확률 및 통계학

- 4장 수학적 기대값 -

명 세인(sein@pel.smuc.ac.kr)

상명대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 확률 변수의 평균
- 분산과 공분산
- 선형 결합된 확률변수의 평균과 분산
- 체비세프 정리

- 보충

확률 변수의 평균

- 평균의 의미
  - 확률 변수의 기대값(Expected Value)이라고 하며, 확률분포의 중심을 의미
  - 어떤 확률이 발생할 평균의 의미로 생각

- 기대값 정의
  - X가 확률분포 $f(x)$를 갖는 확률변수일 때, X의 기대값(μ)
    - 이산형: $\mu = E(X) = \sum_x xf(x)$
    - 연속형: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$

확률 변수의 평균

- 예제 4.1
  - 품질검사원이 7개의 부품으로 구성되어있는 로트를 검사, 해당 로트에 4개의 양품과 3개의 불량품이 들어있을 때, 3개의 부품을 추출할 때 양품의 평균 개수는?
    - 추출된 표본의 양품의 수 확률변수 $X = \{0, 1, 2, 3\}$
    - X의 확률분포 $f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}},\ \mathrm{x} = \{0, 1, 2, 3\}$
    - $\mu = E(X) = (0)\left(\frac{1}{35}\right) + (1)\left(\frac{12}{35}\right) + (2)\left(\frac{18}{35}\right) + (3)\left(\frac{4}{35}\right) = \frac{12}{7}$

확률 변수의 평균

- 예제 4.2
  - 의료기기 외판원이 두 고객에게 제품을 판매, 첫번째 고객과 거래 성사율은 70%이고 성공시 1000원을 벌게 되며, 두번째 고객과는 40%의 성사율에 성공시 1500원을 벌게 된다, 각 거래 결과는 서로 독립적일 때 기대할 수 있는 성공보수는?
    - 확률변수X는 성공보수, $X = \{0, 1000, 1500, 2500\}$
    - $f(0) = (1 - 0.7)(1 - 0.4) = 0.18, f(1000) = (0.7)(1 - 0.4) = 0.42$
      $f(1500) = (1 - 0.7)(0.4) = 0.12, f(2500) = (0.7)(0.4) = 0.28$
    - $E(X) = (0)(0.18) + (1000)0.42 + (1500)(0.12) + (2500)(0.28)$
      $= 1300$

확률 변수의 평균

- 예제 4.3
  - 전자장치의 수명을 을 확률변수 X이며, 다음과 같은 확률밀도 함수$f(x)$를 따를 때, 장치의 기대 수명은?
    - $f(x) = \begin{cases} \frac{20{,}000}{x^3}, x > 100 \\ 0, \text{다른 구간} \end{cases}$
    - $\mu = E(X) = \int_{100}^{\infty} x \frac{20{,}000}{x^3} dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20{,}000}{x^2} dx = 200$

확률 변수의 평균

- 확률 변수 X에 종속(관계)되는 확률변수 $g(X)$의 기대값
  - 정의
    - X가 확률분포 $f(x)$를 갖는 확률변수 일 때, $g(X)$의 기대값
      - 이산형: $\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x)f(x)$
      - 연속형: $\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

확률 변수의 평균

- 예제 4.4
  - 금요일 오후 4시에서 5시 사이 세차장에서 서비스 받는 차의 수를 나타내는 확률변수X의 확률분포는 다음을 따를 때

x	4	5	6	7	8	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

  - $g(X) = 2X - 1$을 종업원이 받는 수당이라고 할 때, 종업원의 기대 수익은?
    - $E[g(X)] = E(2X - 1) = \sum_{x=4}^{9}(2x - 1)f(x)$
    - $= (7)\left(\frac{1}{12}\right) + (9)\left(\frac{1}{12}\right) + (11)\left(\frac{1}{4}\right) + (13)\left(\frac{1}{4}\right) + (16)\left(\frac{1}{6}\right) + (17)\left(\frac{1}{6}\right)$
    - $= 12.67$

확률 변수의 평균

- 예제 4.5
  - 확률변수 X의 밀도함수가 다음을 따를 때
    - $f(x)\begin{cases} \frac{x^2}{3}, -1 < x \\ 0, \text{다른 구간} \end{cases}$
    - $g(X) = 4X + 3$의 기대값은?
      - $E(4X+3) = \int_{-1}^{2} \frac{(4x+3)x^2}{3} dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}(4x^3+3x^2)dx = 8$

확률 변수의 평균

- 결합확률분포의 기대값
  - 정의
    - X와 Y는 결합확률분포$f(x, y)$를 갖는 확률변수일 때, 확률변수 $g(X, Y)$의 기대값 $\mu_{g(X,Y)}$
      - 이산형: $\mu_{g(X,Y)} = E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y)$
      - 연속형: $\mu_{g(X,Y)} = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx\, dy$

확률 변수의 평균

- 예제 4.6
  - X와 Y는 아래 표와 같은 결합확률분포를 따르는 확률변수일 때, $g(X,Y) = XY$의 기대값
    - $E(XY) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyf(x,y) = (0)(0)f(0,0) + (0)(1)f(0,1)$
    - $+(1)(0)f(1,0) + (1)(1)f(1,1) + (2)(0)f(2,0) + (0)(2)f(0,2)$
    - $= f(1,1) = \frac{3}{14}$

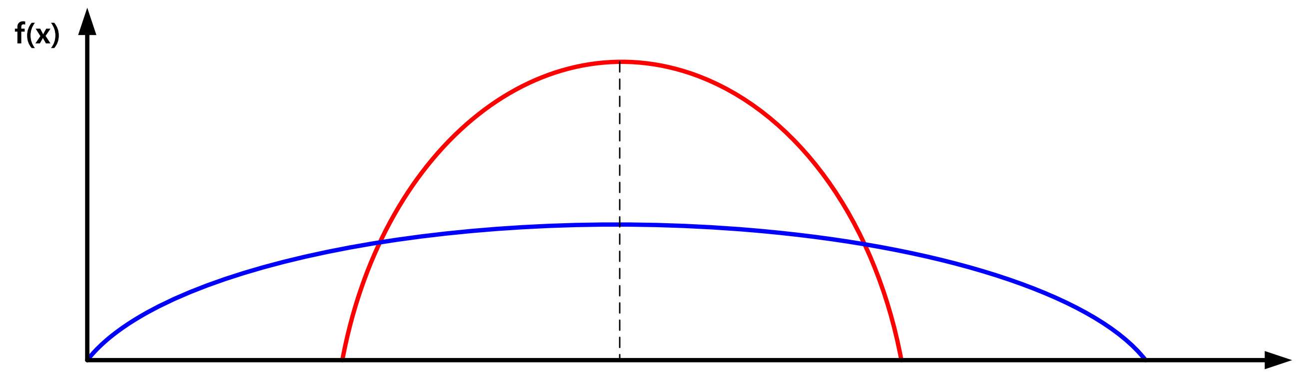
$f(x,y)$		x = 0	1	2	행의 합
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

확률 변수의 평균

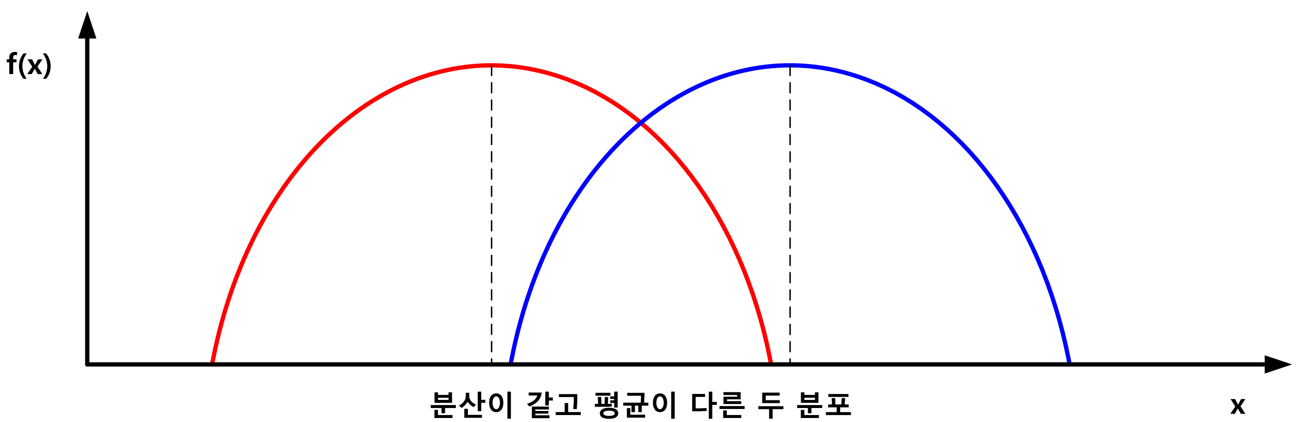
- 예제 4.7
  - 아래와 같은 결합밀도함수에 대해 $E(Y/X)$의 값
    - $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}, 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0, \text{다른 구간} \end{cases}$
    - $E\left(\frac{Y}{X}\right) = \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{y}{x} \times \frac{x\left(1+3y^2\right)}{4}\right) dx\ dy = \int_0^1 \frac{y+3y^3}{2} dy = \frac{5}{8}$

분산과 공분산

- 분산의 의미
  - 확률변수의 기대값은 확률분포의 중심위치를 의미한다면, 분산은 분포의 형태 즉, 산포(Variability)를 의미



평균이 같고 분산이 다른 두 분포



분산이 같고 평균이 다른 두 분포

분산과 공분산

- 분산의 정의
  - X를 확률분포 $f(x)$와 평균 μ를 갖는 확률변수일 때, X의 분산
    - 이산형: $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$
    - 연속형: $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx$
    - 분산(σ^2)의 양의 제곱근σ는 X의 표준편차(Standard Deviation)
      - $x-\mu$는 관측값의 평균으로부터의 편차(Deviation)이며, 위 식은 편차 제곱의 평균을 의미
      - 평균(μ)에 가까울 수록 분산의 값은 작음

분산과 공분산

- 분산의 정의
  - X를 확률분포 $f(x)$와 평균 μ를 갖는 확률변수일 때, X의 분산
    - 다음 식을 통해 분산의 값을 간단히 계산
      - $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$
    - 증명
      - $\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x)$
      - $= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x)$
      - $\mu = \sum_x x f(x)$이고, $\sum_x f(x) = 1$이므로
      - $\sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$

분산과 공분산

- 예제 4.9
  - 생산라인으로부터 3개의 부품을 추출하여 검사, 확률변수 X는 결함이 있는 부품의 수 이며, X의 확률분포가 아래 표를 따를 때, 분산(σ^2)은?

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.51	0.38	0.10	0.01

  - 평균 계산
    - $\mu = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (2)(0.10) + (3)(0.01) = 0.61$
  - $E(X^2)$계산
    - $E(X^2) = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (4)(0.10) + (9)(0.01) = 0.87$
  - $E[X^2] - \mu^2$계산
    - $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = 0.87 - (0.61)^2 = 0.4979$

분산과 공분산

- 예제 4.10
  - 연쇄점의 주당 콜라의 수요가 아래 확률분포 식을 따르는 확률변수 X일 때, X의 기대값과 분산
    - $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), 1 < x < 2 \\ 0, \text{다른 구간} \end{cases}$
    - $\mu = E(X) = 2\int_1^2 x(x-1)\,dx = \frac{5}{3}$ -> 기대값
    - $E(X^2) = 2\int_1^2 x^2(x-1)\,dx = \frac{17}{6}$
    - $\sigma^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$ -> 분산

분산과 공분산

- 확률 변수 X에 종속(관계)되는 확률변수 $g(X)$의 분산
  - 정의
    - X를 확률분포 $f(x)$를 갖는 확률변수일 때, 확률변수 $g(X)$의 분산
      - 이산형: $\sigma_{g(X)}^2 = E\left\{\left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \sum_x \left[g(x) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x)$
      - 연속형: $\sigma_{g(X)}^2 = E\left\{\left[g(X) - \mu_{g(X)}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x) - \mu_{g(X)}\right]^2 f(x)\, dx$

분산과 공분산

- 예제 4.11
  - 확률변수 X의 확률 분포가 아래 표를 따를 때, 확률변수 $g(X) = 2X + 3$의 분산

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

  - $\mu_{g(X)} = E(2X + 3) = \sum_{x=0}^{3}(2x + 3)f(x) = 6$
  - $\sigma_{g(X)}^2 = E\{[(2X + 3) - 6]^2\} = E[(2X - 3)^2]$
  - $E(4X^2 - 12X + 9) = \sum_{x=0}^{3}(4x^2 - 12x + 9)f(x) = 4$

분산과 공분산

- 예제 4.12
  - 확률변수 X는 예제 4.5의 확률밀도함수를 따를 때, $g(X) = 4X$ +3의 분산
    - $f(x)\begin{cases} \frac{x^2}{3}, -1 < x \\ 0, \text{다른 구간} \end{cases}, \mu_{4X+3} = 8$
    - $\sigma^2_{4X+3} = E\{[(4X+3) - 8]^2\} = E[(4X-5)^2]$
    - $= \int_{-1}^{2}(4x-5)^2\frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}(16x^4 - 40x^3 + 25x^2)\,dx = \frac{51}{5}$

분산과 공분산

- 공분산의 의미
  - 두 확률변수간 상관정도의 척도, 즉 결합확률분포의 분산도를 의미
    - $\mu_X = E(X), \mu_Y = E(Y)$일 때, $g(X,Y) = (X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$라고 하면, σ_{XY}또는 $Cov(X,Y)$는 공분산(Covariance)
    - 선형 관계만을 의미

분산과 공분산

- 공분산의 정의
  - X와Y는 결합확률분포$f(X,Y)$를 갖는 확률변수 일때,X와 y의 공분산
    - 이산형: $\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$
      $= \sum_x \sum_y (x-\mu_x)\left(y-\mu_y\right) f(x,y)$
    - 연속형: $\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$
      $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)\left(y-\mu_y\right) f(x,y)\, dx\, dy$

    - X값이 클 때, Y값도 크고, X값이 작을 때 Y값도 작다면 $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$의 값이 양의 값을 가질 것
    - X값이 클 때, Y값이 작고, X값이 작을 때 Y값이 크다면 $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$의 값이 음의 값을 가질 것
    - 통계적으로 독립이면, 공분산σ_{XY}의 값은 0

분산과 공분산

- 공분산의 정의
  - 공분산 공식
    - μ_X와μ_Y를 평균으로 하는 두 확률변수 X와 Y의 공분산
      - $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y$
      - $\mu_X = \sum_x xf(x,y)$, $\mu_Y = \sum_y yf(x,y)$ 와 $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$를 이용하여 증명

분산과 공분산

- 예제 4.13
  - 예제 3.14의 결합확률변수 X와 Y에 대한 공분산
    - $E(XY) = \frac{3}{14}$ (예제 4.6)
    - $\mu_X = \sum_{x=0}^{2} xg(x) = (0)\left(\frac{5}{14}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{3}{4}$
    - $\mu_Y = \sum_{y=0}^{2} yh(y) = (0)\left(\frac{15}{18}\right) + (1)\left(\frac{3}{7}\right) + (2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{2}$
    - $\mu_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y = \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{56}$

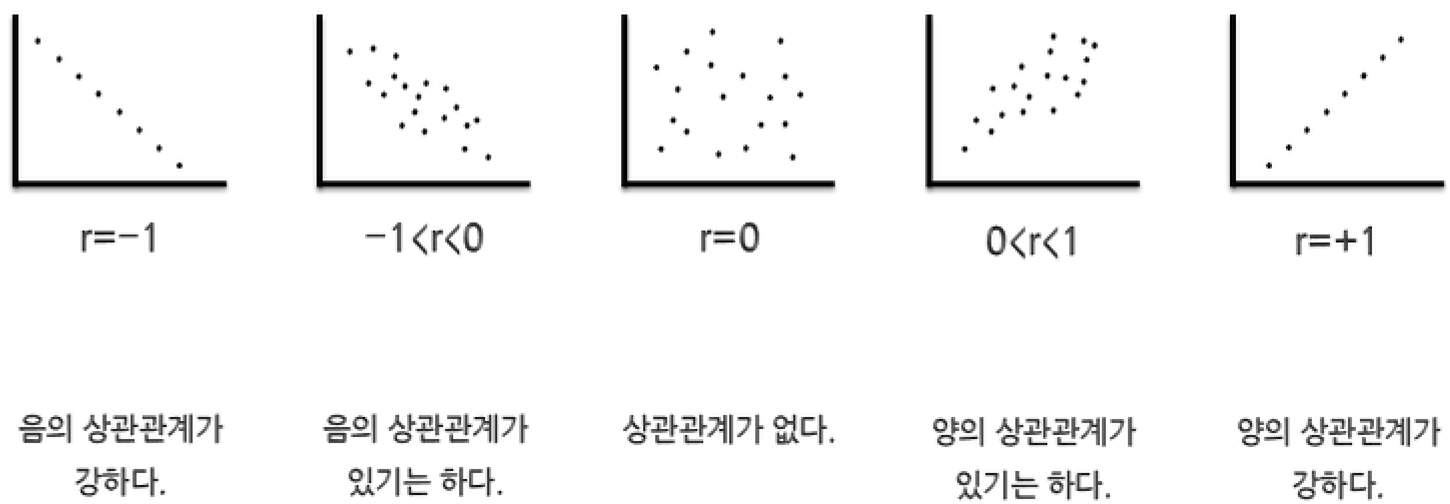
$\boldsymbol{f(x,y)}$		$\boldsymbol{x}$			$\boldsymbol{h(y)}$
		0	1	2	
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
$\boldsymbol{g(x)}$		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

분산과 공분산

- 예제 4.14
  - 마라톤코스를 완주한 남자의 비율X와 여자의 비율Y의 결합확률분포가 아래 식을 따를 때, X와 Y의 공분산
    - $f(x,y) = \begin{cases} 8xy, 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, \text{다른 구간} \end{cases}$
    - 주변밀도 함수와 μ_X, μ_Y
      - $g(x) = \begin{cases} 4x^3, 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{다른 구간} \end{cases}$, $\mathrm{h}(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2), 0 \le y \le 1 \\ 0, \text{다른 구간} \end{cases}$
      - $\mu_X = E(X) = \int_0^1 4x^4\,dx = \frac{4}{5}$, $\mu_Y = \int_0^1 4y^2(1-y^2)\,dy = \frac{8}{15}$
      - $E(XY) = \int_0^1 \int_y^1 8x^2y^2\,dx\,dy = \frac{4}{9}$
      - 따라서, $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y = \frac{4}{9} - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{4}{225}$

분산과 공분산

- 상관계수(Correlation Coefficient)의 의미
  - 공분산(σ_{XY})은 X와 Y의 측정단위에 따라 달라지며, 두 확률변수의 관련성의 강도를 나타내지 않음
  - 상관계수를 통해 측정단위와 무관하게 공분산과 같은 역할을 하는 척도로 사용



분산과 공분산

- 상관계수의 정의
  - 확률변수 X와 Y는 공분산이 σ_{XY}이고, 표준편차가 각 각 σ_X, σ_Y일 때, X와 Y의 상관계수(ρ_{XY})
    - $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
    - 공분산이 0이면 상관계수도 0
    - 비례하면 양수, 반비례하면 음수

분산과 공분산

- 예제 4.15
  - 예제 4.13에서 X와 Y의 상관 계수
    - 예제 4.13: $\mu_X = \frac{3}{4}, \mu_Y = \frac{1}{2}$
    - $E(X^2) = (0^2)\left(\frac{5}{14}\right) + (1^2)\left(\frac{15}{18}\right) + (2^2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{27}{28}$
    - $E(Y^2) = (0^2)\left(\frac{15}{28}\right) + (1^2)\left(\frac{3}{7}\right) + (2^2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{4}{7}$
    - $\sigma_X^2 = \frac{27}{28} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{112}, \sigma_Y^2 = \frac{4}{7} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{28}$
    - $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-\frac{9}{56}}{\sqrt{(\frac{45}{112})(\frac{9}{28})}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$f(x, y)$		x = 0	x = 1	x = 2	$h(y)$
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
$g(x)$		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

분산과 공분산

- 예제 4.16
  - 예제 4.14에서 X와 Y의 상관계수(ρ_{XY})
    - $f(x,y) = \begin{cases} 8xy, 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, \text{다른 구간} \end{cases}$, $\mu_X = \frac{4}{5}$, $\mu_Y = \frac{8}{15}$
    - $E(X^2) = \int_0^1 4x^5\, dx = \frac{2}{3}$, $E(Y^2) = \int_0^1 4y^3(1-y^2)\, dy = \frac{1}{3}$
    - $\sigma_X^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{75}$, $\sigma_Y^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225}$
    - $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{(\frac{2}{75})(\frac{11}{225})}} = \frac{4}{\sqrt{66}}$

선형 결합된 확률변수의 평균과 분산

- 확률변수의 기대값을 쉽게 계산하기 위한 정리
  - a와 b가 상수이면 $E(aX+b) = aE(X) + b$
    - 증명
      - $E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$
      - $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx = E(X)$, $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx = 1$
    - 따름정리
      - $a = 0$으로 두면, $E(b) = b$
      - $b = 0$으로 두면, $E(aX) = aE(X)$

선형 결합된 확률변수의 평균과 분산

- 확률변수의 기대값을 쉽게 계산하기 위한 정리
  - 두 개 이상의 확률변수 X의 함수의 합이나 차의 기대값은 각 함수의 기대값의 합이나 차와 동일
    - $E[g(X) \pm h(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)]$
    - 증명
      - $E[g(X) \pm h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty}[g(X) \pm h(X)]\,dx$
        $= \int_{-\infty}^{\infty} g(X)\,dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} h(X)\,dx = E[g(X)] \pm E[h(X)]$

선형 결합된 확률변수의 평균과 분산

- 확률변수의 기대값을 쉽게 계산하기 위한 정리
  - 확률변수 X와 Y의 함수의 합이나 차의 기대값은 각 함수의 기대값의 합이나 차와 동일
    - $E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = E[g(X,Y)] \pm E[h(X,Y)]$
    - 증명
      - $E[g(X,Y) \pm h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}[g(X,Y) \pm h(X,Y)]\,dx$
        $= \int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y)\,dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} h(X,Y)\,dx = E[g(X,Y)] \pm E[h(X,Y)]$
    - 따름 정리
      - $g(X,Y) = g(X)$이고, $h(X,Y) = h(Y)$이면
        -> $E[g(X) \pm h(Y)] = E[g(X)] \pm E[h(Y)]$
      - $g(X,Y) = X$이고, $h(X,Y) = Y$이면
        -> $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$

선형 결합된 확률변수의 평균과 분산

- 확률변수의 기대값을 쉽게 계산하기 위한 정리
  - 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립이면
    - $E(XY) = E(X)E(Y)$
    - 증명
      - $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy$
      - X와 Y의 주변분포를 각 각 $g(x), h(y)$라 하면, X와 Y는 독립이므로 $f(x,y) = g(x)h(y)$
      - $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyg(x)h(y)\,dx\,dy$
        $= \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)\,dx \times \int_{-\infty}^{\infty} yh(y)\,dy = E(X)E(Y)$
    - 따름 정리
      - 확률변수 X와 Y가 서로 독립이면 σ_{XY}(공분산) $= 0$

선형 결합된 확률변수의 평균과 분산

- 확률변수의 기대값을 쉽게 계산하기 위한 정리
  - X와 Y가 결합확률분포 $f(x,y)$를 갖는 확률변수, a, b, c는 상수
    - $\sigma^2_{aX+bY+c} = a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}$
    - 증명
      - $\sigma^2_{aX+bY+c} = E\{[(aX+bY+c) - \mu_{aX+bY+c}]^2\}$
      - $\mu_{aX+bY+c} = E(aX+bY+c) = aE(X) + bE(Y) + c = a\mu_X + b\mu_Y + c$
      - $\sigma^2_{aX+bY+c} = E\{[a(X-\mu_X) + b(Y-\mu_Y)]^2\}$

$$= a^2E[(X-\mu_X)^2] + b^2E[(Y-\mu_Y)^2] + 2abE[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$= a^2\sigma^2_X + b^2\sigma^2_Y + 2ab\sigma_{XY}$$

선형 결합된 확률변수의 평균과 분산

- 확률변수의 기대값을 쉽게 계산하기 위한 정리
  - X와 Y가 결합확률분포 $f(x, y)$를 갖는 확률변수, a, b, c는 상수
    - 따름정리
      - $b = 0$이면, $\sigma_{aX+c}^2 = a^2\sigma_X^2 = a^2\sigma^2$
      - $a = 1, b = 0$이면, $\sigma_{X+c}^2 = \sigma_X^2 = \sigma^2$
      - $b = 0, c = 0$이면, $\sigma_{aX}^2 = a^2\sigma_X^2 = a^2\sigma^2$

      - X와 Y가 독립인 확률변수이면, $\sigma_{aX \pm bY}^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$

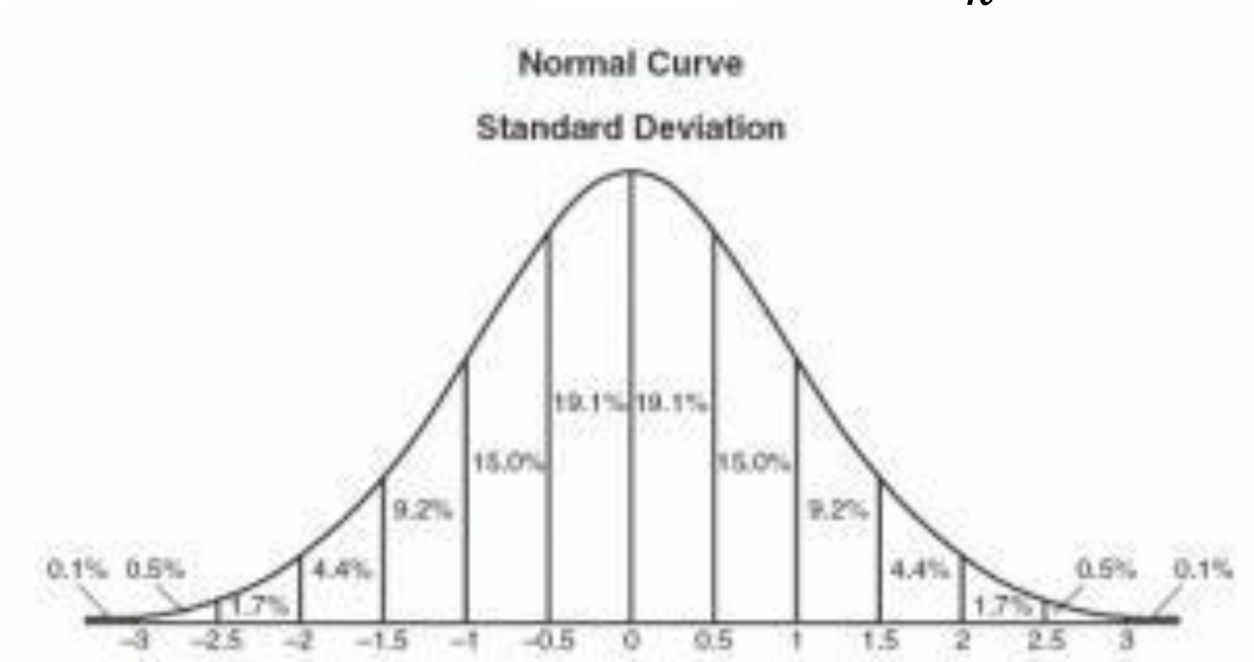
      - $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 독립인 확률변수 일 때,
        - $\sigma_{a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n}^2 = a_1^2\sigma_{X_1}^2 + a_2^2\sigma_{X_2}^2 + \cdots + a_n^2\sigma_{X_n}^2$

체비셰프 정리

- 개요
  - 러시아 수학자 체비셰프(Chebyshev)가 발견
  - 분산(σ^2)은 평균(μ)을 중심으로 관측값이 얼마나 변동하는지를 나타냄
  - 분산 또는 표준편차(σ)가 작으면 대부분의 값이 평균 근처에 밀집
  - 따라서, 확률변수가 평균을 중심으로 특정 구간내의 값을 나타낼 확률은 표준편차가 작을수록 큼

체비셰프 정리

- 체비셰프 정리
  - 확률변수 X가 평균으로부터 표준편차의 k배 범위 내의 값을 취할 확률은 평균을 중심으로 대칭일 때, 적어도 $1-\frac{1}{k^2}$이상
    - $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$



체비셰프 정리

- 예제 4.24
  - 확률변수 X의 평균 $\mu = 8$이고, 분산$\sigma^2 = 9$ 이며, 확률분포는 알려져 있지 않을 때
    - $A)\ P(-4 < X < 20)$
      - $P(-4 < X < 20) = P[8 - (4)(3) < X < 8 + (4)(3)] \geq \frac{15}{16}$
    - $B)\ P(|X - 8| \geq 6)$
      - $P(|X - 8| \geq 6) = 1 - P(|X - 8| < 6) = 1 - P(-6 < X - 8 < 6)$
      - $= 1 - P[8 - (2)(3) < X < 8 + (2)(3)] \leq \frac{1}{4}$

보충

- 연속형 확률분포의 누적분포 함수
  - 확률밀도함수가 f(x)인 연속형 확률변수 X의 누적분포함수 F(x)는 다음 조건을 만족
    - $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, $-\infty < x < \infty$
      - 치환(t)를 사용하는 이유:
    - $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
    - 미분이 가능하면(Differentiable), $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

보충

- 결합확률분포 조건부분포 테이블
  - 의미
    - 확률변수 X의 값 x는 표본공간의 부분집합이 되는 사상이며, 조건부 확률의 정의를 사용
      - $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$
    - A와 B를 각각 X=x, Y=y에 의해 정의되는 사상이며 이산형 일 때
      - $P(Y = y|X = x) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)} = \frac{f(x,y)}{g(x)}, g(x) > 0$

$\boldsymbol{f(x,y)}$		$\boldsymbol{x}$			$\boldsymbol{h(y)}$
		0	1	2	
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
$\boldsymbol{g(x)}$		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

감사합니다!