확률 및 통계학

- 2장 확률 (Probability) -

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)
세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

표본공간(Sample Space)

- 정의
  - 통계적 실험에서 발생가능한 모든 결과들의 집합(S)
    - $S = \{표본점1, 표본점2\}$
- 특징
  - 표본공간 결과는 원소(Element or Member) 또는 표본점 (Sample Point)
  - 원소가 유한한 경우, 중괄호 속에 각 원소 나열 가능
    - e.g., 동전 던지기($S = \{H, T\}$)
  - 표본공간 결과 설명 시 하나 이상의 표본공간 사용 가능
    - 결과로 가장 많은 정보를 포함하는 표본공간을 사용해야 함

표본공간(Sample Space)

- 예제

1. 한 개의 주사위를 던져서 윗면에 나타난 숫자만 측정하는 경우의 표본공간(S_1)
   - $S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$

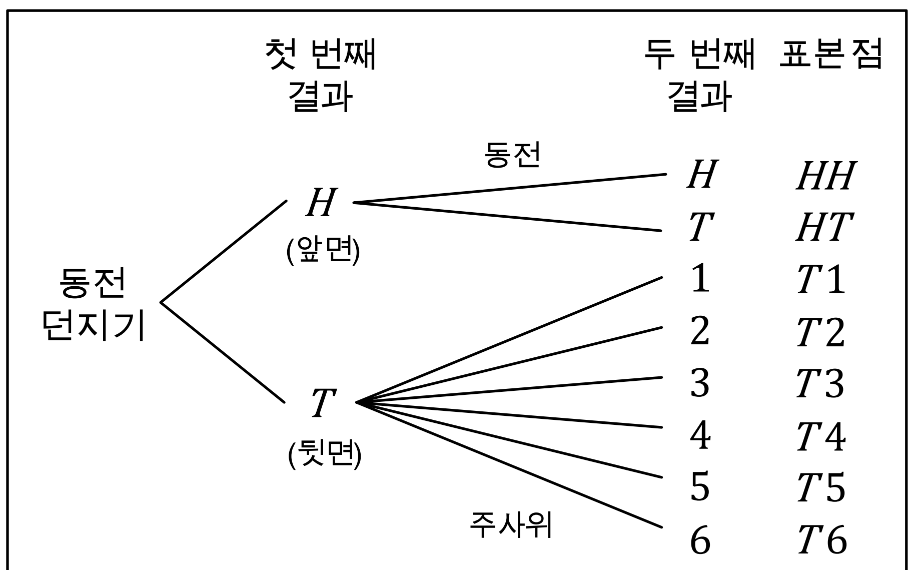
2. 한 개의 주사위를 던져서 윗면에 나타난 숫자의 짝수 또는 홀수 여부만 측정하는 경우의 표본공간(S_2)
   - $S_2 = \{짝수, 홀수\}$

표본공간(Sample Space)

- 수형도(Tree Diagram)
  - 정의
    - 표본공간에서 트리 형태로 원소를 나열한 도표
  - 특징
    - 특정 사상이 일어나는 모든 경우를 시각적으로 표현 가능

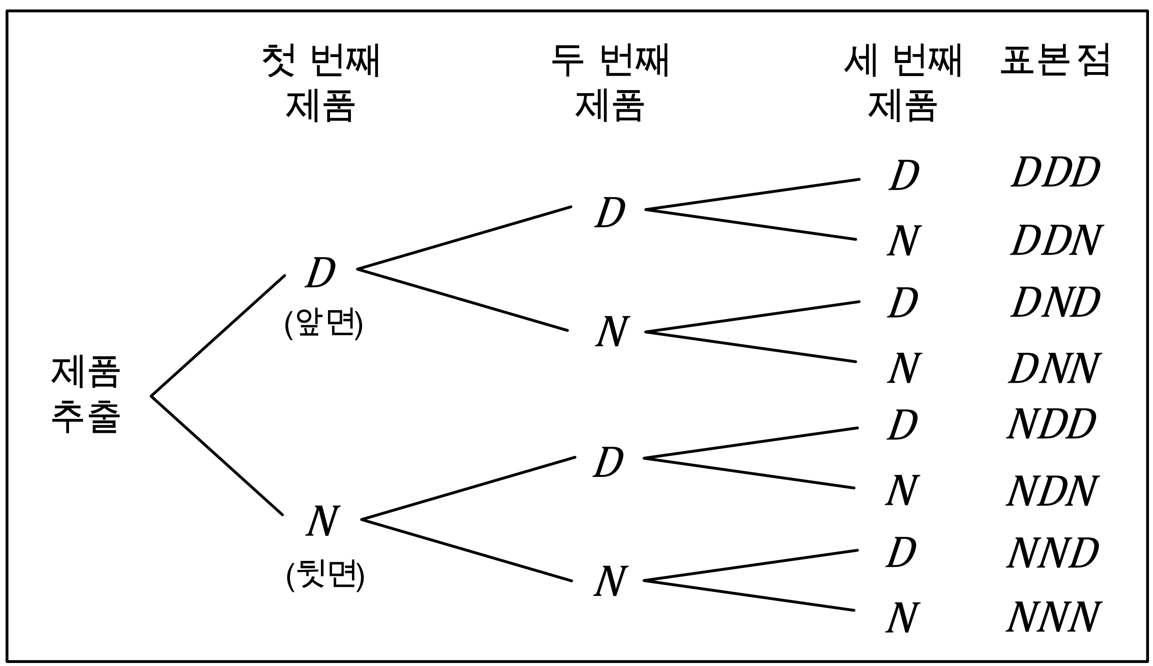
표본공간(Sample Space)

- 수형도(Tree Diagram)
  - 예제(1/3)
    1. 한 개의 동전을 던져 앞면이 나온 경우 동전을 다시 던지고, 뒷면이 나온 경우 한 개의 주사위를 던지는 실험의 표본공간(S)
       - 동전 앞면 (H) → 동전 (H, T)
       - 동전 뒷면 (T) → 주사위 $(1\sim6)$
       - $S = \{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$



표본공간(Sample Space)

- 수형도(Tree Diagram)
  - 예제(2/3)
    2. 임의로 추출한 세 개의 제품 중 불량품(D)과 양품(N)을 분류하는 실험의 표본공간(S)
       - $S = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$



표본공간(Sample Space)

- 수형도(Tree Diagram)
  - 예제(3/3)
    3. 전세계 인구가 백만이 넘는 도시들의 집합(S)
       - $S = \{x \mid x$는 인구 백만이 넘는 도시$\}$
    4. 반지름이 2인 원의 원주상과 내부에 있는 모든 점(x, y)의 집합(S)
       - $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$
    5. 제품 3개 중 불량품(D)이 발견될 때까지 표본(S) 추출
       - $S = \{D, ND, NND, NNND, \dots\}$

목 차

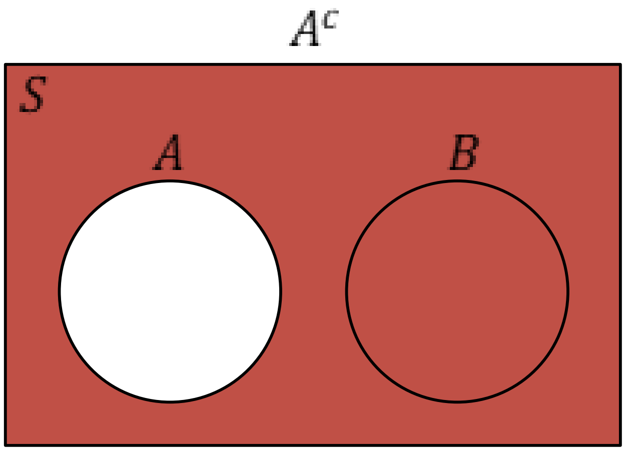
- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

사상(Events)

- 정의
  - 표본공간의 부분집합
- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(1/5)
  - 공집합(Empty Set): ∅
    - 표본공간 S 중 하나의 원소도 포함하고 있지 않은 상태
  - 예제
    1. 생물학 실험에서 육안으로 미생물을 감지할 사상(A)
       - $A = \emptyset$
    2. 7의 인수 중 짝수를 포함하는 사상(A)
       - $S = \{1, 7\}, A = \emptyset$

사상(Events)

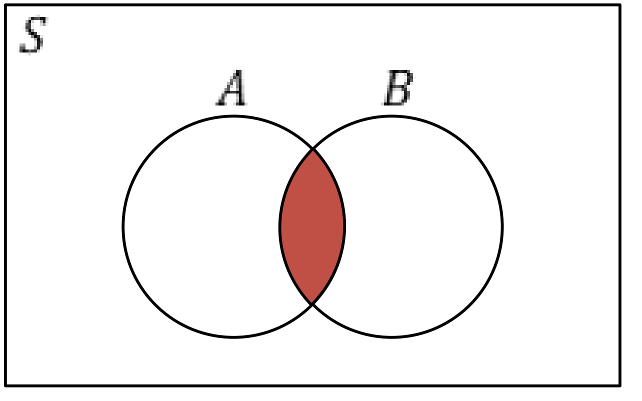
- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(2/5)
  - 여집합(Complement): A^c
    - 표본공간 S에 대한 하나의 사상인 A의 원소가 아닌 S의 모든 원소들에 대한 사상
  - 예제
    1. 카드 52장에서 검은색 카드만 뽑힐 경우
       - 조건: $R = \{$붉은색 카드 뽑힐 사상$\}$, $S = \{$붉은색/검은색 카드$\}$
       - R^c
    2. $S = \{$책, 휴대폰, $mp3$, 신문, 문구, 노트북$\}$이고, $A = \{$책, 문구, 노트북, 신문$\}$인 경우
       - $A^c = \{$휴대폰, $mp3\}$



사상(Events)

- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(3/5)
  - 교집합(Intersection): $A \cap B$
    - 두 사상 A와 B에 공통으로 속하는 모든 원소들에 대한 사상
  - 예제
    1. 교실에서 임의로 뽑은 한 학생이 여공학도인 경우
       - 조건: 학생의 전공이 공학인 사상(E), 학생이 여자인 사상(F)
       - $E \cap F$
    2. $V = \{a, e, i, o, u\}$이고, $C = \{l, r, s, t\}$인 경우
       - $V \cap C = \emptyset$

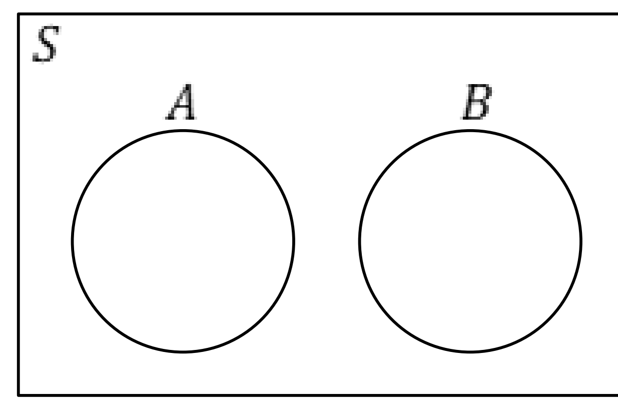
$A \cap B$



사상(Events)

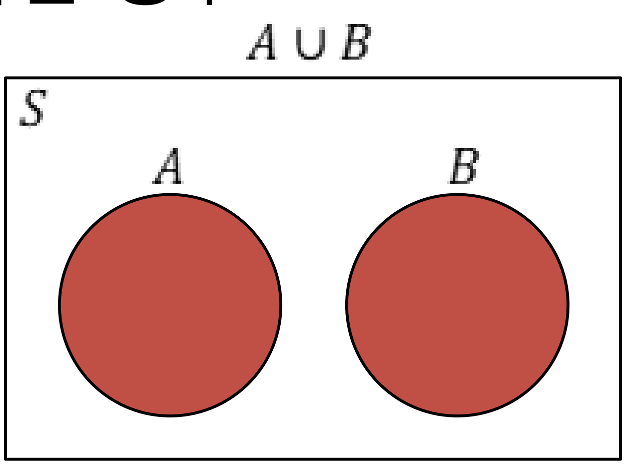
- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(4/5)
  - 상호배반(Mutually exclusive 또는 Disjoint): $A \cap B = \emptyset$
    - 두 사상 A와 B가 공통된 원소를 갖지 않는 상태
  - 예제
    1. 8개의 채널을 사용하는 회사의 채널 중 3개는 ABC, 2개는 NBC, 1개는 CBS와 가맹을 맺고, 나머지 2개는 교육방송용과 ESPN 스포츠중계용인 경우
       - 조건: 프로그램이 NBC 방송망에 속한 사상(A), CBS 방송망에 속한 사상(B)
       - A와 B는 공통 사상을 가질 수 없는 상호 배반임

$A \cap B = \emptyset$



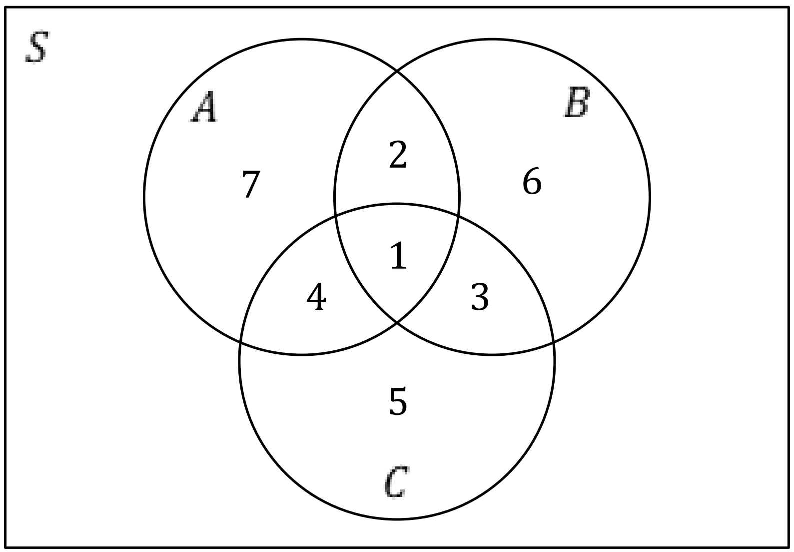
사상(Events)

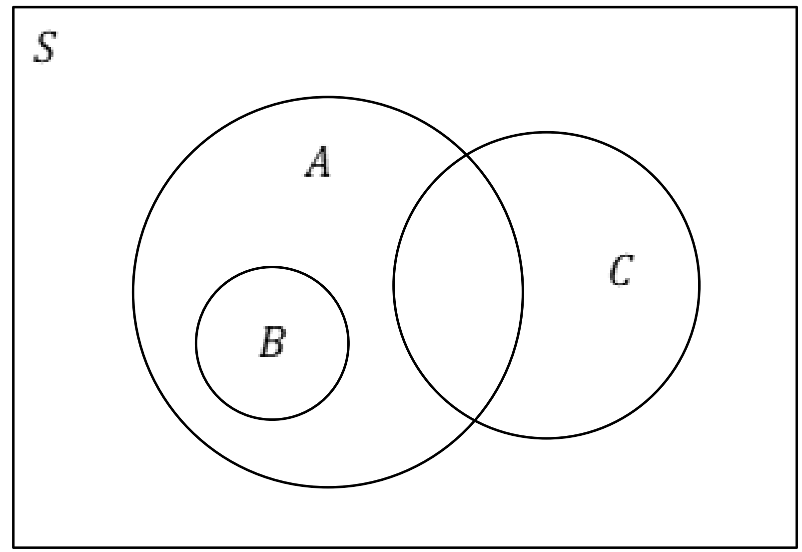
- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(5/5)
  - 합집합(Union): $A \cup B$
    - 두 사상 A와 B에 속하는 모든 원소들을 포함하는 사상
  - 예제
    1. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$인 경우
       - $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
    2. 석유회사에서 흡연과 음주를 모두하는 경우
       - 조건: 한 직원이 흡연가일 사상(P), 그 사람이 음주가일 사상(Q)
       - $P \cup Q$
    3. $M = \{x|3 < x < 9\}$, $N = \{y|5 < y < 12\}$인 경우
       - $M \cup N = \{z|3 < z < 12\}$



사상(Events)

- 표본공간과 사상의 관계





- S: 표본공간
- $A \cap B$=영역 1, 2
- $B \cap C$=영역 1, 3
- $A \cup C$=영역 1, 2, 3, 4, 5, 7
- $B^c \cap A$=영역 4, 7
- $A \cap B \cap C$=영역 1
- $(A \cup B) \cap C^c$=영역 2, 6, 7

- S: 표본공간
- $A \cup B = A$
- $B \cap C = \emptyset$

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

경우의 수(Number of Cases)

- 정의
  - 특정 사상(Events)이 일어날 모든 경우를 숫자로 표현한 것
- 계산 방법(1/2)
  - 합의 법칙
    - 두 사상 A와 B가 동시에 일어나지 않는 경우
    - 경우의 수: $A + B$
    - 예제
      1. 선택 가능한 메뉴의 경우의 수
         - 맥도날드 메뉴(n_1): 불고기버거, 치킨버거
         - 김밥천국 메뉴(n_2): 제육볶음, 라볶이, 라면
         - 따라서, 경우의 수는 $n_1 n_2 = 2 + 3 = 5$가지

경우의 수(Number of Cases)

- 계산 방법(2/2)
  - 곱의 법칙
    - 두 사상 A와 B가 동시에 일어날 경우
    - 경우의 수: $A \times B$

    - 예제(1/3)
      1. 한 쌍의 주사위를 한 번 던지는 경우의 수
         - 첫 번째 주사위(n_1): 1, 2, 3, 4, 5, 6
         - 두 번째 주사위(n_2): 1, 2, 3, 4, 5, 6
         - 따라서, 경우의 수는 $n_1 n_2 = 6 \times 6 = 36$가지
      2. 구입 가능한 주택의 경우의 수
         - 주택의 외양(n_1): 튜더 양식, 전원풍 양식, 식민지 양식, 전통적인 양식
         - 층의 구조(n_2): 단층 구조, 단순한 2층 구조, 중간 2층 구조
         - 따라서, 경우의 수는 $n_1 n_2 = 4 \times 3 = 12$가지

경우의 수(Number of Cases)

- 계산 방법(2/2)
  - 곱의 법칙
    - 예제(2/3)

3. 22명의 클럽 회원 중 회장과 총무를 선임할 수 있는 경우의 수
   - 회장 자리에 가능한 가짓수(n_1): 22가지
   - 총무 자리에 가능한 가짓수(n_2): 21가지
   - 따라서, 경우의 수는 $n_1 n_2 = 22 \times 21 = 462$가지

4. 휴대폰을 구매할 수 있는 경우의 수
   - 브랜드(n_1): 삼성, 애플
   - 선택사양(n_2): 기본, 고급, 카메라 강화
   - 색상(n_3): 흰색, 검정색, 파란색, 빨간색
   - 따라서, 경우의 수는 $n_1 n_2 n_3 = 2 \times 3 \times 4 = 24$가지

경우의 수(Number of Cases)

- 계산 방법(2/2)
  - 곱의 법칙
    - 예제(3/3)

5. 컴퓨터 부품을 주문할 수 있는 경우의 수
   - CPU 회사(n_1): 2개
   - 하드 디스크 회사(n_2): 4개
   - 메모리 회사(n_3): 3개
   - 액세서리 회사(n_4): 5개
   - 따라서, 경우의 수는 $n_1 n_2 n_3 n_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$가지

6. 0, 1, 2, 5, 6, 9를 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 4자리 짝수에 대한 경우의 수
   - 일의 자리(n_1), 십의 자리(n_2), 백의 자리(n_3), 천의 자리(n_4)

   1) 일의 자리가 0인 경우
      - 따라서, 경우의 수는 $n_1 n_2 n_3 n_4 = 1 \times 3 \times 4 \times 5 = 60$가지

   2) 일의 자리가 0이 아닌 경우
      - 따라서, 경우의 수는 $n_1 n_2 n_3 n_4 = 2 \times 3 \times 4 \times 4 = 96$가지

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 정의
    - 서로 다른 n개의 원소 중 r개를 선택하여 특정한 순서로 나열하는 경우의 수
  - 표현
    - ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
  - 종류(1/2)
    - 팩토리얼(Factorial)
      - $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$
        - 서로 다른 n개의 원소를 나열하는 경우의 순열
        - $n = 0$의 경우, $0! = 1$로 정의됨

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 종류(2/2)
    - 원순열(Circular permutation)
      - $(n-1)! = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$
        - 서로 다른 n개의 원소를 원형으로 나열하는 경우의 순열
        - 원형으로 나열하므로 n가지의 동일한 경우가 존재함
    - 같은 것이 있는 순열
      - $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$
        - 서로 다른 n개의 원소를 k개의 종류로 구분하여 나열하는 경우의 순열
        - e.g., a, b, c, d의 순열 $= 4! = 24$, a, a, b, b의 순열 $= \frac{4!}{2!2!} = 6$
      - 예제
        1. 축구선수 10명을 일렬로 세우기 위한 경우의 수
           - 조건: 1학년 1명, 2학년 2명, 3학년 4명, 4학년 3명
           - 따라서, $\frac{10!}{1!2!4!3!} = 12{,}600$가지임

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 예제(1/3)
    1. 3개의 영문자(a,b,c)를 나열하는 경우의 수
       - 첫 번째로 올 수 있는 문자(n_1): 3개
       - 두 번째로 올 수 있는 문자(n_2): 2개
       - 세 번째로 올 수 있는 문자(n_3): 1개
       - 따라서, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$가지임
    2. 대학원생 25명을 대상으로 한 사람당 최대 한 개의 상을 수여하는 경우의 수
       - 조건: 세 가지 상(연구, 교육, 봉사)
       - 따라서, ${}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25 \times 24 \times 23 = 13{,}800$가지임

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 예제(2/3)

3. 학생이 50명인 동아리에서 회장과 총무를 선출하는 경우의 수
   1) 선출방법에 제한이 없는 경우
      - ${}_{50}P_2 = \frac{50!}{48!} = 50 \times 49 = 2{,}450$가지임
   2) 학생A는 회장만 하고 싶어하는 경우
      - A가 회장이 되는 경우: 49가지
      - A가 회장이 되지 않는 경우: ${}_{49}P_2 = \frac{49!}{47!} = 49 \times 48 = 2{,}352$가지
      - 따라서, $49 + 2{,}352 = 2{,}401$가지임
   3) 학생B와 학생C는 회장과 총무를 같이 하고 싶어하는 경우
      - B와 C를 회장과 총무로 선출하는 경우: 2가지
      - B와 C를 회장과 총무로 선출하지 않는 경우: ${}_{48}P_2 = \frac{48!}{46!} = 48 \times 47 = 2{,}256$가지
      - 따라서, $2 + 2{,}256 = 2{,}258$가지임

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 예제(3/3)
    3. 학생이 50명인 동아리에서 회장과 총무를 선출하는 경우의 수
       4) 학생D와 학생E는 서로 같이 하고 싶지 않아 하는 경우
          - D가 선출되고, E는 선출되지 않는 경우: $2 \times 48 = 96$가지
          - E가 선출되고, D가 선출되지 않는 경우: $2 \times 48 = 96$가지
          - D와 E 모두 선출되지 않는 경우: ${}_{48}P_2 = \frac{48!}{46!} = 48 \times 47 = 2{,}256$가지
          - 따라서, $96 + 96 + 2{,}256 = 2{,}448$가지임

경우의 수(Number of Cases)

- 분할(Partition)
  - 정의
    - 서로 다른 n개의 원소를 r개의 부분집합으로 구분하여 나열하는 경우의 순열
  - 표현
    - $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$
  - 예제(1/2)
    1. 집합 $\{a, e, i, o, u\}$를 4개와 1개의 원소로 분할할 경우의 수
       - $\{(a, e, i, o), (u)\}, \{(a, e, i, u), (o)\}, \{(a, e, o, u), (i)\}, \{(a, i, o, u), (e)\}, \{(e, i, o, u), (a)\}$
       - 따라서, $\binom{5}{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$가지임

경우의 수(Number of Cases)

- 분할(Partition)
  - 예제(2/2)

2. 대학원생 7명을 3인용 객실 1개와 2인용 객실 2개에 투숙시키는 경우의 수
   - $\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$가지임

3. S, T, A, T, I, S, T, I, C, S로 만들 수 있는 문자열 경우의 수
   - S와 T가 3번씩, I가 2번, A와 C가 1번씩 나타남
   - 따라서, $\binom{10}{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3!3!2!1!1!} = 50{,}400$가지임

경우의 수(Number of Cases)

- 조합(Combination)
  - 정의
    - 서로 다른 n개의 원소 중 r개를 선택하여 순서 구분 없이 나열하는 경우의 수
  - 표현
    - ${}_{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$
  - 예제
    1. 5가지의 컴퓨터 게임을 사기 위한 경우의 수
       - 조건: 10개의 아케이드 게임 중 3개, 5개의 스포츠 게임 중 2개 선택
       - 3개의 아케이드 게임 선택: ${}_{10}C_{3} = \frac{10!}{(10-3)!3!} = 120$
       - 2개의 스포츠 게임 선택: ${}_{5}C_{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$
       - 따라서, $120 \times 10 = 1{,}200$가지임

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

사상의 확률

- 정의
  - 통계적 실험에서 특정 사상이 발생할 가능성에 대한 가중치 (Weight) 또는 확률(Probability)
- 특징
  - 표본공간의 모든 표본점에 대한 확률의 합은 1임
    - $P(S) = 1$
  - 사상 A의 확률($P(A)$)은 A에 할당된 모든 확률을 더한 값임
    - $0 \leq P(A) \leq 1$
    - $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 가 상호배반 사상인 경우
      - $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$
  - 특정 N개의 서로 다른 결과가 동일한 확률로 발생 가능함
    - 이 중 n개의 원소를 가지는 사상 A의 확률
      - $P(A) = \frac{n}{N}$

사상의 확률

- 방법론
  - 상대도수(Relative frequency)
    - 각 결과의 발생확률이 동일하지 않은 경우, 사전지식, 실험적 근거를 기반으로 확률을 할당하기도 함
      - e.g., 동전 10번 던져서 앞면이 6번 나오는 경우, 앞면의 확률은 $\frac{6}{10}$
  - 무차별(Indifference) 접근법
    - 특정 확률이 없는 경우, 동등분포, 불충분한 이유, 무차별 근거를 기반으로 모든 사건에 동일한 확률을 할당하기도 함
      - e.g., 6개의 면을 가진 주사위의 경우, 숫자가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$
  - 주관적(Subjective) 정의
    - 객관적인 근거가 부족한 경우, 개인의 경험, 신념, 기타 간접적인 정보를 기반으로 확률을 할당하기도 함
      - e.g., 자신의 경험을 기반으로 한 비 올 확률 예측

사상의 확률

- 예제(1/3)

1. 하나의 동전을 두 번 던질 경우, 앞면(H)이 최소 한 번 이상 나올 사상(A)에 대한 확률
   - $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
   - $A = \{HH, HT, TH\}$
   - 따라서, $P(A) = \frac{3}{4}$임
2. 짝수가 홀수의 2배만큼 나오는 주사위를 한 번 던져서, 4보다 작은 수가 나올 사상(E)에 대한 확률
   - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   - $E = \{1, 2, 3\}$
   - 따라서, $P(E) = \frac{4}{9}$임

사상의 확률

- 예제(2/3)

3. 짝수가 홀수의 2배만큼 나오는 주사위를 한 번 던져서, 짝수가 나올 사상(A), 3으로 나누어지는 수가 나올 사상(B)인 경우의 $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$
   - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   - $A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6\}$
   - $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\},\ A \cap B = \{6\}$
   - 따라서, $P(A \cup B) = \frac{7}{9}, P(A \cap B) = \frac{2}{9}$임
4. 통계학 수업에서 학생 1명을 임의로 뽑는 경우, 산업공학 학생(A)일 확률과 토목공학 또는 전기공학 학생(B)일 확률
   - 산업공학 25명, 기계공학 10명, 전기공학 10명, 토목공학 8명으로 구성
   - 따라서, $P(A) = \frac{25}{53}, P(B) = \frac{10+8}{53} = \frac{18}{53}$임

사상의 확률

- 예제(3/3)

5. 한 패가 5장인 포커게임에서 2장의 에이스카드(A)와 3장의 잭카드(J)를 가질 사상(C)에 대한 확률
   - 4장의 A 카드 중 2장의 카드 선택: $\frac{4!}{2!2!} = 6$
   - 4장의 J 카드 중 3장의 카드 선택: $\frac{4!}{3!1!} = 4$
   - 한 패가 5장인 경우: ${}_{52}C_5 = \frac{52!}{47!5!} = 2{,}598{,}960$
   - 따라서, $P(C) = \frac{6 \times 4}{2{,}598{,}960} = 0.9 \times 10^{-5}$임

사상의 확률

- 가법정리(Additive Rule)
  - 정의
    - 두 사상 A와 B가 동시에 일어나지 않는 경우
  - 표현
    - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
      - A와 B가 서로 배반인 경우, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
      - $A_1, A_2, \ldots, A_n$가 서로 배반인 경우, $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$
      - $A_1, A_2, \ldots, A_n$이 표본공간 S의 분할인 경우, $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(S) = 1$
    - $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
    - $P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$
      - A와 A^c가 서로 여집합인 경우의 수식

사상의 확률

- 가법정리(Additive Rule)
  - 예제(1/3)
    1. 존이 회사 A와 회사 B에 입사면접을 본 결과, 최소 하나 이상의 회사에 합격할 확률
       - 조건: 회사 A에 합격할 확률은 0.8, 회사 B에 합격할 확률은 0.6, 두 회사 모두 합격할 확률은 0.5
       - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$
    2. 한 쌍의 주사위를 던진 후, 두 눈의 합이 7 또는 11이 될 확률
       - 7이 될 사상(A), 11이 될 사상(B)인 경우, $P(A) = \frac{6}{36}, P(B) = \frac{2}{36}$
       - 두 경우는 동시에 발생 불가능함에 따라, A와 B는 서로 배반임
       - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$

사상의 확률

- 가법정리(Additive Rule)
  - 예제(2/3)
    3. 고객이 녹색, 백색, 적색, 청색의 자동차 중 한 가지 색의 자동차를 구입할 확률
       - 조건: 녹색(G) 구입 확률은 0.09, 백색(W) 구입 확률은 0.15, 적색(R) 구입 확률은 0.21, 청색(B) 구입 확률은 0.23
       - 네 가지 사상은 서로 배반임
       - 따라서, $P(G \cup W \cup R \cup B) = P(G) + P(W) + P(R) + P(B) = 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23 = 0.68$임
    4. 정비공이 하루에 정비하는 자동차 수가 3~8대 이상인 경우, 다음 작업일에 최소 5대 이상 정비할 사상(E)에 대한 확률
       - 조건: 3, 4, 5, 6, 7, 8대 이상이 될 확률은 각각 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10, 0.07
       - 따라서, $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - (0.12 + 0.19) = 0.69$임

사상의 확률

- 가법정리(Additive Rule)
  - 예제(3/3)
    5. 공장에서 생산하는 컴퓨터 케이블 규격이 $2{,}000 \pm 10mm$ 인 경우, 제품을 생산하는 경우에 대한 확률
       - 조건1: 2,010mm 초과 또는 1,990mm 미만인 케이블을 생산할 확률은 동일
       - 조건2: 규격에 맞는 제품을 생산할 확률은 0.99
       - 생산된 케이블이 규격에 맞는 사상(M), 규격보다 작은 사상(S), 규격보다 클 사상(L)

    1) 임의로 선택한 케이블이 규격보다 큰 제품일 확률
       - $P(S) = P(L) = \frac{1-0.99}{2} = 0.005$
    2) 임의로 선택한 케이블 길이(X)가 1,990mm 이상일 확률
       - $P(1{,}990 \leq X \leq 2{,}010) = P(M) = 0.99$
       - $P(X > 2{,}010) = P(L) = 0.005$
       - 따라서, $P(X \geq 1{,}990) = P(M) + P(L) = 0.995$임

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

조건부 확률(Conditional Probability)

- 정의
  - 사상 A가 일어난 경우에 사상 B가 일어날 확률
- 표현
  - $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, (P(A) > 0)$
- 예제(1/3)

1. 짝수가 홀수의 2배만큼 나오는 주사위를 던질 때, 완전제곱수를 얻을 사상(B)과 그 주사위를 던져서 3보다 큰 수를 얻을 사상(A)에 대한 확률
   - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A) = \frac{5}{9}$
   - 따라서, $P(B|A) = \frac{2}{5}$임

조건부 확률(Conditional Probability)

- 예제(2/3)

2. 표본공간(S)이 대학을 졸업한 성인집단일 때, 임의로 한 명을 홍보요원으로 선출하는 경우의 확률

성별 \ 고용별	고용	비고용	총계
남성	460	40	500
여성	140	260	400
총계	600	300	900

- 남자가 선택될 사상(M), 선택된 사람이 고용인일 사상(E)
- $P(M|E) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 예제(3/3)

3. 정시에 비행기가 출발할 확률은 $P(D) = 0.83$이고, 정시에 도착할 확률은 $P(A) = 0.82$, 정시에 출발하여 정시에 도착할 확률은 $P(D \cap A) = 0.78$인 경우의 확률
   1) 비행기가 정시에 출발했을 때 정시에 도착할 확률
      - $P(A|D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$
   2) 비행기가 정시에 도착했을 때 정시에 출발했을 확률
      - $P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$

4. 공장에서 생산하는 옷감에는 길이불량(L)과 직조불량(T)이 존재함. 이때 생산된 옷감 하나가 길이불량이고, 이것이 직조불량일 확률
   - 조건: 옷감의 10%는 길이불량, 5%는 직조불량, 0.8%는 두 불량 전부 가짐
   - $P(T|L) = \frac{P(T \cap L)}{P(L)} = \frac{0.008}{0.1} = 0.08$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 독립사상(Independent Event)
  - 정의
    - 두 사상 A와 B에 대해 한 사상이 다른 사상의 발생 확률에 영향을 주지 않는 경우
  - 특징
    - 복원추출에 해당함
      - 추출한 것을 원래대로 돌려놓고 추출하는 방법
  - 표현
    - $P(B|A) = P(B) = P(B|A^c),\ P(A|B) = P(A) = P(A|B^c)$
  - 예제
    1. 동전을 2번 던지는 실험
       - 첫 번째에서 앞면 또는 뒷면이 나올 가능성은 각각 $\frac{1}{2}$이며, 두 번째도 동일함

조건부 확률(Conditional Probability)

- 종속사상(Dependent Event)
  - 정의
    - 두 사상 A와 B에 대해 한 사상이 다른 사상의 발생 확률에 영향을 주는 경우
  - 특징
    - 비복원추출에 해당함
      - 추출한 것을 원래대로 돌려놓지 않고 추출하는 방법
  - 표현
    - $P(B|A) \neq P(B),\ P(A|B) \neq P(A)$
  - 예제
    1. 학생이 20명인 반에서 남학생을 뽑은 후, 다음에도 남학생을 뽑는 경우
       - 표본공간이 달라지므로 영향을 주는 경우에 해당함

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 정의
    - 두 사상 A와 B가 동시에 일어나는 경우
  - 표현
    - $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
      - $A_1, A_2, \ldots, A_k$이 발생가능한 경우, $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$ $= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})$
    - $P(A \cap B) = P(A)P(\mathrm{B})$
      - 두 사상 A와 B는 독립이고, 그 역도 성립함
      - $A_1, A_2, \ldots, A_n$이 독립인 경우, $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_k)$
      - 사상의 집합 $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$의 부분집합 $A_{i1}, \ldots, A_{ik}, k \leq n$의 경우, $P(A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \ldots P(A_{ik})$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 예제(1/4)
    1. 상자로부터 2개의 퓨즈를 연속적으로 비복원추출하는 경우, 2개의 퓨즈가 모두 불량품일 확률
       - 조건: 상자에 담긴 20개의 퓨즈 중 5개가 불량품
       - 첫 번째 퓨즈가 불량품일 사상(A), 두 번째 퓨즈가 불량품일 사상(B)
       - 첫 번째 퓨즈가 불량품일 확률은 $\frac{1}{4}$이나, 두 번째 퓨즈가 불량품일 확률은 $\frac{4}{19}$
       - 따라서, $P(A \cap B) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}$임

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 예제(2/4)

2. 첫 번째 가방에서 공 하나를 꺼낸 후 보지 않고 두 번째 가방에 넣은 후, 두 번째 가방에서 검은 공을 꺼낼 확률
   - 조건1: 첫 번째 가방에는 4개의 흰 공과 3개의 검은 공이 들어있음
   - 조건2: 두 번째 가방에는 3개의 흰 공과 5개의 검은 공이 들어있음
   - 첫 번째 가방에서 검은 공을 뽑을 사상(B_1),
     두 번째 가방에서 검은 공을 뽑을 사상(B_2),
     첫 번째 가방에서 흰 공을 뽑을 사상(W_1)
   - 이들은 서로 배반임에 따라, 확률은 아래와 같음

$$\begin{aligned}
&P[(B_1 \cap B_2)\text{또는}(W_1 \cap B_2)] \\
&= P(B_1 \cap B_2) + P(W_1 \cap \mathrm{B}_2) \\
&= P(B_1)P(B_2|B_1) + P(W_1)P(B_2|W_1) \\
&= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{38}{63}
\end{aligned}$$

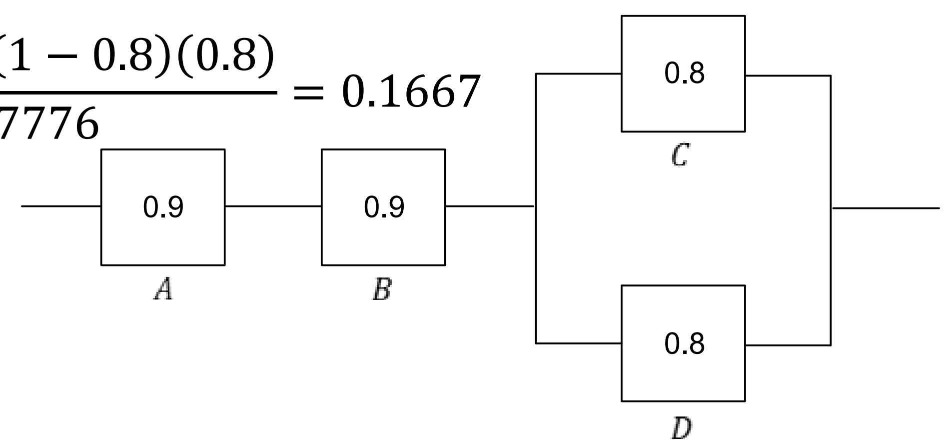
조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 예제(3/4)
    3. 화재로 인해 부상자 발생 시, 소방차와 구급차를 모두 사용할 수 있는 확률
       - 조건: 소방차 필요 시 바로 사용 가능할 확률이 0.98, 구급차 필요 시 바로 사용 가능할 확률이 0.92임
       - 소방차를 사용가능한 사상(A), 구급차를 사용가능한 사상(B)
       - $P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.98)(0.92) = 0.9016$
    4. 한 벌의 카드에서 3장의 카드를 연속적으로 비복원추출 시, $A_1 \cap A_2 \cap A_3$의 확률
       - 조건: 첫 번째 카드가 붉은색 A일 사상(A_1), 두 번째 카드가 10이나 J일 사상(A_2), 세 번째 카드가 3보다 크고 7보다 작을 사상(A_3)
       - $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$

$$= \left(\frac{2}{52}\right)\left(\frac{8}{51}\right)\left(\frac{12}{50}\right) = \frac{8}{5525}$$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 예제(4/4)
    5. 4개(A, B, C, D)의 부품으로 구성된 전기시스템에서 각 부품이 작동할 확률이 각각 0.9, 0.9, 0.8, 0.8인 경우
       1) 시스템이 작동할 확률
          - $P[A \cap B \cap (C \cup D)] = P(A)P(B)P(C \cup D) = P(A)P(B)[1 - P(C^c \cap D^c)]$
            $= P(A)P(B)[1 - P(C^c)P(D^c)] = (0.9)(0.9)[1 - (1 - 0.8)(1 - 0.8)] = 0.7776$
       2) 시스템이 작동 시 C가 작동하지 않을 확률
          - $P = \frac{P(\text{시스템은 작동하나 } C\text{는 작동 안함})}{P(\text{시스템 작동})}$
            $= \frac{P(A \cap B \cap C^c \cap D)}{P(\text{시스템작동})} = \frac{(0.9)(0.9)(1 - 0.8)(0.8)}{0.7776} = 0.1667$

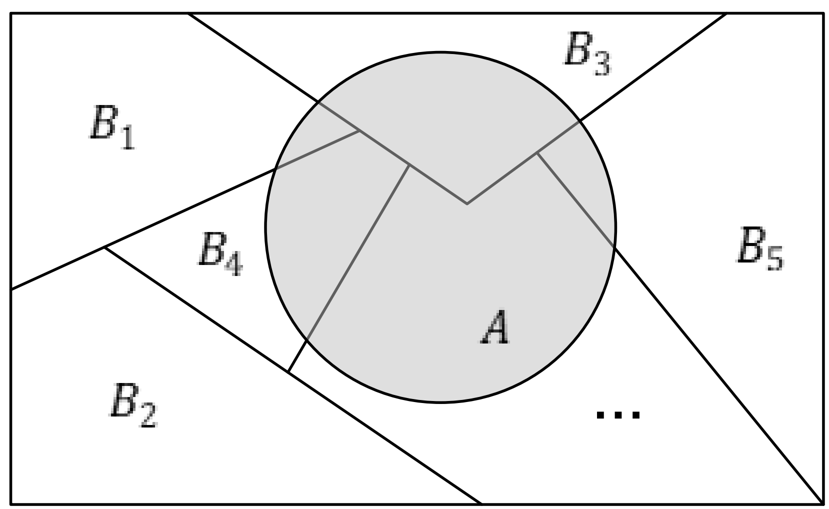


목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 전확률의 정리(Theorem of Total Probability)
  - 정의
    - 표본공간 S를 사상 A를 n개로 구분할 때, 사상 A의 확률
  - 표현
    - $P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$
      - 사상 $B_1, B_2, \ldots, B_k$은 표본공간 S의 분할이고, $P(B) \neq 0, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{k}$일 때, S의 임의의 사상 A에 대한 식



베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 전확률의 정리(Theorem of Total Probability)
  - 예제

1. 기계 B_1, B_2, B_3가 각 전체생산량의 30%, 45%, 25%를 생산하는 공장에서 불량품 제조율이 각각 2%, 3%, 2%인 경우, 불량품을 선택할 확률
   - A: 그 제품이 불량품일 사상
   - B_1: 그 제품이 기계 B_1에서 제조되었을 사상
   - B_2: 그 제품이 기계 B_2에서 제조되었을 사상
   - B_3: 그 제품이 기계 B_3에서 제조되었을 사상
   - 따라서, $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$
     $= (0.3)(0.02) + (0.45)(0.03) + (0.25)(0.02)$
     $= 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245 = 2.45\%$임

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 정의
  - 사전 확률(Prior Probability)에서 발생한 사건에 대한 사후 확률(Poster Probability)을 구하는 이론
    - 사전 확률: 현재 가진 정보를 기초로 정한 초기 확률
    - 사후 확률: 추가된 정보로부터 사전 정보를 수정한 확률
- 특징
  - 구하고자 하는 확률을 한 번에 구하지 못하는 경우에 사전 확률을 활용하는 방법임
- 표현
  - $P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$
    - $B_1, B_2, \ldots, B_k$는 표본공간 S의 분할, r은 정수$(1,2,\ldots,k)$

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 예제(1/2)

1. 기계 B_1, B_2, B_3가 각 전체생산량의 30%, 45%, 25%를 생산하는 공장에서 불량품 제조율이 각각 2%, 3%, 2%인 경우, 임의로 선택한 불량품이 기계 B_3에서 제조되었을 확률
   - A: 그 제품이 불량품일 사상
   - B_1: 그 제품이 기계 B_1에서 제조되었을 사상
   - B_2: 그 제품이 기계 B_2에서 제조되었을 사상
   - B_3: 그 제품이 기계 B_3에서 제조되었을 사상
   - 따라서, $P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$

$$= \frac{(0.25)(0.02)}{(0.3)(0.02) + (0.45)(0.03) + (0.25)(0.02)}$$

$$= \frac{0.005}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49} = 20.4\%$$

   - 현재 B_3의 전체생산량은 25%를 차지하나 불량품 비율이 20.4%이므로, 그 불량품은 기계 B_3에서 제조되지는 않았을 것으로 예상

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 예제(2/2)

2. 임의로 선택한 한 제품의 결과가 불량(D)인 경우, 어느 분석법을 사용했을 가능성이 가장 많은가에 대한 확률
   - 조건1: 제품 개발 시 분석법 1, 2, 3을 제품의 30%, 20%, 50%에 각각 적용함
   - 조건2: 불량률은 각각 $P(D|P_1) = 0.01, P(D|P_2) = 0.03, P(D|P_3) = 0.02$
   - $P(P_1) = 0.30, P(P_2) = 0.20, P(P_3) = 0.50$이며, 우리가 구할 확률은 $P(P_1|D)$, $P(P_2|D)$, $P(P_3|D)$ 임
   - 따라서, $P(P_1|D) = \frac{P(P_1)P(D|P_1)}{P(P_1)P(D|P_1)+P(P_2)P(D|P_2)+P(P_3)P(D|P_3)}$
   $= \frac{(0.30)(0.01)}{(0.3)(0.01)+(0.20)(0.03)+(0.50)(0.02)} = \frac{0.003}{0.019} = 0.158$
   - 동일하게 계산하면, $P(P_2|D) = \frac{(0.03)(0.20)}{0.019} = 0.316$, $P(P_3|D) = \frac{(0.02)(0.50)}{0.019} = 0.526$
   - 따라서, 분석법 3을 사용했을 가능성이 가장 큼

Thanks!

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)