# 확률 및 통계학

## - 7장 확률변수의 함수 -

명 세인(sein@pel.smuc.ac.kr)

상명대학교 프로토콜공학연구실

# 목 차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

# 확률변수의 변수변환

- 의미
  - 확률변수를 변환하여 얻어낼 수 있는 함수의 분포
    - 둘 이상의 확률변수에 대한 확률분포를 표현 가능
  - $X$는 확률분포 $f(x)$인 이산형 확률변수이고, $X$와 $Y$사이에는 $Y = u(X)$인 1대 1 대응관계 ($w(y)$는 $y = u(x)$를 역변환)
    - $y = u(x)$이고, $x = w(y)$를 만족하는 $(x, y)$는 하나만 존재
  - 확률변수 X의 함수인 **새로운 확률변수** **Y**의 확률분포
    - $g(y) = P(Y = y) = P[X = w(y)] = f[w(y)]$

# 확률변수의 변수변환

- 정리 7.1
  - 조건
    - $X$는 확률분포가 $f(x)$인 이산형 확률변수
    - $X$와 $Y$사이는 $Y = u(X)$인 1대1 대응관계
  - $Y$의 확률분포
    - $g(y) = f[w(y)]$

# 확률변수의 변수변환

- 예제 7.1
  - $X$의 확률분포가 $f(x) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{x-1}, x = 1,2,3, \ldots$인 기하분포를 따를 때, $Y = X^2$의 확률분포
    - $X$가 가질 수 있는 값은 모두 양수이므로 $x$값과 $y$값 사이에는 1대 1 대응관계가 성립
    - 따라서, $y = x^2$을 x에 대해 풀면 $x = \sqrt{y}$ 가 되어
    - $g(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y}) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{\sqrt{y}-1}, y = 1,4,9, \ldots \\ 0, \text{구간 외} \end{cases}$

# 확률변수의 변수변환

- 정리 7.2
  - 의미
    - 결합확률분포인 이산형 확률변수에 대한 변수변환
    - $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$와 $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$로 정의되는 새로운 확률변수 $Y_1, Y_2$의 결합확률분포
  - 조건
    - $X_1$과 $X_2$는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$인 **이산형** 확률변수
    - $(x_1, x_2)$와 $(y_1, y_2)$는 서로 1대 1 대응하여 식 $y_1 = u_1(x_1, x_2)$와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$를 $x_1$과 $x_2$에 대하여 풀면 유일하게, $x_1 = w_1(y_1, y_2)$와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$ 성립
  - 식 - $Y_1, Y_2$의 결합확률분포
    - $g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]$

# 확률변수의 변수변환

- 예제 7.2
  - $X_1, X_2$는 각각 $\mu_1, \mu_2$의 모수를 가지는 포아송분포를 따르는 확률변수이며, 서로 독립일 때,
    새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$의 확률분포
    - $X_1$과$X_2$가 서로 독립이므로, (단, $x_1 = 0,1,2,\ldots, x_2 = 0,1,2,\ldots$)
      - $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2) = \frac{e^{-u_1} u_1^{x_1}}{x_1!} \frac{e^{-u_2} u_2^{x_2}}{x_2!} = \frac{e^{-(u_1+u_2)} u_1^{x_1} u_2^{x_2}}{x_1! x_2!}$
    - 두 번째 확률변수 $Y_2 = X_2$로 두고, $Y_1, Y_2$을 역변환 하면, $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_2$가 되어 정리를 이용 $Y_1, Y_2$의 결합확률 분포는
      - $g(y_1, y_2) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)} \mu_1^{y_1-y_2} \mu_2^{y_2}}{(y_1-y_2)! y_2!}$, (단, $y_1 = 0,1,2,\ldots, y_2 = 0,1,2,\ldots, y_1$)

# 확률변수의 변수변환

- 예제 7.2
  - $X_1, X_2$는 각각 $u_1, u_2$의 모수를 갖는 포아송분포를 따르는 확률변수이며, 서로 독립일 때,
    새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$의 확률분포
    - $x_1 > 0$이므로 $x_1 = y_1 - x_2$로 부터 $x_2$즉, $y_2$는 $y_1$보다 작거나 같게 되며, $Y_1$에 대한 주변확률분포를 구하면
      - $h(y_1) = \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!y_2!}$

        $= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{y_2!(y_1-y_2)!} \mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}$

        $= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} \mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}$

# 확률변수의 변수변환

- 예제 7.2
  - $X_1, X_2$는 각각 $u_1, u_2$의 모수를 갖는 포아송분포를 따르는 확률변수이며, 서로 독립일 때,
    새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$의 확률분포
    - 합의 값은$(\mu_1 + \mu_2)^{y_1}$의 이항전개와 같으므로, 결과 식은
      - $\frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}(\mu_1+\mu_2)^{y_1}}{y_1!}, y_1 = 0,1,2, \ldots$

    - 따라서 모수가 $u_1, u_2$인 포아송분포를 따르는 서로 독립인 확률변수의 합은 $(u_1 + u_2)$의 모수를 갖는 포아송분포를 따름

# 확률변수의 변수변환

- 정리 7.3
  - 의미
    - **연속형** 확률변수에 대한 변수변환
    - $X$가 **연속형** 확률변수일 때, 새로운 확률변수 $Y = u(X)$
  - 조건
    - $X$는 $f(x)$인 **연속형** 확률변수
    - $X$와 $Y$는 $Y = u(X)$인 1대 1 대응관계가 성립
      - 관계식 $y = u(x)$를 $x$에 대하여 풀면, 유일하게 $x = w(y)$
  - 식
    - $g(y) = f[w(y)]|\mathrm{J}|$
    - $\mathrm{J} = w'(y)$이며, 야코비안(Jacobian)이라고 부름

# 확률변수의 변수변환

- 정리 7.3
  - 증명
    - $y = u(x)$가 증가함수 이면, $Y$가 $a$와 $b$사이에 올 때 확률변수 $X$는 $w(a)$와 $w(b)$사이에 와야 하므로, $Y$가 $a$와$b$ 사이에 속할 확률은
      - $P(a < Y < b) = P[w(a) < X < w(b)] = \int_{w(a)}^{w(b)} f(x)\,dx$
    - 적분변수 $x$를 $y$로 변환하려면, $x = w(y)$의 관계로부터 $dx = w'(y)dy$를 얻게 되고, 적분 식에 대입하면
      - $P(a < Y < b) = \int_a^b f[w(y)]w'(y)dy$
    - $Y$의 확률분포 $g(y)$ 는
      - $g(y) = f[w(y)]w'(y) = f[w(y)]$J
      - J=$w'(y)$는 증가함수 $y = u(x)$의 접선의 기울기 역수

# 확률변수의 변수변환

- 예제 7.3
  - $X$가 연속형 확률변수이고, 확률분포 $f(x)$가 다음과 같을 때, 확률변수 $Y = 2X - 3$의 확률분포
    - $f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x}, 1 < x < 5 \\ 0, \text{구간 외} \end{cases}$
    - $y = 2x - 3$을 $x$에 대해 풀면 $x = \frac{y+3}{2}$가 되고, J $= w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$이며, 정리를 이용하여
      - $g(y) = \begin{cases} \frac{(y+3)/2}{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{y+3}{48}, -1 < y < 7 \\ 0, \text{구간 외} \end{cases}$

# 확률변수의 변수변환

- 정리 7.4
  - 조건
    - $X_1, X_1$는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$인 연속형 확률변수
    - $(x_1, x_2)$와 $(y_1, y_2)$는 서로 1대 1 대응
      - $y_1 = u_1(x_1, x_2)$와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$를 $x_1$과 $x_2$에 대하여 풀면, 유일하게 $x_1 = w_1(y_1, y_2)$와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$ 성립
  - 식
    - $g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]|J|$
    - J은 $2 \times 2$ 행렬 식
      - J= $\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$

# 확률변수의 변수변환

- 예제 7.4
  - $X_1, X_2$는 연속형 확률변수이고, 결합확률분포가 다음과 같을 때, $Y_1 = X_1^2, Y_2 = X_1 X_2$의 결합확률분포
    - $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1 x_2, 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0, \text{구간 외} \end{cases}$
    - $y_1 = x_1^2, y_2 = x_1 x_2$을 각각 $x_1, x_2$에 대해 풀면, $x_1 = \sqrt{y_1}, x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1}}$ 이므로,
      - $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ \frac{-y_2}{2y_1^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{\sqrt{y_1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1}$

# 확률변수의 변수변환

- 예제 7.4
  - $X_1, X_2$는 연속형 확률변수이고, 결합확률분포가 다음과 같을 때, $Y_1 = X_1^2, Y_2 = X_1X_2$의 결합확률분포
    - $x_1x_2$평면에서 정의된 점의 집합 $A$와 대응된 $y_1y_2$평면에서 정의된 점의 집합 $B$를 구하기 위해,
      $x_1 = 0, x_2 = 0$ 과 $x_1 = 1, x_2 = 1$ 로 놓으면,
      $y_1 = 0, y_2 = 0$ 과 $y_1 = 1, y_2 = \sqrt{y_1}$ 또는, $y_2^2 = y_1$이므로,
      1대 1 대응
      - $A = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$
      - $B = \{(y_1, y_2) | y_2^2 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1\}$
    - 정리를 이용한 $Y_1, Y_2$의 결합확률분포
      - $g(y_1, y_2) = 4(\sqrt{y_1}) \frac{y_2}{\sqrt{y_1}} \frac{1}{2y_1} = \begin{cases} \frac{2y_2}{y_1}, y_2^2 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1 \\ 0, \text{구간 외} \end{cases}$

# 확률변수의 변수변환

- 정리 7.5
  - 1대 1 대응관계를 만족하지 못하는 확률변수함수에 대해, 1대 1 대응관계를 갖는 상호 배반인 영역으로 분할 가능한 경우의 확률변수함수의 확률분포

  - 조건
    - $X$는 확률분포 $f(x)$를 갖는 연속형 확률변수
    - $Y = u(X)$로 변수 변환을 할 때, X와 Y가 1대 1 대응 관계를 만족하지 못함
    - $y = u(x)$와 $k$개의 역함수 $x_1 = w_1(y), x_2 = w_2(y), \dots, x_k = w_k(y)$가 각각 1대 1 대응관계를 가지도록 $X$의 영역을 $k$개의 상호 배반인 영역으로 분할 가능

# 확률변수의 변수변환

- 정리 7.5
  - 식 - $Y$의 확률분포
    - $g(y) = \sum_{i=1}^{k} f[w_i(y)]|J_i|$
    - 단, $J_i = w_i'(y), i = 1,2, \dots, k$

# 확률변수의 변수변환

- 예제 7.5
  - $X$가 평균이 $\mu$, 분산이$\sigma^2$인 정규분포를 따를 때, $Y = (X-\mu)^2/\sigma^2$ 은 자유도 1인 카이제곱분포임을 증명
    - $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$로 두면, $Z$는 표준정규분포를 따르므로,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}, -\infty < z < \infty$$

    - $Y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$이 되므로 $y = z^2$을 $z$에 대해 풀면 $z = \pm\sqrt{y}$이고, $z_1, z_2$가 각각 $z_1 = -\sqrt{y}, z_2 = \sqrt{y}$ 이면, $J_1 = -\frac{1}{2\sqrt{y}}, J_2 = \frac{1}{2\sqrt{y}}$이므로,

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, y > 0$$

# 확률변수의 변수변환

- 예제 7.5
  - $X$가 평균이 $\mu$, 분산이$\sigma^2$인 정규분포를 따를 때, $Y = (X-\mu)^2/\sigma^2$ 은 자유도 1인 카이제곱분포임을 증명
    - $g(y)$는 확률밀도함수 이므로

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}\,dy = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,dy = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

    - 적분 값은 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$ 인 감마분포의 면적이며, $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로, $Y$의 확률분포는 자유도 1인 카이제곱분포

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, y > 0 \\ 0, \text{구간 외} \end{cases}$$

# 적률과 적률생성함수

- 의미
  - 적률생성함수(Moment Generating Function)은 적률(Moment)를 구하기 위한 함수
    - 궁극적 목표는 확률변수함수의 분포를 구함

- 적률 정의
  - 확률변수 $X$의 **원점에 대한 $\boldsymbol{r}$차**($r$th Moment About the Origin) 적률 $\mu_r'$
    - $\mu_r' = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x), X\text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx, X\text{가 연속형인 경우} \end{cases}$

# 적률과 적률생성함수

- 적률 생성함수 정의
  - 확률변수 $X$의 적률생성함수 $E(e^{tX})$를 $M_X(t)$로 표기하면,
    - $M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x), & X\text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx, & X\text{가 연속형인 경우} \end{cases}$

- 정리 7.6
  - 확률변수 $X$의 적률생성함수를 $M_X(t)$라 하면
    - $\left. \frac{d^r M_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = \mu_r'$

# 적률과 적률생성함수

- 예제 7.6
  - 확률변수 $X$가 이항분포를 따를 때 $X$의 적률생성함수를 구하고, 이를 이용하여 $\mu = np, \sigma^2 = npq$가 됨을 증명
    - 정의로부터,
      - $M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}$
    - 이항전개식 $(pe^t + q)^n$ 을 이용
      - $\frac{dM_X(t)}{dt} = n(pe^t + q)^{n-1}pe^t$
    - 그리고
      - $\frac{d^2M_X(t)}{dt^2} = np[e^t(n-1)(pe^t + q)^{n-2}pe^t + (pe^t + q)^{n-1}e^t]$

# 적률과 적률생성함수

- 예제 7.6
  - 확률변수 $X$가 이항분포를 따를 때 $X$의 적률생성함수를 구하고, 이를 이용하여 $\mu = np, \sigma^2 = npq$가 됨을 증명
    - 미분된 두 식에 $t = 0$을 대입하면
      - $\mu_1' = np, \mu_2' = np[(n-1)p+1]$
    - 따라서
      - $\mu = \mu_1' = np$
      - $\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2 = np(1-p) = npq$

# 적률과 적률생성함수

- 예제 7.7
  - 확률변수 $X$가 평균이 $\mu$, 분산이 $\sigma^2$인 정규분포를 따를 때, $X$의 적률생성함수는 $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$임을 유도
    - 정의로부터,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

    - $x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2 = [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$로 두면,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right\} dx$$

# 적률과 적률생성함수

- 예제 7.7
  - 확률변수 $X$가 평균이 $\mu$, 분산이 $\sigma^2$인 정규분포를 따를 때, $X$의 적률생성함수는 $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$임을 유도
    - $x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2 = [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$로 두면,

$$= \exp\left(\frac{2\mu t + \sigma^2 t^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{[x-(\mu+t\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\}dx$$

    - 여기서 $w = \frac{[x-(\mu+t\sigma^2)]}{\sigma}$로 치환하면, $dx = \sigma dw$이므로

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-w^2}dw$$

# 적률과 적률생성함수

- 예제 7.7
  - 확률변수 $X$가 평균이 $\mu$, 분산이 $\sigma^2$인 정규분포를 따를 때, $X$의 적률생성함수는 $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$임을 유도
    - 적분 부분이 표준정규분포의 면적으로 1값이 됨 따라서,

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

# 적률과 적률생성함수

- 정리 7.7 – 유일성 정리
  - 두 확률변수 $X$와 $Y$의 적률생성함수가 각각 $M_X(t), M_Y(t)$일 때, 모든 $t$값에 대해 $M_X(t) = M_Y(t)$이면 $X$와 $Y$는 같은 확률분포

- 정리 7.8
  - $M_{X+a}(t), = e^{at} M_X(t)$

- 정리 7.9
  - $M_{aX}(t) = M_X(at)$

# 적률과 적률생성함수

- 정리 7.10
  - 확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$이 서로 독립이며, 각각의 적률생성함수가 $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots, M_{X_n}(t)$이고, $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$이면, $Y$의 적률생성함수는 $M_Y(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2} \dots M_{X_n}(t)$

# 감사합니다!