확률 및 통계학

- 2장 확률 (Probability) -

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)
세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

표본공간(Sample Space)

- 정의

정의 2.1

통계적 실험에서 발생가능한 모든 결과들의 집합을 **표본공간**이라 하고, S로 표시한다.

- 특징
  - 표본공간 결과는 원소(Element 또는 Member) 또는 표본점(Sample Point)으로 표현
  - 원소가 유한한 경우, 중괄호 속에 각 원소 나열 가능
    - e.g., 동전 던지기: $S = \{H, T\}$

- 예제 2.1

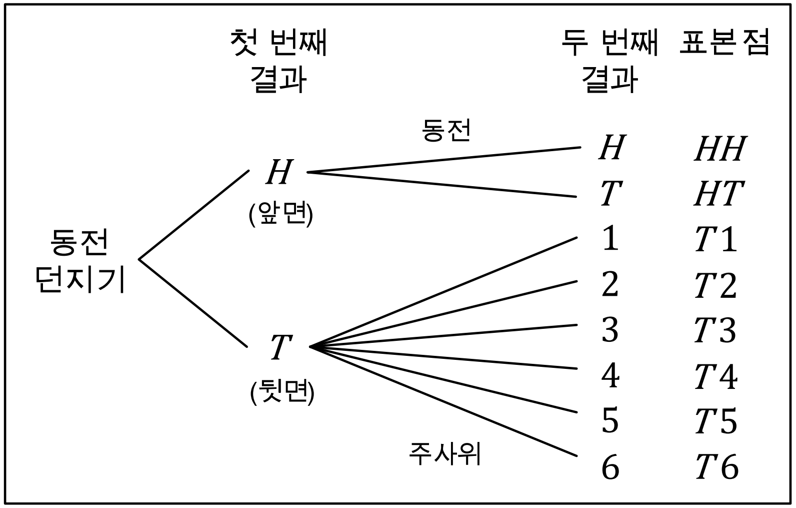
한 개의 주사위를 던지는 실험에서, 윗면에 나타난 숫자에만 관심을 가진다면 표본공간은 $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이 될 것이다. 그러나 윗면에 나타난 숫자가 짝수인지 홀수인지에 관심을 가진다면 표본공간은 단순히 $S_2 = \{\text{짝수}, \text{홀수}\}$가 될 것이다.

표본공간(Sample Space)

- 수형도(Tree Diagram)
  - 정의
    - 표본공간에서 트리 형태로 원소를 나열한 도표
  - 예제 2.2

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 다시 동전을 던지고, 뒷면이 나오면 한 개의 주사위를 던지는 실험을 생각해보자. 그림 1의 수형도에서 가지로 연결되는 매 경로마다 하나의 특정한 표본점이 된다. 표본점 HH는 한 개의 동전을 두 번 던져서 모두 앞면이 나온 경우이다. 모든 경로를 따라가 보면 표본공간이 다음과 같다.

- $S = \{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$



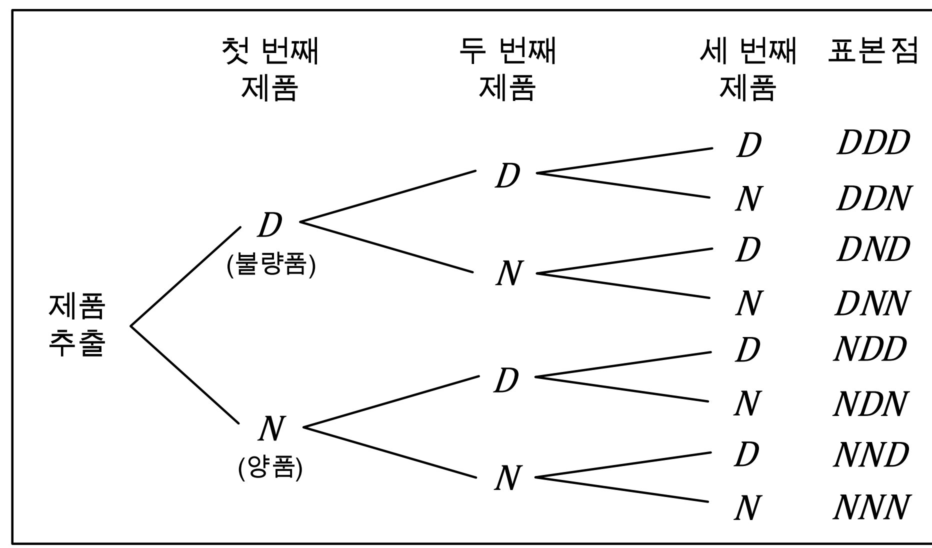
<그림 1> 예제 2.2의 수형도

표본공간(Sample Space)

- 수형도(Tree Diagram)
  - 예제 2.3

제조과정에서 임의로 세 개의 제품을 추출하여 검사한 뒤, 불량품이면 D, 양품이면 B로 분류된다고 하자. 그림 2의 수형도에서 첫 번째 경로를 따라가면 표본점 DDD를 얻게 되는데, 이는 세 개의 제품이 모두 불량품임을 의미한다. 모든 경로를 따라가 보면 표본점이 다음과 같다.

- $S = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$



<그림 2> 예제 2.3의 수형도

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

사상(Events)

- 정의

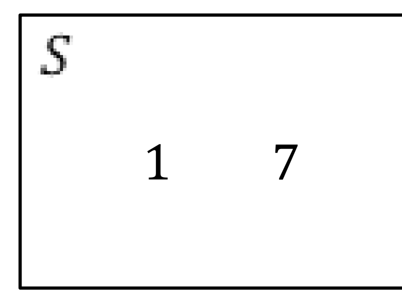
정의 2.2

사상은 표본공간의 부분집합이다.

- 예제 2.4

표본공간 $S = \{t | t \geq 0\}$이 주어져 있고, 여기서 t는 어떤 전자부품의 수명(단위: 년)이라 하면, 그 부품이 5년 내에 고장이 날 사상 A는 $A = \{t | 0 \leq t < 5\}$가 되고 이것은 S의 부분집합이 된다.

- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(1/5)
  - 공집합(Empty Set): ∅
    - 표본공간 S 중 하나의 원소도 포함하고 있지 않은 상태
      - e.g., 7의 인수 중 짝수를 포함하는 사상이 A
        - $A = \emptyset$



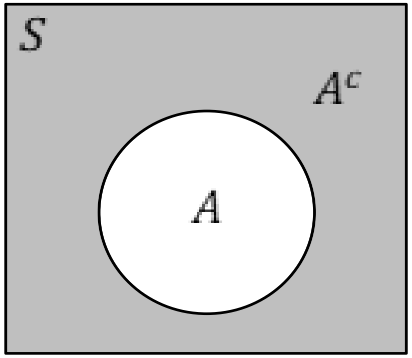
<그림 3> 공집합 예제

사상(Events)

- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(2/5)
  - 여집합(Complement): A^c

정의 2.3

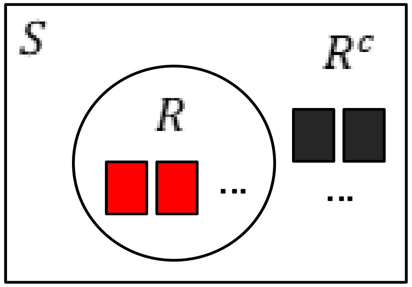
표본공간 S에 대한 하나의 사상 A의 **여집합**은 A의 원소가 아닌 S의 모든 원소들이고, A^c으로 표시한다.



<그림 4> 여집합

- 예제 2.5

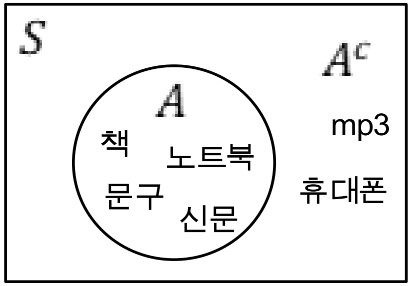
R는 52장의 카드에서 붉은색 카드가 뽑힐 사상이라 하고, S는 모든 카드를 원소로 하는 집합이라 하자. 그러면 R^c은 붉은색이 아니고 검은색 카드가 뽑힐 사상이 된다.



<그림 5> 예제 2.5

- 예제 2.6

표본공간 $S = \{$책, 휴대폰, $mp3$, 신문, 문구, 노트북$\}$을 생각해 보자. $A = \{$책, 문구, 노트북, 신문$\}$이면, $A^c = \{$휴대폰, $mp3\}$가 된다.



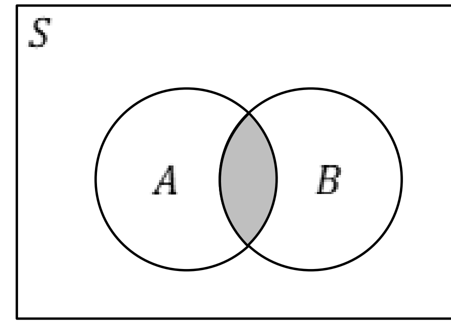
<그림 6> 예제 2.6

사상(Events)

- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(3/5)
  - 교집합(Intersection): $A \cap B$

정의 2.4

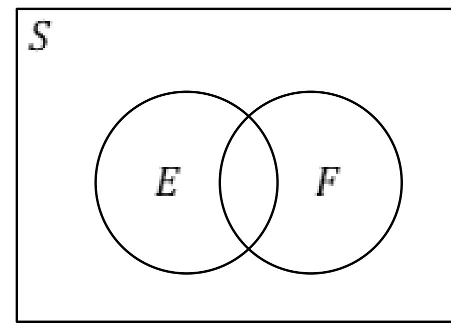
두 사상 A와 B의 **교집합**은 A와 B에 공통으로 속하는 모든 원소들을 포함하는 사상이며, $A \cap B$로 표시한다.



<그림 7> 교집합

- 예제 2.7

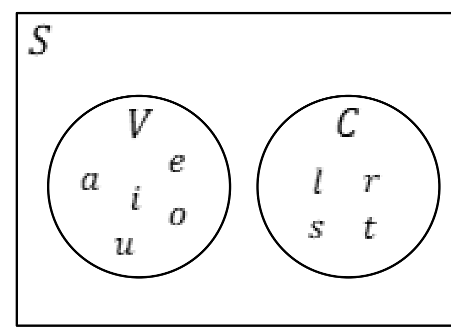
어느 교실에서 임의로 한 학생을 뽑았을 때 그 학생의 전공이 공학일 사상을 E, 그리고 그 학생이 여자인 사상을 F라고 하자. 그러면 $E \cap F$는 그 교실에서 뽑힌 학생이 여공학도인 사상이다.



<그림 8> 예제 2.7

- 예제 2.8

$V = \{a, e, i, o, u\}$이고, $C = \{l, r, s, t\}$라 하면, $V \cap C = \emptyset$이 된다. 즉, V와 C는 공통으로 가지고 있는 원소가 없으므로 동시에 발생할 수 없다.



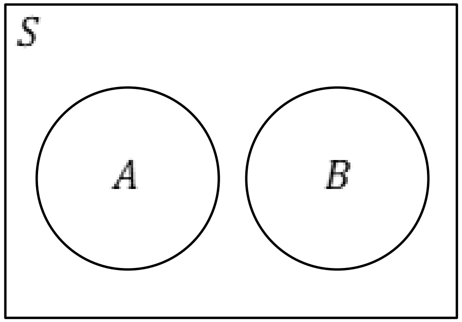
<그림 9> 예제 2.8

사상(Events)

- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(4/5)
  - 상호배반(Mutually exclusive 또는 Disjoint): $A \cap B = \emptyset$

정의 2.5

$A \cap B = \emptyset$, 즉, A와 B가 공통원소를 가지고 있지 않으면 두 사상 A와 B는 **상호배반**이다.

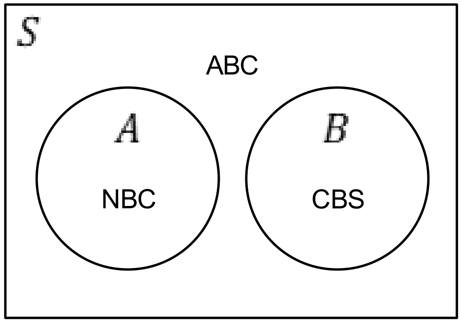


<그림 10> 상호배반

- 예제 2.9

8개의 채널을 통해서 방송을 하는 한 유선방송회사는 세 개는 ABC 방송, 두 개는 NBC 방송, 하나는 CBS 방송과 가맹을 맺고, 나머지 두 채널은 교육방송용과 ESPN 스포츠중계용이다.

유선 방송에 가입한 사람이 TV 스위치를 켰을 때, 그 프로그램이 NBC에 속할 사상이 A, CBS에 속할 사상이 B라면, 프로그램은 두 개 이상의 방송을 볼 수 없으므로 사상 A와 B는 공통인 사상을 가질 수 없게 되며, 사상 A와 B는 상호 배반이 된다.



<그림 11> 예제 2.9

- $A \cap B = \emptyset$

사상(Events)

- 벤 다이어그램을 통한 집합연산(5/5)
  - 합집합(Union): $A \cup B$

정의 2.6

두 사상 A와 B의 **합집합**은 A 혹은 B에 속하는 모든 원소들을 포함하는 사상이고, $A \cup B$로 표시한다.

- 예제 2.10

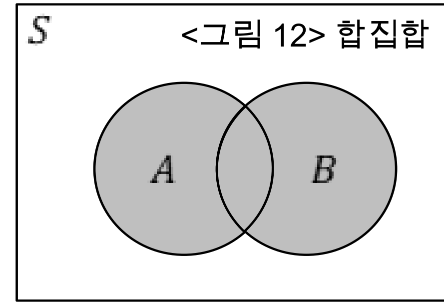
$A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d, e\}$라 하면, $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$가 된다.

- 예제 2.11

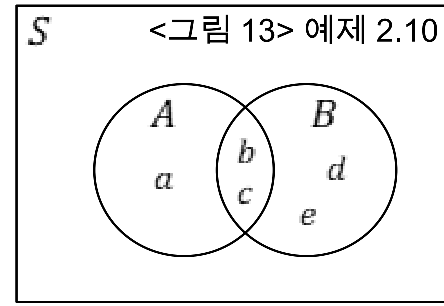
P를 어떤 석유회사에서 임의로 선택된 한 직원이 흡연가일 사상, Q를 그 사람이 음주가일 사상이라 하자. 그러면 사상 $P \cup Q$는 흡연을 하거나 음주를 하는 모든 직원들의 집합이다.

- 예제 2.12

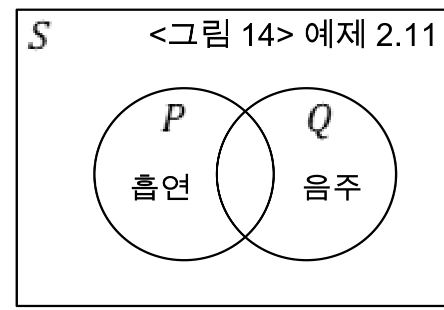
$M = \{x | 3 < x < 9\}, N = \{y | 5 < y < 12\}$라 하면, $A \cup B = \{z | 3 < z < 12\}$가 된다.



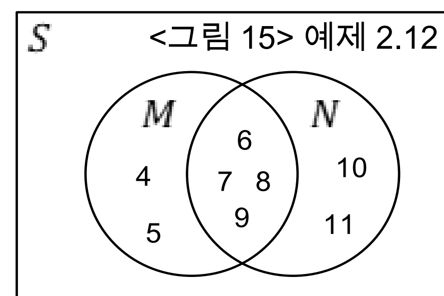
<그림 12> 합집합



<그림 13> 예제 2.10



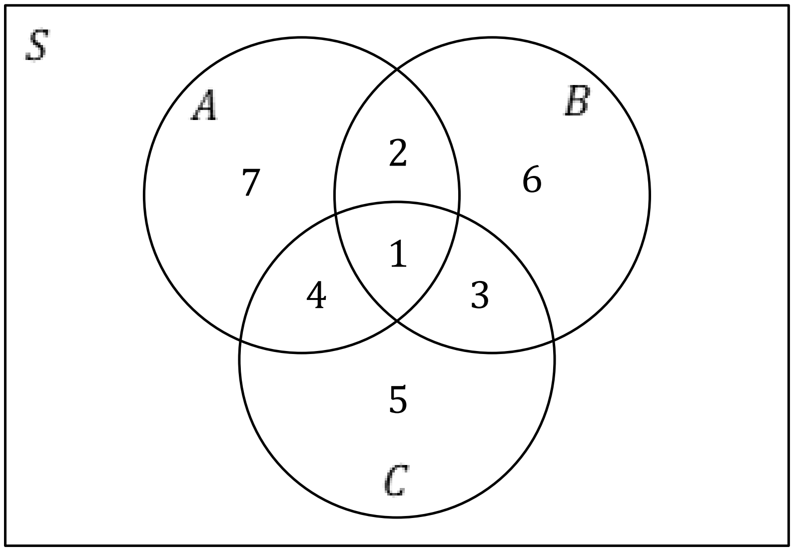
<그림 14> 예제 2.11



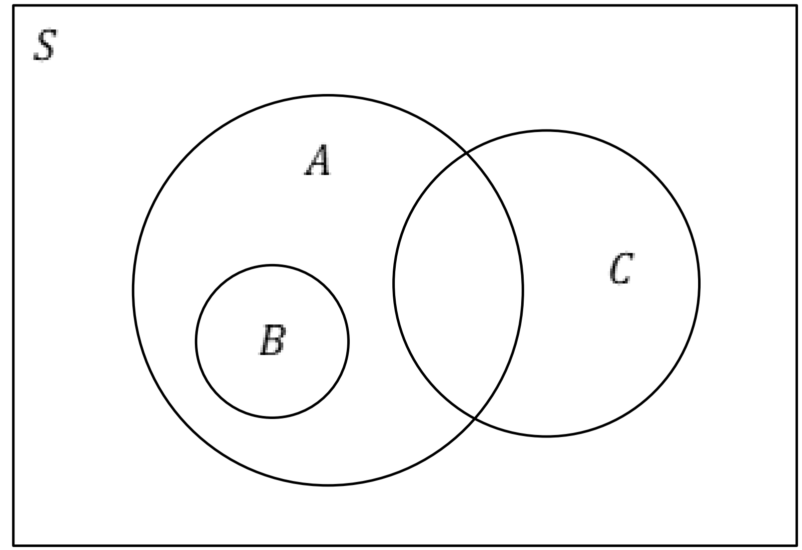
<그림 15> 예제 2.12

사상(Events)

- 표본공간과 사상의 관계



<그림 16> 벤 다이어그램 1



<그림 17> 벤 다이어그램 2

- S: 표본공간
- $A \cap B =$ 영역 $1, 2$
- $B \cap C =$ 영역 $1, 3$
- $A \cup C =$ 영역 $1, 2, 3, 4, 5, 7$
- $B^c \cap A =$ 영역 $4, 7$
- $A \cap B \cap C =$ 영역 1
- $(A \cup B) \cap C^c =$ 영역 $2, 6, 7$

- S: 표본공간
- $A \cup B = A$
- $B \cap C = \emptyset$

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

경우의 수(Number of Cases)

- 정의
  - 특정 사상이 일어날 모든 경우를 숫자로 표현한 것
- 계산 방법(1/6)
  - 합의 법칙

규칙 2.1

만약 첫 번째 시행이 n_1가지 방법, 그리고 두 번째 시행이 n_2가지 방법이 있으면, 두 가지 시행이 이루어지는 것은 $n_1 + n_2$가지 방법이 있다.

- e.g.,

맥도날드에는 불고기버거, 치킨버거, 김밥천국에는 제육볶음, 라볶이, 라면이 있을 때, 점심 메뉴로 선택할 수 있는 메뉴의 수는 몇 개인가?

- 맥도날드 메뉴를 선택하는 경우의 수: $n_1 = 2$
- 김밥천국 메뉴를 선택하는 경우의 수: $n_2 = 3$

$\therefore\ n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5$

경우의 수(Number of Cases)

- 계산 방법(2/6)
  - 곱의 법칙(1/5)

규칙 2.2

만약 첫 번째 시행이 n_1가지 방법, 그리고 두 번째 시행이 n_2가지 방법이 있으면, 두 가지 시행이 이루어지는 것은 $n_1 n_2$가지 방법이 있다.

- 예제 2.13

한 쌍의 주사위를 한 번 던지는 경우 표본공간에는 얼마나 많은 표본점들이 존재하게 되는가?

- 첫 번째 주사위 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 두 번째 주사위 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- A의 경우의 수: $n_1 = 6$
- B의 경우의 수: $n_2 = 6$

$\therefore\ n_1 n_2 = 6 \times 6 = 36$

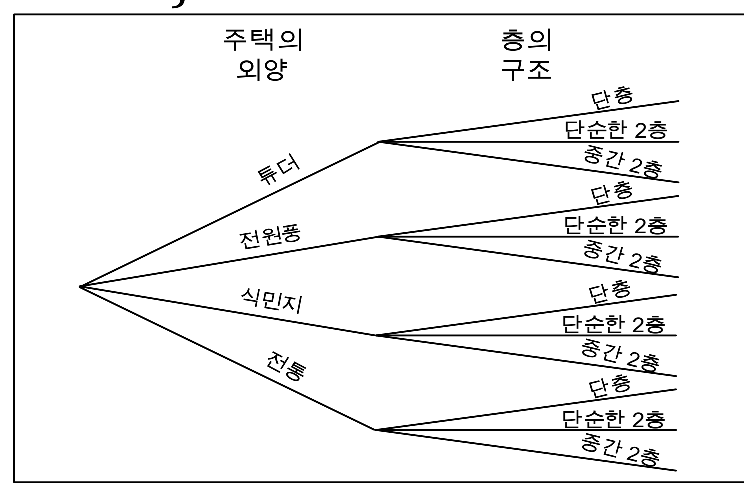
경우의 수(Number of Cases)

- 계산 방법(3/6)
  - 곱의 법칙(2/5)
    - 예제 2.14

신시가지를 개발하고자 하는 개발업자는 주택의 외양은 튜더 양식, 전원풍 양식, 식민지 양식, 전통적인 양식 중 하나를 따르고, 층의 구조는 단층, 단순한 2층, 중간 2층이 딸린 구조로 하여 주택을 공급할 예정이다. 주택을 구입하려고 하는 사람이 선택할 수 있는 가짓수는 얼마나 되는가?

- 주택의 외양 $A = \{$튜더 양식, 전원풍 양식, 식민지 양식, 전통적인 양식$\}$
- 층의 구조 $B = \{$단층 구조, 단순한 2층 구조, 중간 2층 구조$\}$
- A의 경우의 수: $n_1 = 4$
- B의 경우의 수: $n_2 = 3$

$\therefore\ n_1 n_2 = 4 \times 3 = 12$



<그림 18> 예제 2.14의 수형도

경우의 수(Number of Cases)

- 계산 방법(4/6)
  - 곱의 법칙(3/5)
    - 예제 2.15

22명의 클럽 회원 중에서 회장과 총무를 선임할 수 있는 방법의 수는 몇 가지인가?

- 회장 자리를 선임할 수 있는 경우의 수: $n_1 = 22$
- 총무 자리를 선임할 수 있는 경우의 수: $n_2 = 21$

$\therefore\ n_1 n_2 = 22 \times 21 = 462$

경우의 수(Number of Cases)

- 계산 방법(5/6)
  - 곱의 법칙(4/5)

규칙 2.3

만약 한 시행이 n_1가지로 시행될 수 있고, 이 각각이 다시 n_2가지 방법으로 시행되며, 또 이 각각이 n_3가지의 방법으로 시행되는 식으로 하여 k개의 시행이 연속으로 이루어진다면, 이 시행과 관련된 경우의 수는 $n_1 n_2 \cdots n_k$가 된다.

- 예제 2.16

샘이 컴퓨터를 조립하려고 한다. CPU는 2개 회사, 하드 디스크는 4개 회사, 메모리는 3개 회사, 액세서리는 5개 상점으로부터 주문할 수 있다면, 샘이 부품을 주문할 수 있는 총 가짓수는 얼마인가?

- CPU를 선택할 수 있는 경우의 수: $n_1 = 2$
- 하드 디스크를 선택할 수 있는 경우의 수: $n_2 = 4$
- 메모리를 선택할 수 있는 경우의 수: $n_3 = 3$
- 액세서리를 선택할 수 있는 경우의 수: $n_4 = 5$

$\therefore\ n_1 n_2 n_3 n_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$

경우의 수(Number of Cases)

- 계산 방법(6/6)
  - 곱의 법칙(5/5)
    - 예제 2.17

0, 1, 2, 5, 6, 9를 각각 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 4자리의 짝수는 몇 가지인가?

1) 일의 자리가 0인 경우
   - 일의 자리에 0이 오는 경우의 수: $n_1 = 1$
   - 천의 자리 경우의 수: $n_2 = 5$
   - 백의 자리 경우의 수: $n_3 = 4$
   - 십의 자리 경우의 수: $n_4 = 3$

   $\therefore\ n_1 n_2 n_3 n_4 = 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$

2) 일의 자리가 0이 아닌 경우
   - 일의 자리에 2, 6이 오는 경우의 수: $n_1 = 2$
   - 천의 자리 경우의 수: $n_2 = 4$
   - 백의 자리 경우의 수: $n_3 = 4$
   - 십의 자리 경우의 수: $n_4 = 3$

   $\therefore\ n_1 n_2 n_3 n_4 = 2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 정의

정의 2.7

어떤 대상물집합의 전체 또는 일부의 순서적 배열을 **순열**이라 한다.

- e.g., 3개의 영문자 a, b, c에 대한 순열
  - 첫 번째로 올 수 있는 문자: $n_1 = 3$
  - 두 번째로 올 수 있는 문자: $n_2 = 2$
  - 세 번째로 올 수 있는 문자: $n_3 = 1$

  $\therefore\ n_1 n_2 n_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (cf. 규칙 2.3)

정의 2.8

비음인 정수 n에 대해 $n!\ (n$ 계승$)$은 다음과 같이 정의된다.

$$n! = n(n-1)\cdots(2)(1)$$

$n = 0$인 특별한 경우에는 $0! = 1$로 정의된다.

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)

정리 2.1

n개의 서로 다른 대상물에 대한 순열의 수는 $n!$이다.

- e.g., 4개의 영문자 a, b, c, d에 대한 순열
  $\therefore\ 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ (cf. 정리 2.1)

- e.g., 4개의 영문자 a, b, c, d에서 한 번에 2개씩 나열하는 순열
  - 첫 번째로 올 수 있는 문자: $n_1 = 4$
  - 두 번째로 올 수 있는 문자: $n_2 = 3$

  $\therefore\ n_1 n_2 = 4 \times 3 = 12$ (cf. 규칙 2.2)

정리 2.2

n개의 서로 다른 대상물 중 r개를 취하여 만든 순열의 수는

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

이다.

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 예제 2.18

통계학과 25명의 대학원생들을 대상으로 세 가지 상(연구, 교육, 봉사)을 주려고 한다. 한 사람당 최대 한 개의 상만 받을 수 있다고 할 때, 상을 수여하는 방법은 총 몇 가지나 되겠는가?

- n: 25 (대학원생 25명)
- r: 3 (상 3개)

$$\therefore {}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25 \times 24 \times 23 = 13{,}800$$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 예제 2.19 (1/5)

50명의 학생으로 구성된 동아리의 회장과 총무를 뽑으려고 한다. 다음 각 경우에 가능한 선출방법은 얼마나 되는가?

(a) 선출방법에 제한이 없을 때

- n: 50 (학생 50명)
- r: 2 (회장과 총무)

$$\therefore {}_{50}P_2 = \frac{50!}{48!} = 50 \times 49 = 2{,}450$$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 예제 2.19 (2/5)

50명의 학생으로 구성된 동아리의 회장과 총무를 뽑으려고 한다. 다음 각 경우에 가능한 선출방법은 얼마나 되는가?

(b) A는 회장이 아니면 하지 않으려고 할 때

1) A가 회장이 되는 경우
   - A를 제외한 학생 49명 중 총무를 뽑음

   $\therefore 49$

2) A가 회장이 되지 않는 경우
   - n: 49 (A를 제외한 학생 50명)
   - r: 2 (회장과 총무)

   $$\therefore {}_{49}P_2 = \frac{49!}{47!} = 49 \times 48 = 2{,}352$$

$$\therefore 49 + 2{,}352 = 2{,}401$$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 예제 2.19 (3/5)

50명의 학생으로 구성된 동아리의 회장과 총무를 뽑으려고 한다. 다음 각 경우에 가능한 선출방법은 얼마나 되는가?

(c) B와 C는 같이 하는 경우가 아니면 하지 않으려고 할 때

1) B와 C를 회장과 총무로 선출하는 경우
   - B가 회장, C가 총무인 경우와 B가 총무, C가 회장인 경우

   $\therefore 2$

2) B와 C를 회장과 총무로 선출하지 않는 경우
   - n: 48 (B와 C를 제외한 학생 48명)
   - r: 2 (회장과 총무)

   $$\therefore {}_{48}P_2 = \frac{48!}{46!} = 48 \times 47 = 2{,}256$$

$\therefore 2 + 2{,}256 = 2{,}258$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 예제 2.19 (4/5)

50명의 학생으로 구성된 동아리의 회장과 총무를 뽑으려고 한다. 다음 각 경우에 가능한 선출방법은 얼마나 되는가?

(d) D와 E는 서로 같이는 하지 않으려고 할 때(1/2)

1) D가 선출되고, E는 선출되지 않는 경우
   - D가 회장이고 E는 둘 다 아닌 경우: D와 E를 제외한 학생 48명 중 총무를 뽑음
   - D가 총무이고 E는 둘 다 아닌 경우: D와 E를 제외한 학생 48명 중 회장을 뽑음

   $\therefore 2 \times 48 = 96$

2) D가 선출되지 않고, E가 선출되는 경우
   - E가 회장이고 D는 둘 다 아닌 경우: D와 E를 제외한 학생 48명 중 총무를 뽑음
   - E가 총무이고 D는 둘 다 아닌 경우: D와 E를 제외한 학생 48명 중 회장을 뽑음

   $\therefore 2 \times 48 = 96$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation)
  - 예제 2.19 (5/5)

50명의 학생으로 구성된 동아리의 회장과 총무를 뽑으려고 한다. 다음 각 경우에 가능한 선출방법은 얼마나 되는가?

(d) D와 E는 서로 같이는 하지 않으려고 할 때(2/2)

3) D와 E가 모두 선출되지 않는 경우
   - n: 48 (D와 E를 제외한 학생 48명)
   - r: 2 (회장과 총무)

   $$\therefore {}_{48}P_2 = \frac{48!}{46!} = 48 \times 47 = 2{,}256$$

$$\therefore 96 + 96 + 2{,}256 = 2{,}448$$

경우의 수(Number of Cases)

- 원순열(Circular Permutation)

정리 2.3

n개의 서로 다른 대상물을 원형으로 배열하는 순열의 수는 $(n-1)!$이다.

- A, B, C를 일렬로 나열하는 경우
  - $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$

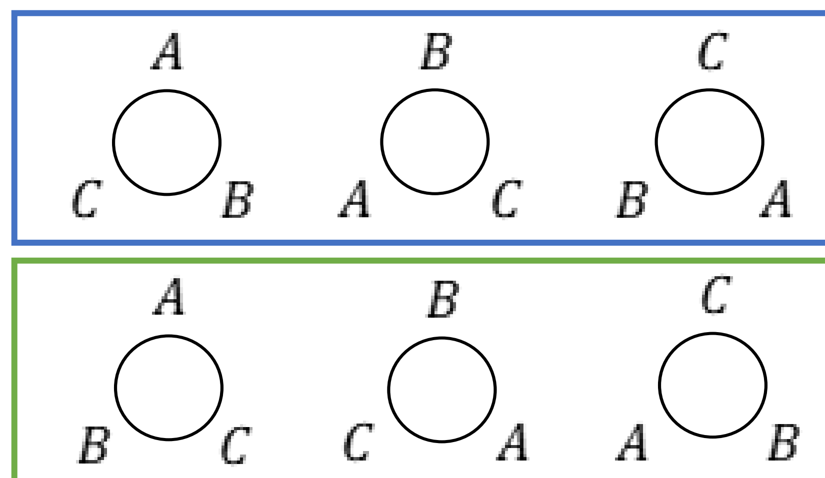
  $\therefore 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

  (cf. 정리 2.1)

- A, B, C를 원형으로 나열하는 경우

  $\therefore 2! = 2 \times 1 = 2$

  (cf. 정리 2.3)



경우의 수(Number of Cases)

- 같은 것이 있는 순열

정리 2.4

n_1개는 첫 번째 종류, n_2개는 두 번째 종류,$\cdots$, n_k개는 k번째 종류로 된 n개의 대상물의 순열의 수는 $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ 이다.

- A, B, C 중 B, C 대신에 X를 취하는 경우
  - A, B, C인 경우, $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$
    $\therefore 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
    (cf. 정리 2.1)
  - X를 취한 경우, $AXX, AXX, XAX, XXA, XAX, XXA$
    $\therefore \frac{3!}{2!} = 3$
    (cf. 정리 2.4)

경우의 수(Number of Cases)

- 같은 것이 있는 순열
  - 예제 2.20

대학 축구선수 10명을 일렬로 세우려고 한다. 이들 10명을 학년으로 구분했을 때, 1학년 1명, 2학년 2명, 3학년 4명, 4학년 3명이라면, 이들을 학년으로 구분하여 일렬로 세울 수 있는 방법은 몇 가지나 되겠는가?

- $n: 10$ (전체 10명)
- $n_1: 1$ (1학년 1명)
- $n_2: 2$ (2학년 2명)
- $n_3: 4$ (3학년 4명)
- $n_4: 3$ (4학년 3명)

$\therefore \frac{10!}{1!2!4!3!} = 12{,}600$ (cf. 정리 2.4)

경우의 수(Number of Cases)

- 분할(Partition)
  - 정의
    - 서로 다른 n개의 원소를 r개의 부분집합으로 구분하여 나열하는 경우의 순열

정리 2.5

n개의 대상물을 r개의 부분으로 나누는 경우 n_1개는 첫 번째 부분에, n_2개는 두 번째 부분 등으로 하는 분할방법의 수는

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

이다. 단, $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$이다.

- e.g., 집합 $\{a, e, i, o, u\}$를 4개와 1개의 원소로 분할하는 경우
  - $\{(a, e, i, o), (u)\}, \{(a, e, i, u), (o)\}, \{(a, e, o, u), (i)\}, \{(a, i, o, u), (e)\}, \{(e, i, o, u), (a)\}$

  $\therefore \binom{5}{4,1} = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$

경우의 수(Number of Cases)

- 분할(Partition)
  - 예제 2.21

7명의 대학원생을 3인용 객실 하나와 2인용 객실 둘에 투숙시키는 방법은 몇 가지가 있겠는가?

- n: 7 (전체 7명)
- n_1: 3 (3인용 객실 1개)
- n_2: 2 (2인용 객실 1개)
- n_3: 2 (2인용 객실 1개)

$$\therefore \binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

경우의 수(Number of Cases)

- 조합(Combination)
  - 정의
    - 어떤 대상물집합의 전체 또는 일부를 순서 구분 없이 선택하는 경우의 수
  - 특징
    - 한쪽에 r개의 원소, 다른 한쪽에 $(n-r)$개의 원소가 포함되도록 두 부분으로 분할하는 경우와 같음

정리 2.6

서로 다른 n개의 대상물에서 r개를 택하는 조합의 수는

$$_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

이다.

경우의 수(Number of Cases)

- 조합(Combination)
  - 예제 2.22

한 소년이 5가지의 컴퓨터 게임을 사려고 한다. 10개의 아케이드 게임 중 3게임, 5개의 스포츠 게임 중 2게임을 선택하는 방법은 모두 몇 가지인가?

1) 아케이드 게임 선택하는 방법
   - $n: 10$ (총 10게임)
   - $r: 3$ (선택해야 할 3게임)

$$\therefore\ {}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = 120$$

2) 스포츠 게임 선택하는 방법
   - $n: 5$ (총 5게임)
   - $r: 2$ (선택해야 할 2게임)

$$\therefore\ {}_{5}C_2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$$

$\therefore\ 120 \times 10 = 1{,}200$ (cf. 규칙 2.2)

경우의 수(Number of Cases)

- 조합(Combination)
  - 예제 2.23

$STATISTICS$라는 단어의 문자들로 만들 수 있는 가능한 배열의 가짓수는 얼마인가?

- n: 10 $(S, T, A, T, I, S, T, I, C, S)$
- n_1: 3 (S가 3개)
- n_2: 3 (T가 3개)
- n_3: 2 (I가 2개)
- n_4: 1 (A가 1개)
- n_5: 1 (C가 1개)

$\therefore \binom{10}{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3!3!2!1!1!} = 50{,}400$ (cf. 정리 2.5)

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)

정리 2.7

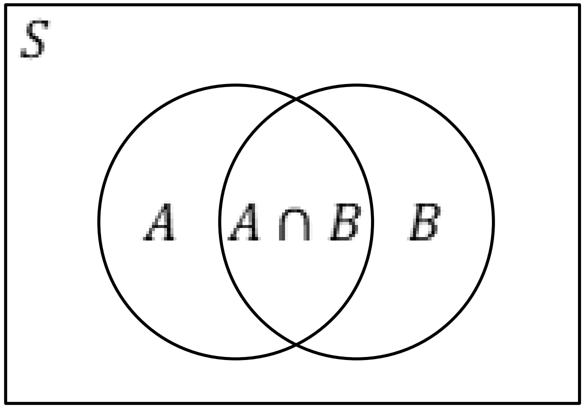
만일 A와 B를 어떤 두 사상이라 하면

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

이다.

- 증명

  - 그림 19와 같은 벤 다이어그램에서 $P(A \cup B)$는 $(A \cup B)$ 안에 있는 표본점의 확률의 합이다.
  - $P(A) + P(B)$는 사상 A의 확률과 사상 B의 확률의 합이다.
  - 따라서, $(A \cap B)$의 확률을 두 번 더한 셈이다.
  - 그러므로 $(A \cup B)$ 안에 있는 표본점의 확률을 구하기 위해서는 $P(A) + P(B)$에서 $P(A \cap B)$를 한 번 빼 주어야 하고, 그것이 $P(A \cup B)$가 된다.



<그림 19> 확률의 가법성

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)

따름정리 2.1

만일 A와 B가 서로 배반이면

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

이다.

- 증명

- 따름정리 2.1은 정리 2.7에서 유도된다.
- 만일 A와 B가 서로 배반이면, $A \cap B = \emptyset$이다.
- 따라서, $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$이므로 따름정리 2.1이 성립된다.

따름정리 2.2

만일 $A_1, A_2, \ldots, A_n$이 서로 배반이면

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

이다.

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)
  - 표본공간 S의 사상 $A_1, A_2, \dots, A_n$이 서로 배반이고, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$일 때, 사상들 모임 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$을 표본공간 S의 분할(Partition)이라고 함

따름정리 2.3

만일 $A_1, A_2, \dots, A_n$이 표본공간 S의 분할이면

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(S) = 1$$

이다.

정리 2.8

정리 2.7을 3가지 사상 A, B, C에 대하여 확장하면

$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

이다.

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)
  - 예제 2.29

졸업을 앞둔 존이 두 회사에 입사면접을 본 결과, 회사 A에 합격할 확률은 0.8, 회사 B에 합격할 확률은 0.6, 두 회사 모두 합격할 확률은 0.5로 판단된다. 이 두 회사 중 최소한 한 회사에 합격할 확률은 얼마인가?

- 회사 A에 합격할 확률: $P(A) = 0.8$
- 회사 B에 합격할 확률: $P(B) = 0.6$
- 두 회사 모두 합격할 확률: $P(A \cap B) = 0.5$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)
  - 예제 2.30

한 쌍의 주사위를 던졌을 때 나타난 두 눈의 합이 7이나 11이 될 확률은 얼마인가?

- 두 눈의 합이 7인 사상: $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$
- 두 눈의 합이 7일 확률: $P(A) = \frac{6}{36}$
- 두 눈의 합이 11인 사상: $B = \{(5,6), (6,5)\}$
- 두 눈의 합이 11일 확률: $P(B) = \frac{2}{36}$
- 두 회사 모두 합격할 확률: $P(A \cap B) = \emptyset$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)
  - 예제 2.31

새 자동차를 사려고 하는 어느 고객이 녹색, 백색, 적색, 청색의 자동차를 구입할 확률이 각각 0.09, 0.15, 0.21, 0.23이라고 할 때, 그 고객이 네 가지 색 중 어느 한 가지 색의 차를 구입할 확률은 얼마인가?

- 녹색, 백색, 적색, 청색의 차를 구입할 사상은 각각 G, W, R, B
- 녹색의 차를 구입할 확률: $P(G) = 0.09$
- 백색의 차를 구입할 확률: $P(W) = 0.15$
- 적색의 차를 구입할 확률: $P(R) = 0.21$
- 청색의 차를 구입할 확률: $P(B) = 0.23$
- 네 사상에 대한 확률: $P(G \cap W \cap R \cap B) = \emptyset$

$\therefore P(G \cup W \cup R \cup B) = P(G) + P(W) + P(R) + P(B) = 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23$
$= 0.68$

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)

정리 2.9

만일 사상 A와 A^c이 서로 여집합관계에 있으면 $P(A) + P(A^c) = 1$이 된다.

- 증명

- $A \cup A^c = S$이고, A와 A^c의 교집합은 ∅이므로

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

이 성립한다.

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)
  - 예제 2.32

자동차정비공이 하루 동안 정비하는 자동차의 수가 3, 4, 5, 6, 7, 8대 이상이 될 확률이 각각 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10, 0.07이라고 할 때, 그가 다음번 작업일에 적어도 5대 이상을 정비할 확률은 얼마인가?

- 적어도 5대의 차를 수리할 사상: $E = \{5, 6, 7, 8\}$
- 5대 미만의 차를 수리할 사상: $E^c = \{3, 4\}$
- $P(E) = 1 - P(E^c)$

$\therefore P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - (0.12 + 0.19) = 0.69$

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)
  - 예제 2.33 (1/2)

어느 공장에서 생산하는 컴퓨터 케이블의 규격은 $2{,}000 \pm 10mm$이다. 규격을 벗어나서 2,010mm를 초과하거나 1,990mm보다 작은 케이블을 생산할 확률은 동일한 것으로 알려져 있다. 규격에 맞는 제품을 생산할 확률은 0.99라고 한다.

(a) 임의로 고른 한 케이블이 규격보다 큰 제품일 확률은 얼마인가?

- 생산된 케이블이 규격에 맞는 사상: $M = \{x | 1{,}990 \le x \le 2{,}010\}$
- 생산된 케이블이 규격보다 작은 사상: $S = \{x | x < 1{,}990\}$
- 생산된 케이블이 규격보다 큰 사상: $L = \{x | 2{,}010 < x\}$
- $P(M) = 0.99$

$$\therefore P(S) = P(L) = \frac{1 - 0.99}{2} = 0.005$$

사상의 확률(Probability)

- 가법정리(Additive Rule)
  - 예제 2.33 (2/2)

어느 공장에서 생산하는 컴퓨터 케이블의 규격은 $2{,}000 \pm 10mm$이다. 규격을 벗어나서 2,010mm를 초과하거나 1,990mm보다 작은 케이블을 생산할 확률은 동일한 것으로 알려져 있다. 규격에 맞는 제품을 생산할 확률은 0.99라고 한다.

(b) 임의로 고른 한 케이블의 길이(X)가 1,990mm 이상일 확률은 얼마인가?

- 생산된 케이블이 규격에 맞는 사상: $M = \{x|1{,}990 \leq x \leq 2{,}010\}$
- 생산된 케이블이 규격보다 작은 사상: $S = \{x|x < 1{,}990\}$
- 생산된 케이블이 규격보다 큰 사상: $L = \{x|2{,}010 < x\}$

$\therefore P(X \geq 1{,}990) = 1 - P(S) = 1 - 0.005 = 0.995$

사상의 확률(Probability)

- 정의
  - 통계적 실험에서 특정 사상이 발생할 가능성에 대한 가중치 (Weight) 또는 확률(Probability)

정리 2.9

사상 A의 확률은 사상 A 안에 있는 모든 표본점들의 가중치의 합이다. 따라서,

$$0 \leq P(A) \leq 1, \qquad P(\emptyset) = 0, \qquad P(S) = 1$$

이다.

또한 $A_1, A_2, A_3, \ldots$ 가 상호배반인 사상이라면

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

이다.

사상의 확률(Probability)

- 예제 2.24

하나의 동전을 두 번 던지는 실험에서 적어도 한 번은 앞면이 나올 확률은 얼마인가?

- 표본공간: $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
- 만일 두 동전의 앞면과 뒷면의 발생확률이 같은 경우, 모든 표본점들의 발생확률이 같게 될 것이다.
- 따라서, 각 표본점에 확률 w를 할당하면, $4w = 1$이 되어, $w = \frac{1}{4}$가 된다.
- 적어도 한 번의 앞면이 나올 사상: $A = \{HH, HT, TH\}$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

사상의 확률(Probability)

- 예제 2.25

짝수가 홀수보다 2배만큼 더 많이 발생하는 주사위가 있다. 그 주사위를 한 번 던져 4보다 작은 수가 나올 사상을 E라 할 때, $P(E)$를 구하라.

- 표본공간: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 각 홀수에는 w, 각 짝수에는 $2w$의 확률을 할당하면, 확률의 합이 1이 되어야 하므로 $9w = 1$이 되어, $w = \frac{1}{9}$가 된다.
- 따라서, 각 홀수가 나올 확률은 $\frac{1}{9}$, 각 짝수가 나올 확률은 $\frac{2}{9}$
- $E = \{1, 2, 3\}$

$$\therefore P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

사상의 확률(Probability)

- 예제 2.26

예제 2.25에서 짝수가 나타날 사상을 A, 3으로 나누어질 수 있는 수가 나타날 사상을 B라 할 때, $P(A \cup B)$와 $P(A \cap B)$를 구하라.

- $A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6\}$이므로 $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$이고, $A \cap B = \{6\}$이다.

$\therefore P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9},\ P(A \cap B) = \frac{2}{9}$

규칙 2.3

어떤 실험에서 N개의 서로 다른 결과가 동일한 확률로 발생할 수 있고, 이 중 정확히 n개의 원소를 가지는 사상 A가 있으면, 사상 A의 확률은

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

이 된다.

사상의 확률(Probability)

- 예제 2.27

25명의 산업공학, 10명의 기계공학, 10명의 전기공학, 8명의 토목공학 학생들로 구성된 통계학 수업이 있다. 이 중 1명의 학생을 임의로 뽑을 때 그 학생이 (a) 산업공학 학생, (b) 토목공학이나 전기공학 학생일 확률을 각각 구하여라.

- 총 53명의 학생들 중 산업, 기계, 전기, 토목공학 학생을 각각 I, M, E, C

(a) 산업공학 학생을 뽑을 확률

- 53명 중 25명이 산업공학 학생

$$\therefore\ P(I) = \frac{25}{53}$$

(b) 토목공학이나 전기공학 학생을 뽑을 확률

- 토목공학 학생을 뽑을 확률: $P(C) = \frac{10}{53}$
- 전기공학 학생을 뽑을 확률: $P(E) = \frac{8}{53}$

$$\therefore\ P(C \cup E) = \frac{10}{53} + \frac{8}{53} = \frac{18}{53}$$

사상의 확률(Probability)

- 예제 2.28

한 패가 5장인 포커게임에서 2장의 에이스카드(A)와 3장의 잭카드(J)를 가지게 될 확률을 구하라.

- 한 패가 5장인 포커게임에서 2의 A 카드와 3장의 J 카드를 받게 될 사상: C
- 4장의 A 카드 중 2장의 카드가 선택되는 경우의 수: $n_A = \frac{4!}{2!2!} = 6$
- 4장의 J 카드 중 3장의 카드가 선택되는 경우의 수: $n_J = \frac{4!}{3!1!} = 4$
- 2장의 A 카드와 3장의 J 카드를 가지는 서로 다른 경우의 수: $n = 6 \times 4 = 24$ (cf. 규칙 2.2)
- 또한, 한 패가 5장인 경우의 수: $N = \frac{52!}{5!47!} = 2{,}598{,}960$

$$\therefore\ P(C) = \frac{n}{N} = \frac{24}{2{,}598{,}960} = 0.9 \times 10^{-5}$$

사상의 확률(Probability)

- 확률 부여 방법
  - 객관적 방법
    - 도수(Frequency)
      - 어떤 사상이 실험으로부터 발생한 횟수
        - e.g., 동전을 25번 던져서 앞면이 나온 횟수가 16번이면, '앞면'의 도수는 16

동전	도수
앞면	16
뒷면	9
합계	25

    - 상대도수(Relative Frequency)
      - 도수를 전체 원소의 수로 나눈 값
        - e.g., 동전을 25번 던져서 앞면이 나온 횟수의 상대도수는 $\frac{16}{25} = 0.64$

동전	상대도수
앞면	0.64
뒷면	0.36
합계	1

      - 각 결과의 발생확률이 동일하지 않은 경우, 사전지식 및 실험적 근거를 기반으로 확률을 할당하는 방식

사상의 확률(Probability)

- 확률 부여 방법
  - 주관적 방법
    - 무차별(Indifference) 접근법
      - 특정 근거가 없는 경우, 가능한 모든 사상에 동일한 확률을 할당하는 방식
        - e.g., 주사위가 공정하게 보이는 경우, 여섯 면에 대해 $\frac{1}{6}$ 의 확률 부여
    - 주관적(Subjective) 정의
      - 객관적 근거가 부족한 경우, 개인의 경험 및 기타 간접적인 정보를 기반으로 확률을 할당하는 방식
        - e.g., 자신의 경험을 기반으로 한 비 올 확률 예측

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

조건부 확률(Conditional Probability)

- 정의

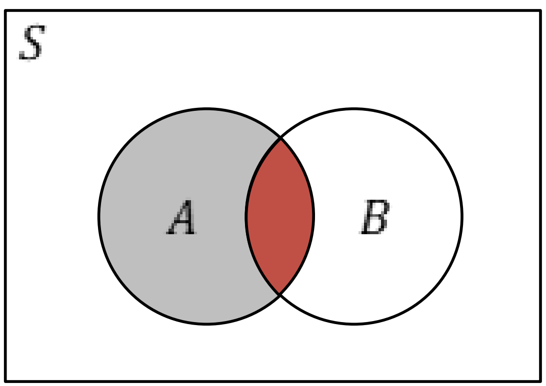
정의 2.10

A가 주어졌을 때 B가 일어날 **조건부 확률**은 $P(B|A)$로 표시하며, $P(A) > 0$이면,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

로 정의된다.

- 증명



<그림 20> $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 예제 2.34

정규스케줄에 따라 정시에 비행기가 출발할 확률은 $P(D) = 0.83$이고, 정시에 도착할 확률은 $P(A) = 0.82$라 하자. 그리고 정시에 출발하여 정시에 도착할 확률은 $P(D \cap A) = 0.78$라 하자.

(a) 비행기가 정시에 출발했을 때 정시에 도착할 확률을 구하라.

$$\therefore P(A|D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

(b) 비행기가 정시에 도착했을 때 정시에 출발했을 확률을 구하라.

$$\therefore P(D|A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 예제 2.35

어느 방직공장에서 생산하는 옷감에는 두 가지 형태의 불량, 즉 길이불량과 직조불량이 있다고 한다. 과거의 자료로부터 옷감의 10%는 길이불량, 5%는 직조불량, 0.8%는 두 불량 모두를 가지고 있다고 한다. 생산된 옷감 하나를 임의로 선택하여 검사한 결과 길이불량이었다고 할 때, 이것이 직조불량일 확률은 얼마인가?

- 길이불량일 사상을 L, 직조불량일 사상을 T라고 하자.

$$\therefore P(T \mid L) = \frac{P(L \cap T)}{P(L)} = \frac{0.008}{0.1} = 0.08$$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 독립사상(Independent Event)
  - 정의

정의 2.11

$P(B|A) = P(B)$이거나 $P(A|B) = P(A)$이면 두 사상 A와 B는 **독립**이다.

  - 예제

주사위를 한 번 던져서 4 이하가 나오는 사상을 A라고 하고 짝수가 나오는 사상을 B라고 하면, A와 B는 독립인가 종속인가?

- 4 이하가 나오는 사상: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- 짝수가 나오는 사상: $B = \{2, 4, 6\}$
- $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore P(B \mid A) = \mathrm{P(B)}$이므로 사상 A와 B는 독립

조건부 확률(Conditional Probability)

- 종속사상(Dependent Event)
  - 정의

정의 2.11

$P(B|A) \neq P(B)$이거나 $P(A|B) \neq P(A)$이면 두 사상 A와 B는 **종속**이다.

  - 예제

주사위를 한 번 던져서 3 이하가 나오는 사상을 A라고 하고 짝수가 나오는 사상을 B라고 하면, A와 B는 독립인가 종속인가?

- 3 이하가 나오는 사상: $A = \{1, 2, 3\}$
- 짝수가 나오는 사상: $B = \{2, 4, 6\}$
- $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore P(B \mid A) \neq \mathrm{P(B)}$이므로 사상 A와 B는 종속

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 정의

정의 2.10

어떤 실험에서 두 사상 A와 B가 동시에 발생할 수 있다면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

가 된다.

- 사상 $A \cap B$와 $B \cap A$는 같음
- 따라서, $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B)$도 성립

조건부 확률(Conditional Probability)

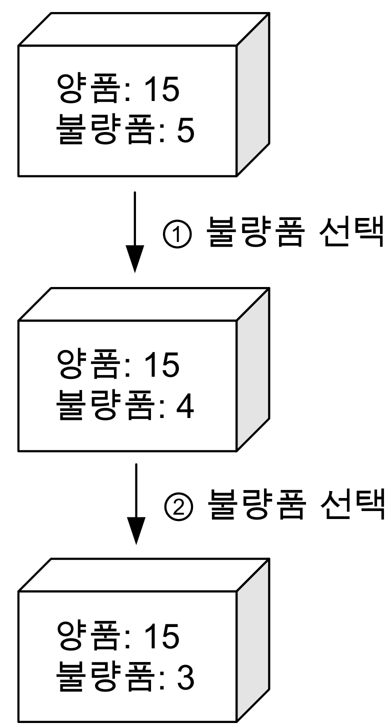
- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 예제 2.36

20개의 퓨즈가 들어 있는 상자가 있는데, 그 중 5개가 불량품이라고 가정하자. 이 상자로부터 2개의 퓨즈를 연속적으로 비복원추출할 때, 2개의 퓨즈가 모두 불량품일 확률은 얼마인가?

- 첫 번째 퓨즈가 불량품일 사상: A
- 두 번째 퓨즈가 불량품일 사상: B
- $A \cap B$는 A가 일어난 후에 B가 일어나는 사상임

- 첫 번째 퓨즈가 불량품일 확률: $P(A) = \frac{5}{20}$
- 두 번째 퓨즈가 불량품일 확률: $P(B) = \frac{4}{19}$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{5}{20} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

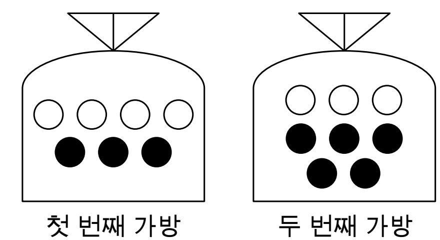


조건부 확률(Conditional Probability)

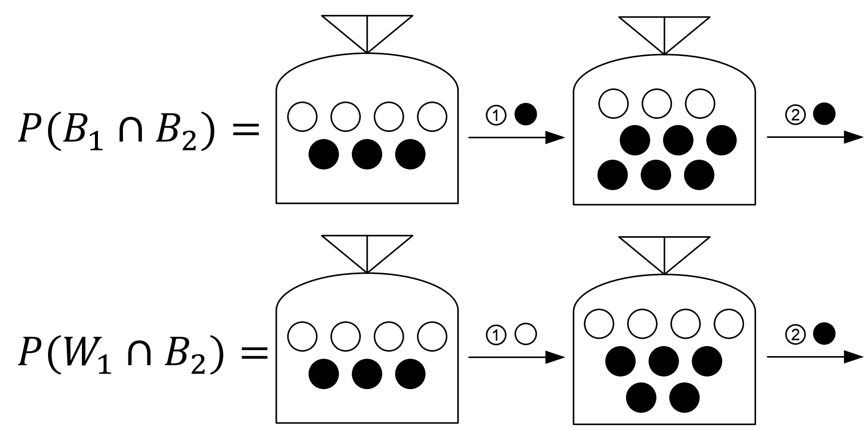
- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 예제 2.37

첫 번째 가방에는 4개의 흰 공과 3개의 검은 공이 들어 있고, 두 번째 가방에는 3개의 흰 공과 5개의 검은 공이 들어 있다. 첫 번째 가방에서 공 하나를 꺼낸 후 보지 않고 그것을 두 번째 가방에 집어 넣은 다음, 두 번째 가방에서 하나의 공을 꺼낼 때 그 공이 검은 공일 확률은 얼마인가?

- 첫 번째 가방에서 검은 공을 뽑을 사상: B_1
- 두 번째 가방에서 검은 공을 뽑을 사상: B_2
- 첫 번째 가방에서 흰 공을 뽑을 사상: W_1



$$\therefore\ P(B_1 \cap B_2) + P(W_1 \cap B_2)$$
$$= P(B_1)P(B_2|B_1) + P(W_1)P(B_2|W_1)$$
$$= \frac{3}{7} \times \frac{6}{9} + \frac{4}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{38}{63}$$



조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)

정리 2.11

만일 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$이면 두 사상 A와 B는 독립이고, 그 역도 성립한다. 따라서, 독립인 두 사상이 동시에 일어날 확률은 단순히 각각의 확률의 곱을 구하면 된다.

- 예제 2.38

어느 조그마한 도시에는 비상시에 대비해 소방차 한 대와 앰뷸런스 한 대를 보유하고 있다. 소방차가 필요할 때 바로 사용할 수 있을 확률이 0.98이고, 앰뷸런스가 필요할 때 바로 사용할 수 있을 확률이 0.92라고 한다. 화재가 나서 부상자가 발생했을 때 소방차와 앰뷸런스를 모두 사용할 수 있는 확률을 구하라.

- 소방차를 사용할 수 있는 사상: A
- 앰뷸런스를 사용할 수 있는 사상: B

$\therefore\ P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.98 \times 0.92 = 0.9016$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 예제 2.39

어느 전기시스템이 그림 21과 같이 4개의 부품으로 구성되어 있다. A와 B가 작동하고, C나 D가 작동하면 이 시스템은 작동한다. 각 부품의 신뢰도(작동할 확률)가 그림에 나와 있다. (a) 이 시스템이 작동할 확률과, (b) 이 시스템이 작동한다고 할 때 C가 작동하지 않을 확률을 구하라. 각 부품들은 독립적으로 작동한다고 가정한다.

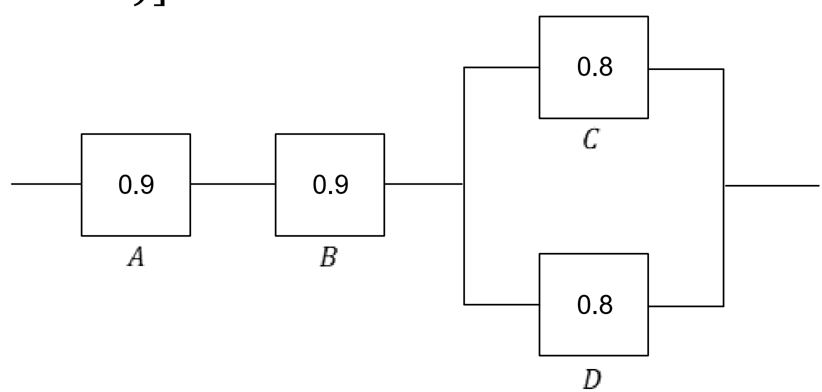
- 각 부품의 작동이 서로 독립적임 (cf. 정리 2.11)

(a) 이 시스템이 작동할 확률

$$\therefore P[A \cap B \cap (C \cup D)] = P(A)P(B)P(C \cup D) = P(A)P(B)[1 - P(C^c \cap D^c)]$$
$$= P(A)P(B)[1 - P(C^c)P(D^c)] = (0.9)(0.9)[1 - (1 - 0.8)(1 - 0.8)] = 0.7776$$

(b) 이 시스템이 작동할 때 C가 작동하지 않을 확률

$$\therefore \ P = \frac{P(\text{시스템은 작동하나 } C\text{는 작동 안함})}{P(\text{시스템 작동})}$$
$$= \frac{P(A \cap B \cap C^c \cap D)}{P(\text{시스템작동})} = \frac{(0.9)(0.9)(1 - 0.8)(0.8)}{0.7776} = 0.1667$$



<그림 21> 예제 2.39의 전기시스템

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)

정리 2.12

어떤 실험에서 사상 $A_1, A_2, \cdots, A_k$가 발생가능하다면

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

이다. 만일 사상 $A_1, A_2, \cdots, A_k$가 독립이면

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_k)$$

가 된다.

정의 2.12

사상의 집합 $A = \{A_1, \cdots, A_n\}$의 임의의 부분집합 $A_{i1}, \cdots, A_{ik}, k \le n$ 에 대해

$$P(A_{i1} \cap \cdots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdots P(A_{ik})$$

가 성립할 때 사상의 집합 A는 서로 독립이라고 한다.

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule)
  - 예제 2.40

한 벌의 카드에서 3장의 카드를 연속적으로 비복원추출하는 실험에서 첫 번째 카드가 붉은색 A일 사상을 A_1, 두 번째 카드가 10이나 J일 사상을 A_2, 세 번째 카드가 3보다 크고 7보다 작을 사상을 A_3라 할 때, 사상 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$가 일어날 확률을 구하라.

- 카드는 총 52장
- 붉은색 A를 뽑을 확률: $P(A_1) = \frac{2}{52}$
- 10이나 J를 뽑을 확률: $P(A_2|A_1) = \frac{8}{51}$
- 3보다 크고 7보다 작은 카드를 뽑을 확률: $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50}$
  - 4, 5, 6 각각 4장씩

$$\therefore\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

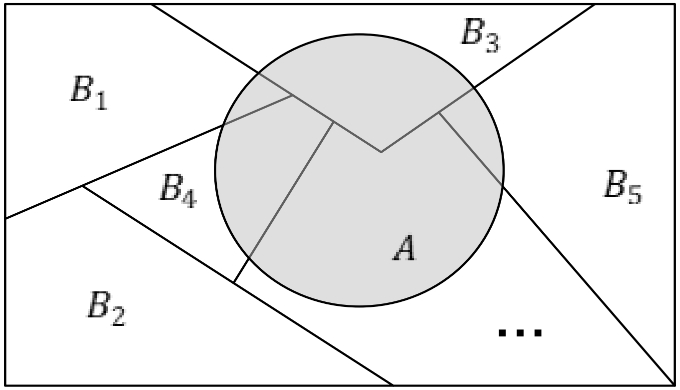
$$= \frac{2}{52} \times \frac{8}{51} \times \frac{12}{50} = \frac{8}{5{,}525}$$

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 전확률의 정리(Theorem of Total Probability)
  - 정의
    - 서로 배반인 사상 $B_1, B_2, \cdots, B_n$이 표본공간 S의 분할일 때, 사상 A를 구하는 공식



<그림 22> 표본공간 S의 분할

정리 2.13

사상 $B_1, B_2, \cdots, B_k$를 표본공간 S의 분할이라 하고, $P(B_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, k$ 라 하면, S의 임의의 사상 A에 대하여

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$$

가 성립한다.

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 전확률의 정리(Theorem of Total Probability)
  - 증명

• 그림 22와 같은 벤 다이어그램에서 사상 A는 서로 배반인 사상 $B_1 \cap A, B_2 \cap A, \cdots, B_k \cap A$의 합집합, 즉 $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \cdots \cup (B_k \cap A))$임을 알 수 있다. 따름정리 2.2와 정리 2.10에 의해서

$$P(A) = P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \cdots \cup (B_k \cap A)]$$

$$= P(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \cdots \cup (B_k \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$$

가 성립한다.

베이즈 정리(Bayes' Rule)

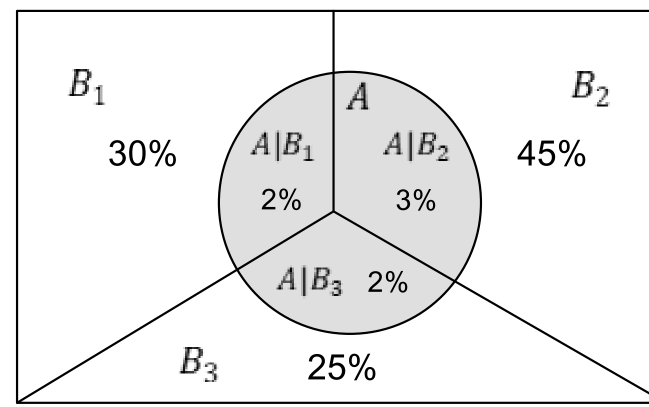
- 전확률의 정리(Theorem of Total Probability)
  - 예제 2.41

3대의 기계 B_1, B_2, B_3가 각각 전체생산량의 30%, 45%, 25%를 생산하는 어느 조립 공장에서 과거의 경험으로부터 각 기계의 불량품 제조율이 2%, 3%, 2%임이 알려져 있다. 이제 완제품 중에서 임의로 하나를 선택했을 때, 그것이 불량품일 확률은 얼마인가?

- 그 제품이 불량품일 사상: A
- 그 제품이 기계 B_1에서 제조되었을 사상: B_1
- 그 제품이 기계 B_2에서 제조되었을 사상: B_2
- 그 제품이 기계 B_3에서 제조되었을 사상: B_3

- 전확률의 정리를 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\therefore P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$
$$= 0.3 \times 0.02 + 0.45 \times 0.03 + 0.25 \times 0.02$$
$$= 0.006 + 0.0135 + 0.005 = 0.0245$$



<그림 23> 예제 2.41

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 정의
  - 사전 확률(Prior Probability)이 주어졌을 때 사후 확률(Poster Probability)을 구하는 공식
    - 사전 확률: $P(A_i),\ i = 1, \cdots, n$
      - 현재 가진 정보를 통해 정한 초기 확률
    - 사후 확률: $P(A_i|B)$
      - 추가된 정보로부터 사전 정보를 수정한 확률

정리 2.14

사상 $B_1, B_2, \cdots, B_k$가 표본공간 S의 분할이고, 모든 $i(i = 1, 2, \cdots, k)$에 대하여 $P(B_i) \neq 0$이라 하자. 그리고 임의의 사상 A에 대하여 $P(A) \neq 0$이라 하자. 그러면 각 정수값 $r(r = 1, 2, \cdots, k)$에 대하여

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

이 성립한다.

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 증명

- 조건부 확률의 정의에 의하여

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)}$$

이고, 분모에 정리 2.13을 적용하면 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

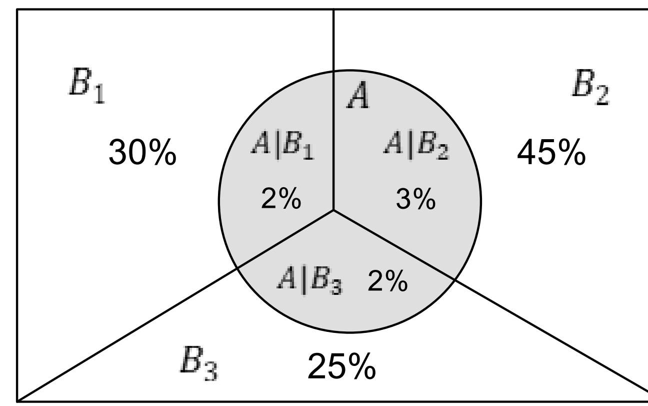
베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 예제 2.42

3대의 기계 B_1, B_2, B_3가 각각 전체생산량의 30%, 45%, 25%를 생산하는 어느 조립 공장에서 과거의 경험으로부터 각 기계의 불량품 제조율이 2%, 3%, 2%임이 알려져 있다. 이제 완제품 중에서 불량품을 선택했을 때, 그 제품이 기계 B_3에서 제조되었을 확률은 얼마인가?

- 그 제품이 불량품일 사상: A
- 그 제품이 기계 B_1, B_2, B_3에서 제조된 사상: B_1, B_2, B_3
- 베이즈 정리를 이용하면 다음과 같다.

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)}$$



<그림 23> 예제 2.41

- 여기에 예제 2.41에서 구한 값을 대입하면

$$\therefore P(B_3|A) = \frac{0.005}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49} ≒ 0.21$$

- 같은 방식으로 기계 B_1의 경우 약 0.24, 기계 B_2의 경우 약 0.55이다.
- 따라서, 불량품이 선택되었을 때 그 제품이 기계 B_3에서 제조되지는 않았을 것이다.

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 예제 2.43

어느 제조업체에서 제품 개발 시 세 가지 분석법을 적용하고 있는데, 비용의 문제로 분석법 1, 2, 3을 제품의 30%, 20%, 50%에 각각 적용하고 있다. 세 가지 방법에 따라 불량률은 다음과 같이 각각 다른 것으로 알려졌다.

$$P(D|P_1) = 0.01, P(D|P_2) = 0.03, P(D|P_3) = 0.02$$

여기에서 $P(D|P_j)$는 분석법 j였을 때 불량품일 확률을 나타낸다. 한 제품을 임의로 선택한 후 검사한 결과 불량이었다면, 어느 분석법을 사용했을 가능성이 가장 많은가?

- $P(P_1) = 0.30, P(P_2) = 0.20, P(P_3) = 0.50$이고, 우리가 구할 확률은 $P(P_j|D)$이다.
- 정리 2.14의 베이즈 정리로부터 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$P(P_1|D) = \frac{P(P_1|D)}{P(P_1)P(D|P_1) + P(P_2)P(D|P_2) + P(P_3)P(D|P_3)} = \frac{0.30 \times 0.01}{0.3 \times 0.01 + 0.20 \times 0.03 + 0.50 \times 0.02}$$

$$= \frac{0.003}{0.019} = 0.158$$

- 비슷한 방법으로 $P(P_2|D) = \frac{0.03 \times 0.01}{0.019} = 0.316,\ P(P_3|D) = \frac{0.02 \times 0.50}{0.019} = 0.526$이다.
- 따라서, 제품이 불량이었을 때 분석법 3일 조건부 확률이 세 가지 중 가장 크므로, 분석법 3을 사용했을 가능성이 가장 크다.

Thanks!

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)