두 동일함



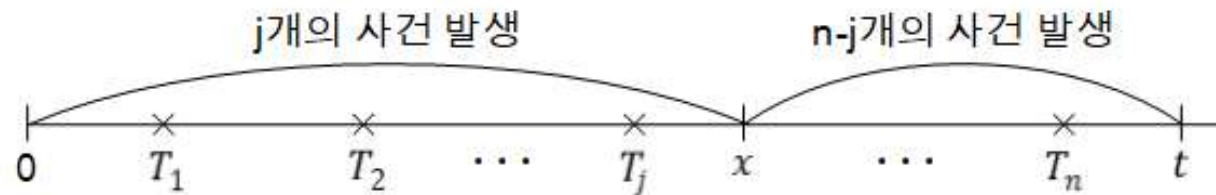
<그림 2.15> 조건부 발생시점의 분포

포아송 과정

• 조건부 발생시점

- 어떤 시간 구간 $[0, t]$ 동안 n 개의 사건이 발생했음을 알고 있을 때, k 번째 발생한 사건의 발생시점 T_k 의 확률분포

$$\begin{aligned} P(T_k \leq x | N(t) = n) &= \frac{P(T_k \leq x, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} = \frac{P(N(x) \geq k, N(t) = n)}{P(N(t) = n)} \\ &= \sum_{j=k}^n \frac{P(N(s) = j, (x, t] \text{에서 } n-j \text{개의 사건 발생})}{P(N(t) = n)} \\ &= \sum_{j=k}^n \frac{e^{-\lambda} (\lambda x)^j / j! \cdot e^{-\lambda(t-x)} (\lambda(t-x))^{n-j} / (n-j)!}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!} = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left(\frac{x}{t}\right)^j \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-j}, 0 \leq x \leq t \end{aligned}$$

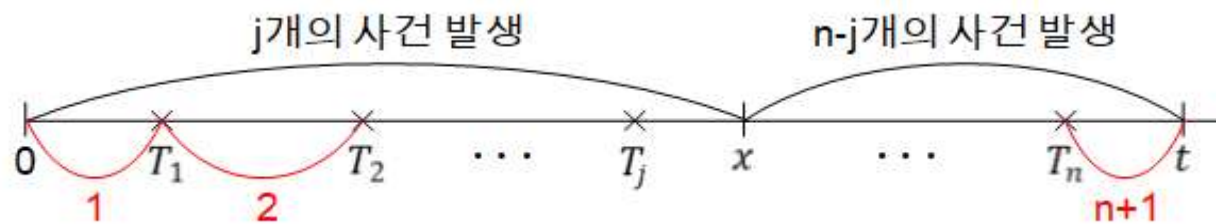


<그림 2.16> n개 사건의 조건부 발생시점의 분포

포아송 과정

• 조건부 발생시점

- 조건부 확률변수 $T_k | N(t) = n$ 는 구간 $[0, t]$ 에서 균일분포를 따르는 확률변수 T_1, \dots, T_n 중 T_k 와 동일한 분포를 가짐
- 이는 n 개의 사건들이 발생한 시점인 T_1, \dots, T_n 이 $T_1 < \dots < T_n$ 를 유지하며 그 구간 내에서 나타날 가능성이 균일함을 의미
 - $[0, t]$ 동안 n 개의 사건이 발생했음을 알고 있을 때, 임의로 선택한 특정 시점에서 사건이 발생할 가능성은 $[0, t]$ 내에서 $n + 1$ 만큼 균일하게 분포되어 있음



<그림 2.17> 조건부 발생시점 분포의 구간 수

포아송 과정

• 예제 2.13

$PP(\lambda)$ 에서, 구간 $[0, t]$ 동안 다섯 개의 사건이 발생했음을 알고 있을 때, 네 번째 발생한 사건의 발생시점 평균값을 구하라.

- $P(T_4 \leq x | N(t) = 5) = \sum_{j=4}^5 \left(\frac{x}{t}\right)^j \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{5-j} = 5 \left(\frac{x}{t}\right)^4 - 4 \left(\frac{x}{t}\right)^5$ 이므로
- $E(T_4 | N(t) = 5) = \int_0^t \left(1 - 5 \left(\frac{x}{t}\right)^4 + 4 \left(\frac{x}{t}\right)^5\right) dx = \frac{2}{3}t$ 이다.
- $k(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ 번째 사건의 발생 시점의 평균값은 $k \times t / (1 + 5) = kt/6$ 이다.
- 이는 구간 $[0, t]$ 를 6등분한 시점들이다.

• 예제 2.14

10:00~11:00 동안 세 개의 사건이 발생했다. 세 사건 모두 10:45~11:00 사이에 발생했을 확률은 $0.25^3 = 0.015625$ 이다.

- 총 구간 길이는 60분, 10:45~11:00의 길이는 15분이므로, 확률은 $15/60 = 0.25$
- 세 개의 사건은 모두 독립적으로 발생하므로 확률은 $0.25^3 = 0.015625$

포아송 과정

• 예제 2.15

어떤 버스 정거장에서 버스가 30분마다 한 대씩 떠난다. 승객들은 포아송 과정으로 도착하는데, 30분 사이에 8명의 승객들이 도착했다면 이들의 누적 대기시간의 평균은?

- 8명 고객들의 도착시점의 평균값은 30분을 9등분한 사람들이다.
- 따라서 누적 대기시간은 $\left(\frac{30}{9}\right) \times 8 + \dots + \left(\frac{30}{9}\right) \times 1 = \left(\frac{30}{9}\right) \times 36 = 120$ 분이다.

• 예제 2.16

시스템에 N 명의 고객이 도착하는 순간 시스템이 종료된다. 종료될 때까지 시스템 내에 존재하는 고객 수는 평균적으로 몇 명인가?

- 시스템이 종료하기 전까지는 총 $N - 1$ 명의 포아송 도착고객이 있다.
- 이들의 도착시점들의 평균은 동일한 간격을 가지므로 시스템 내 고객 수가 0명인 기간, 1명인 기간, ..., $N - 1$ 명인 기간들은 그 길이의 평균이 모두 동일하며 총 N 개의 기간이 있다.
- 따라서 평균 고객수는 $(0 + 1 + \dots + N - 1)/N = (N - 1)/2$ 명이다.

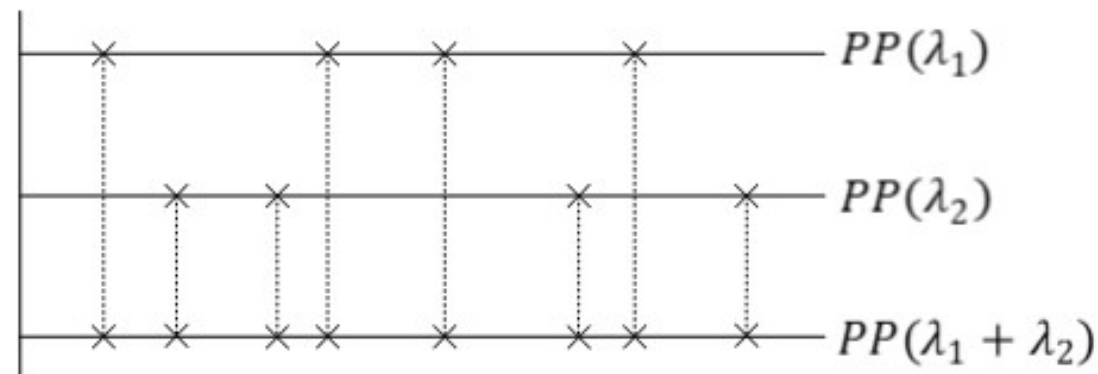
포아송 과정

- 포아송 과정의 중첩과 분해
 - 중첩(Superposed) 포아송 과정

정의 2.3

두 개의 서로 독립인 포아송 과정 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 과 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 이 있는데, 모수는 각각 λ_1, λ_2 이다. 이들의 사건 발생간격은 $Exp(\lambda_1), Exp(\lambda_2)$ 을 따른다.

이들을 서로 겹쳐서 만든 새로운 확률과정 $\{N_1(t) + N_2(t), t \geq 0\}$ 은 모수가 $\lambda_1 + \lambda_2$ 인 포아송 과정이다. 중첩 포아송 과정의 사건발생 간격은 $\min(Exp(\lambda_1), Exp(\lambda_2))$ 이므로 $Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$ 를 따른다. 셋 이상의 독립적인 포아송 과정을 중첩하는 경우도 마찬가지로 확장해서 생각할 수 있다.



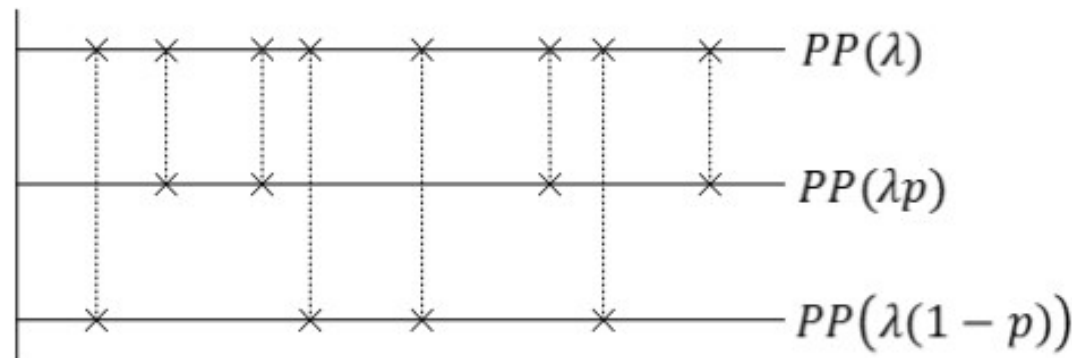
<그림 2.18> 중첩 포아송 과정

포아송 과정

- 포아송 과정의 중첩과 분해
 - 베르누이 분해(Bernoulli Decomposed) 포아송 과정

정의 2.4

모수가 λ 인 포아송 과정 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 에서, 사건이 발생할 때마다 앞면이 나올 확률이 p 인 동전을 던져서 앞면이 나오면 ‘사건 1’로, 뒷면이 나오면 ‘사건 2’로 기록을 한다. 이렇게 기록된 사건 1들은 모수가 $p\lambda$ 인 포아송 과정을, 사건 2들은 $(1 - p)\lambda$ 인 포아송 과정을 이룬다. 이를 포아송 과정의 베르누이 분해라고 한다.



<그림 2.19> 베르누이 분해 포아송 과정

포아송 과정

• 예제 2.17

콜센터에 가입(=1) 및 탈퇴(=2) 요청 등 두 가지 종류의 문의전화가 각각 시간당 $\lambda_1 = 10$ 건, $\lambda_2 = 9$ 건씩 걸려온다.

- (a) 걸려온 문의전화가 가입 요청을 위한 전화일 확률은?
 - 중첩 포아송 과정에 의해, $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ 활용
 - 전체 문의전화의 도착률은 $10 + 9 = 19$ 이며, 이 가운데 도착률 10으로 가입 요청이 오므로 구하는 확률은 $10/(10 + 9) = 0.53$ 임
- (b) 하루 8시간 동안 탈퇴요청을 철회하는 횟수 M 이 15건 이상이 될 확률
 - 베르누이 분해 포아송 과정에 의해, 탈퇴 문의전화의 포아송 과정을 $p = 0.15$ 의 확률로 분해하면, 탈퇴철회는 평균 $\lambda = 9 \times 0.15 = 1.35$ (건/시간)의 포아송 과정임
 - $t = 8$ (시간)이므로 $\lambda t = 10.8$ 이고,
구하는 확률은 $P(M \geq 15) = 1 - \sum_{i=0}^{14} e^{-10.8} (10.8)^i / i! = 1 - 0.8682 = 0.1318$ 임

목 차

- 지수분포
- 포아송 과정
- 복합 포아송 과정
- 비정상 포아송 과정

복합 포아송 과정

• 정의

정의 2.5

$N(t) \sim PP(\lambda)$ 라고 하고, iid인 확률변수 G_1, G_2, \dots 의 상태공간을 $\{1, 2, \dots\}$ 라고 하자.

$M(t) = G_1 + G_2 + \dots + G_{N(t)}$ 라고 할 때, $\{M(t), t \geq 0\}$ 을 복합(Compound) 포아송 과정이라고 한다.

즉, 사건 발생은 포아송 과정을 따르지만 각 사건마다 iid 확률변수 만큼의 증가가 이루어지는 경우의 총 증분을 나타내고 있다.

• 특징

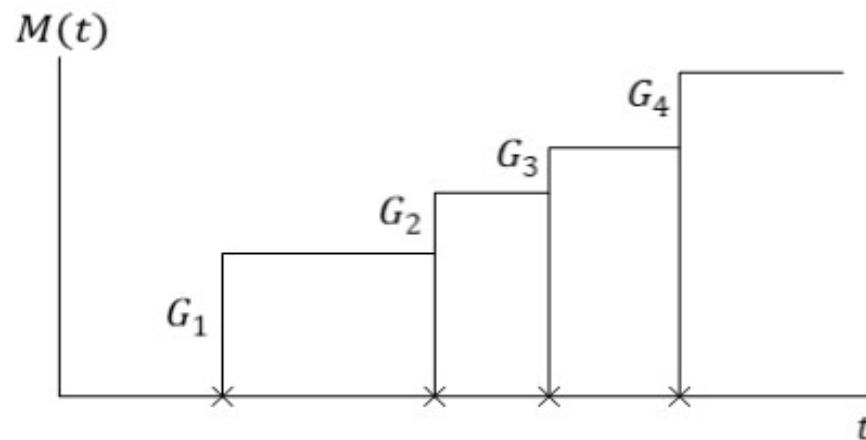
- 복합 포아송 과정은 각 포아송 사건의 크기를 합산하여 생성됨
- 포아송 과정의 단일증분을 제외하고, 독립증분과 정상증분 중에 하나 이상의 가정을 허용하는 경우에도 복합 포아송 과정이 됨

복합 포아송 과정

• 예제 2.18

시점 t 까지 고속도로 톨게이트를 통과한 차량의 대수 $N(t)$ 가 $PP(\lambda)$ 라고 하자.
또한 확률변수 $G_k (k = 1, 2, \dots)$ 는 k 번째 통과한 차량 내에 탑승한 승객의 수라고 하면,
시점 t 까지 톨게이트를 통과한 승객의 수 $M(t) = G_1 + G_2 + \dots + G_{N(t)}$ 는 복합 포아송 과정이다.

- 확률과정 $M(t)$ 의 그래프에서 각 점프의 시점들은 $PP(\lambda)$ 를 이루고, 점프의 높이는 확률변수 $G_k (k = 1, 2, \dots)$ 임
- 총 승객 수인 $M(t)$ 는 랜덤합이므로 $E(M(t)) = E(N(t))E(G) = \lambda t E(G)$ 임



<그림 2.20> 예제 2.18 그림

복합 포아송 과정

• 예제 2.19

베르누이 분해된 포아송 과정은 복합 포아송 과정으로도 생각할 수 있다.
 $N(t) \sim PP(\lambda)$ 이고 점프의 높이가 확률 p 로 1, 확률 $q = 1 - p$ 로 0인 복합 포아송 과정을 생각하자. 이 때 시점 t 까지의 총 도착수가 k 일 확률을 구해보자.

- 구하는 확률은 $P(M(t) = k)$ 이고, $G_i = 1$ (확률 p) 또는 0(확률 q)이므로
 $P(M(t) = k) = P(G_1 + G_2 + \dots + G_{N(t)} = k)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=k}^{\infty} P(G_1 + G_2 + \dots + G_{N(t)} = k | N(t) = n) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} P(G_1 + G_2 + \dots + G_{N(t)} = k) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} = \dots = \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^k}{k!} \end{aligned}$$

- 네 번째 등식에서는 점프높이를 나타내는 G_i 가 베르누이 확률변수이므로 $G_1 + \dots + G_n$ 이 이항확률변수임을 활용함
- 마지막 등식에서는 $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} = e^a$ 의 등식을 적용함
- 따라서, $M(t)$ 는 $N(t)$ 에서 점프 크기가 1인 경우만 걸러내서 얻은 베르누이 분해된 복합 포아송 과정임

목 차

- 지수분포
- 포아송 과정
- 복합 포아송 과정
- 비정상 포아송 과정

비정상 포아송 과정

• 정의

정의 2.6

다음과 같은 가정을 만족하는 확률과정 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 은 비정상 포아송 과정이다.

- (i) (독립증분) 겹치지 않는 두 구간에서 각각 발생한 사건의 개수들은 서로 독립이다.
- (ii) (단일증분) 충분히 작은 값 dt 에 대하여 다음이 성립한다.
 - (a) $P(N(t + dt) - N(t) = 0) \approx 1 - \lambda(t)dt$
 - (b) $P(N(t + dt) - N(t) = 1) \approx \lambda(t)dt$
 - (c) $P(N(t + dt) - N(t) = 0) \approx 0$

- 확률과정 $\{N(t), t \geq 0\}$ 이 비정상 포아송 과정을 따르는 것은, $N(t) \sim NSPP(\lambda(t))$ 로 표현함

• 특징

- 포아송 과정에서 정상증분 가정을 제외한 경우에도 비정상 포아송 과정이 됨
 - 정상증분 가정은 어떤 구간내에서의 사건 발생 수는 그 구간의 시간적 위치와 무관함을 정의함

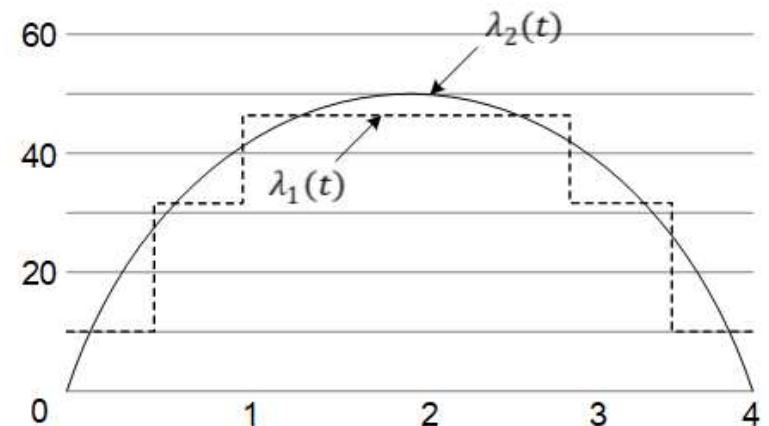
비정상 포아송 과정

• 예제 2.20

11:30부터 13:30까지 식당에 도착하는 고객들을 비정상 포아송 과정으로 모형화할 수 있다. 11:30을 시점 0으로 하고 30분 단위로 1씩 늘게 하여 13:30을 시점 4로 표현한다. 고객들의 도착률은 비정상의 시간 의존형이며 다음 $\lambda_2(t)$ 와 같은 곡선으로 표시할 수도 있으나 이를 근사하여 $\lambda_1(t)$ 와 같이 부분선형 함수로 나타낼 수도 있다.

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} 10, & 0 \leq t < 0.5, \\ 29, & 0.5 \leq t < 1, \\ 45, & 1 \leq t < 3, \\ 29, & 3 \leq t < 3.5, \\ 10, & 3.5 \leq t < 4, \end{cases} \quad \text{또는 } \lambda_2(t) = 50 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right), \quad 0 \leq t \leq 4.$$

- 정상증분이 제외됨에 따라, 네 개의 시점에 따른 구간별 고객 도착률이 다양함
- $\lambda_1(t)$ 는 시간에 따른 도착률 변화를 선형으로 근사한 함수
- $\lambda_2(t)$ 는 실제 시간에 따른 도착률의 변화를 반영한 함수



<그림 2.21> 예제 2.20 그림

비정상 포아송 과정

- $\lambda(s)$ 는 시점 s 에서의 순간 발생률이므로, 이를 적분하는 경우에 발생 횟수의 평균이 됨
 - $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds = E(N(t))$ 는 구간 $[0, t]$ 에서 사건 발생 횟수의 평균

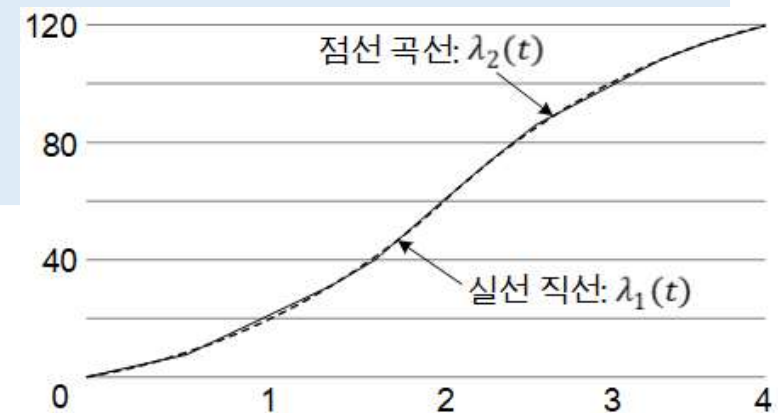
• 예제 2.21

예제 2.20에서, $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t)$ 는 시점 t 까지의 평균 발생횟수에 해당한다.

$$\Lambda_1(t) = \begin{cases} 10t, & 0 \leq t < 0.5, \\ 5 + 29(t - 0.5), & 0.5 \leq t < 1, \\ 19.5 + 45(t - 1), & 1 \leq t < 3, \\ 109.5 + 29(t - 3), & 3 \leq t < 3.5, \\ 124 + 10(t - 3.5), & 3.5 \leq t < 4, \end{cases}$$

$$\Lambda_2(t) = \int_0^t 50 \sin(\pi x/4) dx = \frac{200}{\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) \right), 0 \leq t \leq 4.$$

- $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t)$ 에 의하면, $\Lambda_1(t)$ 의 직선이 $\Lambda_2(t)$ 의 곡선에 매우 근사하므로, 예제 2.20과 같이 도착률 함수가 $\lambda_2(t)$ 같은 곡선인 경우, 구간을 구분하여 부분선형 함수 $\lambda_1(t)$ 처럼 표현할 수 있음



<그림 2.22> 예제 2.21 그림

Thanks!

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)

• MATLAB 코드 – 그림 2.2

```
x = 0:0.1:10;  
y1 = exppdf(x,1); %/mu=1  
y2 = exppdf(x,2); %/mu=2  
  
fig = figure;  
set(fig, 'Position', [100, 100, 600, 220]);  
plot(x, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 1.5);  
grid on;  
hold on;  
  
plot(x, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 1.5);  
xlabel('Observation')  
ylabel('Probability Density')  
legend('E(X) = 1', 'E(X) = 2')
```

부록

• MATLAB 코드 – 그림 2.3

```
x = 0:0.1:6;
y = exppdf(x,1);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 600, 220]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 1.5);
hold on;
x_fill = [0 x(x <= 2) 2];
y_fill = [0 y(x <= 2) 0];
fill(x_fill, y_fill, 'blue', 'FaceAlpha', 0.3, 'EdgeColor',
'none');
text(1.8, 0.5, '$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$',
'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 16, 'VerticalAlignment',
'top');
text(-0.1, -0.02, '0', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14,
'VerticalAlignment', 'top');
text(1.9, -0.02, '$x$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14,
'VerticalAlignment', 'top');
text(5.8, -0.02, '$X$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14,
'VerticalAlignment', 'top');
text(-0.5, 0.95, '$f(x)$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14,
'VerticalAlignment', 'top');
set(gca, 'XTick', []);
set(gca, 'YTick', []);
```

```
x = 0:0.1:6;
y = exppdf(x,1);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 600, 220]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 1.5);
hold on;
x_fill = [2 x(x >= 2) max(x)];
y_fill = [0 y(x >= 2) 0];
fill(x_fill, y_fill, 'blue', 'FaceAlpha', 0.3, 'EdgeColor',
'none');
text(1.8, 0.5, '$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$',
'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 16, 'VerticalAlignment',
'top');
text(-0.1, -0.02, '0', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14,
'VerticalAlignment', 'top');
text(1.9, -0.02, '$x$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14,
'VerticalAlignment', 'top');
text(5.8, -0.02, '$X$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14,
'VerticalAlignment', 'top');
text(-0.5, 0.95, '$f(x)$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14,
'VerticalAlignment', 'top');
set(gca, 'XTick', []);
set(gca, 'YTick', []);
```

• MATLAB 코드 – 그림 2.4

```
x = 0:0.1:5;
y = exppdf(x,1.5);
fig = figure;

set(fig, 'Position', [100, 100, 600, 220]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
hold on;

overlap_x = 1.5:0.01:2;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);

fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.3, 'EdgeColor',
'none');

xlabel('통화 시간', 'FontSize', 12)
ylabel('Probability Density', 'FontSize', 12)
legend('$E(X) = 1.5$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 12)
```