확률 및 통계학

-3장 확률변수와 확률분포(보충)-

이 하 늘(haneul@pel.sejong.ac.kr)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 확률변수의 개념
- 이산형 확률분포
- 연속형 확률분포
- 결합확률분포

목 차

- 확률변수의 개념
- 이산형 확률분포
- 연속형 확률분포
- 결합확률분포

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable)

정의 3.1

확률변수는 표본공간 내의 각 원소에 하나의 실수 값을 대응시키는 함수로 정의된다.

- 특징
  - 확률변수는 주로 대문자로 나타내고, 그에 대응되는 하나의 값은 소문자로 나타냄
    - e.g., 확률변수 X → 대응되는 값 x
  - 확률변수 X의 모든 값들은 표본공간의 부분집합이 되는 사상을 나타냄
  - 확률변수에는 이산형 확률변수와 연속형 확률변수가 존재함
    - 이산형 확률변수(Discrete Random Variable)
      - 셀 수 있는 유한한 값을 가지는 확률변수
    - 연속형 확률변수(Continuous Random Variable)
      - 셀 수 없는 무한한 값을 가지는 확률변수

확률변수의 개념

- 예제 3.1

<u>4개의 붉은 공(R)과 3개의 검은 공(B)</u>이 들어 있는 항아리에서 **<u>연속적으로 2개의 공을 비복원추출</u>**하는 실험에서 **<u>Y를 붉은 공의 개수</u>**라 할 때, 출현가능한 결과와 확률변수 Y의 값 y를 구하라.

- $S = \{\text{BB, BR, RB, RR}\}$
- $Y = \{0, 1, 2\}$

표본공간(S)	Y
BB	0
BR	1
RB	1
RR	2

- 위의 실험에서 붉은 공이 선택될 확률은?
  - $P(Y = 0) = \frac{1}{4}$
  - $P(Y = 1) = \frac{1}{2}$
  - $P(Y = 2) = \frac{1}{4}$

확률변수의 개념

- 예제 3.2

공구보관소의 직원이 **3명의 공장 종업원**들에게 안전헬멧을 임의로 꺼내 주었을 경우, **스미스(S), 존스(J), 그리고 브라운(B)의 순서**로 헬멧을 받을 때, 헬멧을 받는 가능한 순서들을 나열하고, ***M*을 헬멧이 원래 주인에게 지급되는 경우의 수**라 할 때, 확률변수 M의 값 m을 구하라.

- $S = \{\text{JSB, JBS, SBJ, JSB, BJS, SJB}\}$
- $M = \{0, 1, 3\}$

표본공간(S)	M
JBS	0
BSJ	0
SBJ	1
JSB	1
BJS	1
SJB	3

- 헬멧이 원래 주인에게 지급될 확률은?
  - $P(M = 0) = \frac{1}{3}$
  - $P(M = 1) = \frac{1}{2}$
  - $P(M = 3) = \frac{1}{6}$

확률변수의 개념

- 가변수(Dummy Variable)
  - 정의
    - 객관적인 통계 수치로 나타내기 어려운 범주형 변수를 이산형 혹은 연속형 변수로 변환하여 나타내는 변수
      - 범주형 변수: 실험 결과가 숫자가 아닌 몇 개의 범주 혹은 항목으로 나타나는 정성적 변수

성별
여성
남성
남성
여성
여성
남성
…

성별
1
0
0
1
1
0
…

<가변수 예시 1>

흡연여부
비흡연
흡연
비흡연
비흡연
흡연
비흡연
…

흡연여부
0
1
0
0
1
0
…

<가변수 예시 2>

확률변수의 개념

- 이산표본공간(Discrete Sample Space)

정의 3.2

표본공간이 유한개 혹은 셀 수 있는 무한개 원소로 이루어졌을 때 **이산표본공간 (Discrete Sample Space)**이라 한다.

- 계수자료(Count Data)를 나타냄
  - e.g., 불량품 개수, 사고횟수 등

- 예제 3.3

공장에서 생산되는 부품들을 불량이나 양품으로 판정한다고 하고 확률변수 X를 정의하라.

- $X = \begin{cases} 1, \text{부품이 불량일 때} \\ 0, \text{부품이 양품일 때} \end{cases}$
- 두 개의 가능한 값을 0과 1로 표현하는 확률변수를 **베르누이 확률변수(Bernoulli random variable)**라고 함

확률변수의 개념

- 이산표본공간(Discrete Sample Space)
  - 예제 3.4

생산품의 합격 또는 불합격 판정을 위해, 12개의 불량품이 있는 100개의 제품에서 **<u>10개를 독립적으로 추출</u>**하는 샘플링 검사법(Sampling plan)을 사용하는 경우, 10개 제품 표본에서 발견되는 불량품의 수를 확률변수 X일 때, X가 가질 수 있는 값을 구하라.

- $X = \{0, 1, 2, \cdots, 9, 10\}$

  - 예제 3.5

하나의 불량품이 발견될 때까지 공정으로부터 표본을 추출하는 샘플링 검사법에서, **<u>불량품이 발견될 때까지 추출한 제품의 수를 나타내는 확률변수를 X</u>**라고 하자. 양품을 N, 불량품을 D로 나타낼 때, 표본공간을 나타내라.

- $X = 1$이면 $S = \{\mathrm{D}\}$, $X = 2$이면 $S = \{ND\}$, $X = 3$이면 $S = \{NND\}$, $\cdots$

확률변수의 개념

- 연속표본공간(Continuous Sample Space)

정의 3.3

표본공간이 실선의 어떤 구간 내의 모든 수를 포함할 때 **연속표본공간(Continuous Sample Space)**이라 한다.

  - 측정자료(Measured Data)를 나타냄
    - e.g., 높이, 무게, 온도, 거리, 수명 등

- 예제 3.6

통신판매 광고에 반응하는 사람들의 **비율**을 X라고 하면, 확률변수 X의 값 x의 범위를 구하라.

  - $0 \leq x \leq 1$

- 예제 3.7

과속탐지 카메라에 적발되는 과속 차량들 사이의 시간간격을 확률변수X라고 하면, X의 값 x의 범위를 구하라.

  - $x \geq 0$

목 차

- 확률변수의 개념
- 이산형 확률분포
- 연속형 확률분포
- 결합확률분포

이산형 확률분포

- 확률분포(Probability Distribution)
  - 정의
    - 표본공간에 정의된 확률을 통해 확률변수의 값 혹은 확률변수의 집합에 대한 확률을 표현한 것
  - 이산형 확률분포(Discrete Probability Distribution)

정의 3.4

모든 x에 대해 순서쌍 $(x, f(x))$의 집합이 다음 조건을 만족하면 이를 **이산형 확률변수 X의 확률함수, 확률질량함수(PMF, Probability Mass Function), 혹은 확률분포**라고 한다.

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

이산형 확률분포

- 예제 3.8

상점에 진열된 **20대의 노트북 중에 불량품이 3대 포함**되어 있는 경우, 어느 학교에서 **이 중 임의로 2대를 구입**했을 때, 불량품 개수의 확률분포를 구하라.

- 학교에서 구입한 노트북 중 불량품의 수: 확률변수 X
- X의 값 x는 0, 1, 2 중에서 값을 취할 수 있음에 따라, 확률분포는 다음과 같이 구할 수 있음

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{17}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{68}{95},\ f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{17}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{51}{190}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{0}}{\binom{20}{2}} = \frac{3}{190}$$

- X의 확률분포는 다음과 같이 정리할 수 있음

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{68}{95}, & x = 0 \\ \dfrac{51}{190}, & x = 1 \\ \dfrac{3}{190}, & x = 2 \end{cases}$$

이산형 확률분포

- 예제 3.9

어느 대리점에서 **판매된 외제차의 50%에 디젤엔진이 장착**되었다고 할 때, 이 대리점에서 다음에 판매될 **4대의 외제차 가운데 디젤엔진이 장착된 차의 수의 확률분포에 대한 식**을 구하라.

- 디젤엔진이 장착된 확률 : $\frac{1}{2}$, 가솔린엔진이 장착된 확률 : $\frac{1}{2}$
- 표본공간에서 표본점의 개수 : $2^4 = 16$ 개

- 4대의 외제차 중에 디젤엔진이 장착된 경우가 x라면, 4대의 외제차 중에 가솔린엔진이 장착된 경우는 $4 - x$
- 4대의 외제차 중에 디젤모델을 고르는 경우의 수는 $\binom{4}{x}$로 표현할 수 있으며, 따라서 확률분포에 대한 식은 다음과 같이 구할 수 있음

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}}{16}, \qquad x = 0,1,2,3,4$$

이산형 확률분포

- 누적분포(Cumulative Distribution)
  - 확률변수 X의 값이 어떤 실수 x보다 작거나 같은 확률을 계산해야 하는 경우, 모든 실수 x에 대한 $F(x) = P(X \le x)$를 확률변수 X의 누적분포라고 함
  - 누적분포는 확률적인 추론 및 결정 등에 활용할 수 있음

정의 3.5

확률분포 $f(x)$를 가지는 이산형 확률변수 X의 **누적분포함수(CDF, Cumulative Distribution Function)** $F(x)$는

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} f(t), -\infty < x < \infty$$

로 주어진다.

이산형 확률분포

• 예제 3.10

예제 3.9에서 확률변수 X의 누적분포를 구하라. 그리고 $F(x)$를 사용하여 $f(2) = \frac{3}{8}$이 됨을 증명하라.

- 디젤엔진 외제차를 고르는 확률변수 X의 확률분포
  - $f(0) = \frac{1}{16}, f(1) = \frac{1}{4}, f(2) = \frac{3}{8}, f(3) = \frac{1}{4}, f(4) = \frac{1}{16}$

- 누적분포를 구하면

$$F(0) = f(0) = \frac{1}{16}$$

$$F(1) = f(0) + f(1) = \frac{5}{16}$$

$$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16}$$

$$F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{15}{16}$$

$$F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$

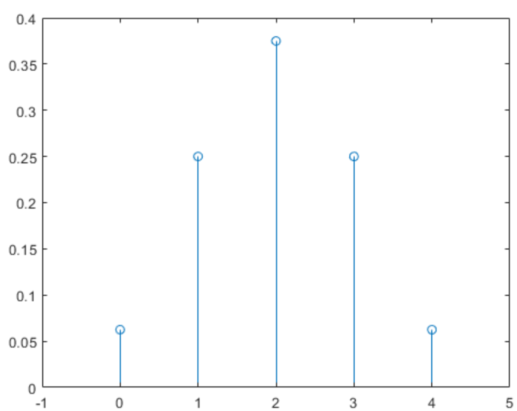
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16}, & 3 \le x < 4 \\ 1, & 4 \le x \end{cases}$$

$$f(2) = F(2) - F(1) = \frac{11}{16} - \frac{5}{16} = \frac{3}{8}$$

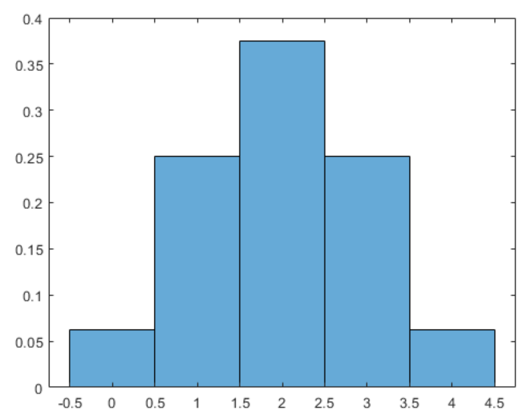
이산형 확률분포

- 그래프 종류

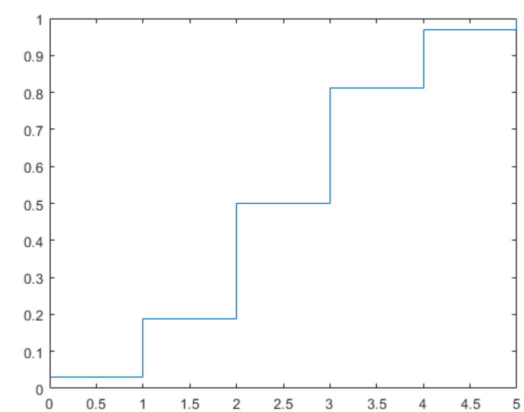
  1. 확률질량함수도(Probability Mass Function Plot)
     - 확률 변수의 값들을 가시적으로 표현함으로써, 확률분포를 쉽게 파악 가능
  2. 확률히스토그램(Probability Histogram)
     - 막대 면적을 이용하여 특정 구간에서 발생할 확률을 추정 가능
  3. 이산형 누적분포(Discrete Cumulative Distribution)
     - 확률 변수가 특정 값 이하일 확률을 직관적으로 파악 가능



<그림 3.1> 확률질량함수도



<그림 3.2> 확률히스토그램



<그림 3.3> 이산형 누적분포

목 차

- 확률변수의 개념
- 이산형 확률분포
- 연속형 확률분포
- 결합확률분포

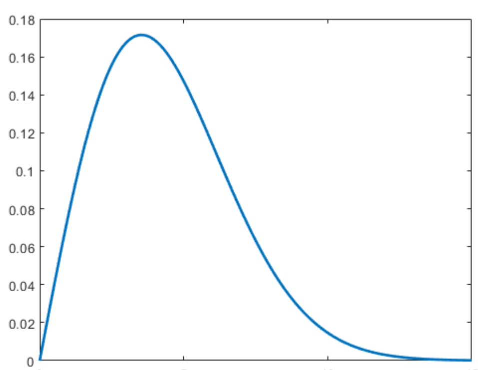
연속형 확률분포

- 연속형 확률분포(Continuous Probability Distribution)
  - 연속형 확률변수와 이에 대응하는 확률을 표현한 것

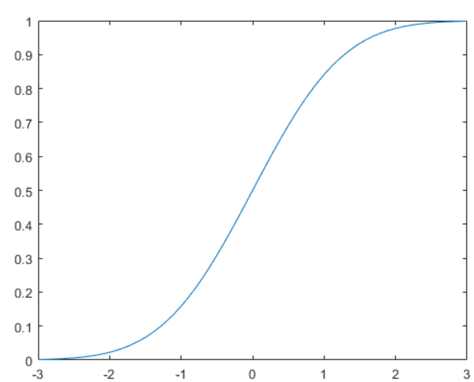
정의 3.6

다음 조건이 만족되면 $f(x)$를 실수의 집합 R 상에서 정의된 연속형 확률변수에 대한 **확률밀도함수(PDF, Probability Density Function)**라고 한다.

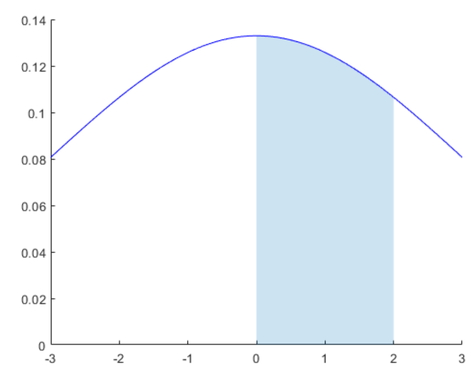
1. 모든 $x \in R$에 대하여 $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$



<그림 3.4(1)> 확률밀도함수 예시1



<그림 3.4(2)> 확률밀도함수 예시2



<그림 3.5> $P(0 < X < 2)$ 예시

연속형 확률분포

• 예제 3.11

제어실험에서 반응온도(˚C)변화에 따른 오차는 다음과 같은 확률분포를 가지는 연속확률변수 X라고 가정하자.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (a) $f(x)$가 확률밀도함수임을 증명하라.
  - $f(x) \geq 0$임은 명확함에 따라, 다음과 같이 조건을 확인하여 증명할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{9}\bigg|_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

- (b) $P(0 < X \leq 1)$을 구하라.

$$\mathrm{P}(0 < X \leq 1) = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{9}\bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{9}$$

연속형 확률분포

- 누적분포함수(CDF, Cumulative Distribution Function)

정의 3.7

확률밀도함수가 $f(x)$인 연속형 확률변수 X의 **누적분포함수** $F(x)$는 다음과 같다.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

- 정의 3.7에 의해 알 수 있는 사실
  - $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
  - 누적분포함수가 미분이 가능하면, $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

연속형 확률분포

- 예제 3.12

예제 3.11의 확률밀도함수에 대하여 <u>**F(x)를 구하고, 그것을 이용하여 P(0 < X ≤ 1)을 구하라**</u>.

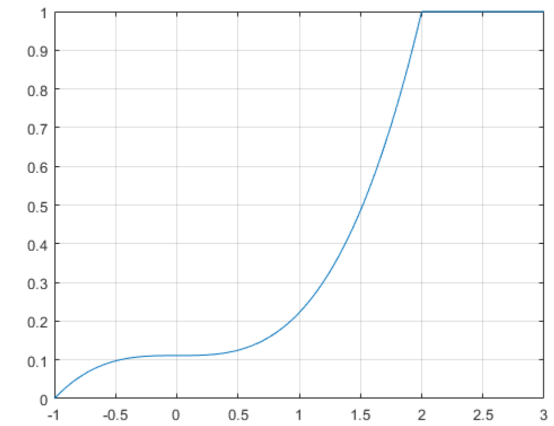
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $-1 < x < 2$에 대하여

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dx = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{t^3}{9}\Big|_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{9}$$

따라서,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{x^3+1}{9}, & -1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$



<그림 3.6> 연속형 누적분포함수

- $P(0 < X \le 1)$를 구하게 되면 다음과 같이 구할 수 있으므로, 예제 3.11의 결과와 같다.

$$P(0 < X \le 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

연속형 확률분포

- 예제 3.13

프로젝트를 입찰에 부치고 입찰가를 예상할 때, **<u>예상치를 b</u>**라고 하면, **<u>낙찰가 y</u>**에 대한 밀도함수는 다음과 같다.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{5}{8b}, & \frac{2}{5}b \le y \le 2b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

<u>$F(y)$를 구하고, 낙찰가가 예상치 b보다 작을 확률</u>을 구하라.

- $\frac{2}{5}b \le y \le 2b$에 대하여,

$$F(y) = \int_{\frac{2b}{5}}^{y} \frac{5}{8b}\, dt = \frac{5t}{8b}\Big|_{\frac{2b}{5}}^{y} = \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}$$

이다. 따라서,

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{2b}{5} \\ \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}, & \frac{2b}{5} \le y < 2b \\ 1, & y \ge 2b \end{cases}$$

낙찰가가 예상치보다 작을 확률은 다음과 같다.

$$P(Y \le b) = F(b) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

목 차

- 확률변수의 개념
- 이산형 확률분포
- 연속형 확률분포
- 결합확률분포

결합확률분포

- 결합확률분포(Joint Probability Distribution) (1/2)
  - 정의
    - 여러 개의 확률변수들의 결과를 동시에 취급하는 경우, 확률변수의 값에 대응하는 확률을 표현한 것
  - 필요성
    1. 특정 대상을 분석할 때, 다수의 확률변수들에 대한 값의 분포를 확인하여, 변수 간 상관관계를 알기 위함
       - 예시
         - 성별(X)과 선호하는 영화 장르(Y)의 상관관계를 분석하는 경우
         - 학생들의 공부 시간(X)과 기말고사 점수대(Y)의 상관관계를 분석하는 경우
    2. 확률변수 간 상관관계를 고려하여 미래의 일을 예측하기 위함
       - 예시
         - 마케팅 회사에서, 마케팅 비용(X)과 제품 판매율(Y)의 상관관계를 분석하여 마케팅 전략을 세우는 경우

결합확률분포

- 결합확률분포(Joint Probability Distribution) (2/2)
  - 함수의 종류
    - 결합확률질량함수(Joint PMF, Joint Probability Mass Function)
      - **이산형인 여러 개의 확률변수**의 결과를 동시에 취급하는 경우, 확률변수의 값에 대응하는 확률을 표현한 것
      - 예시
        - 성별(X)과 선호하는 영화 장르(Y)의 상관관계를 분석하는 경우
    - 결합확률밀도함수(Joint PDF, Joint Probability Density Function)
      - **연속형인 여러 개의 확률변수**의 결과를 동시에 취급하는 경우, 확률변수의 값에 대응하는 확률을 표현한 것
      - 예시
        - 학생들의 공부 시간(X)과 기말고사 점수대(Y)의 상관관계를 분석하는 경우
        - 마케팅 회사에서, 마케팅 비용(X)과 제품 판매율(Y)의 상관관계를 분석하여 마케팅 전략을 세우는 경우

결합확률분포

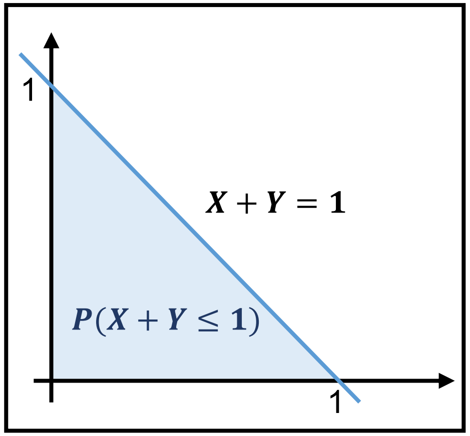
- 결합확률질량함수(Joint PMF)

정의 3.8

다음 조건이 만족될 때 함수 $f(x,y)$를 **이산형 확률변수 X와 Y의 결합확률분포** 또는 **결합확률질량함수(Joint PMF)**라 한다.

1. 모든 (x,y)에 대하여 $f(x,y) \geq 0$
2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$
3. $P(X = x, Y = y) = f(x,y)$

평면상의 어떤 영역 A에 대하여 $P[(X,Y) \in A] = \sum\sum_A f(x,y)$ 가 된다.



<그림 3.7> 영역 $X + Y \leq 1$ 예시

결합확률분포

• 예제 3.14

3개의 청색, 2개의 적색, 3개의 녹색 볼펜이 들어 있는 상자에서 임의로 **2개를 추출** 하고자 하는 경우, **X를 청색 볼펜의 수, Y를 적색 볼펜의 수**라고 하자.

- (a) 결합확률분포 $f(x,y)$를 구하라.
  - 청색 볼펜의 수: x, 적색 볼펜의 수: y, 녹색 볼펜의 수: 2-$(x+y)$
  - 청색 볼펜을 뽑는 경우의 수: $\binom{3}{x}$
  - 적색 볼펜을 뽑는 경우의 수: $\binom{2}{y}$
  - 녹색 볼펜을 뽑는 경우의 수: $\binom{3}{2-(x+y)}$
  - 8개 중 임의로 2개의 볼펜을 뽑는 경우의 수: $\binom{8}{2}$
  - 결합확률질량함수는 다음과 같다.

$$f(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-(x+y)}}{\binom{8}{2}}, \qquad \mathrm{x} = 0,1,2, \mathrm{y} = 0,1,2, 0 \le \mathrm{x}+\mathrm{y} \le 2$$

$f(x,y)$		청색 볼펜 수 (x)			행의 합
		0	1	2	
적색 볼펜 수 (y)	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

<표 3.1> 예제3.14의 결합확률분포 표

- (b) $A = \{(x,y)|x+y \le 1\}$이라고 할 때, $P[(X,Y) \in A]$를 구하라.
  - $P[(X,Y) \in A] = P(X+Y \le 1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{9}{28} = \frac{9}{14}$

결합확률분포

- 결합확률밀도함수(Joint PDF)

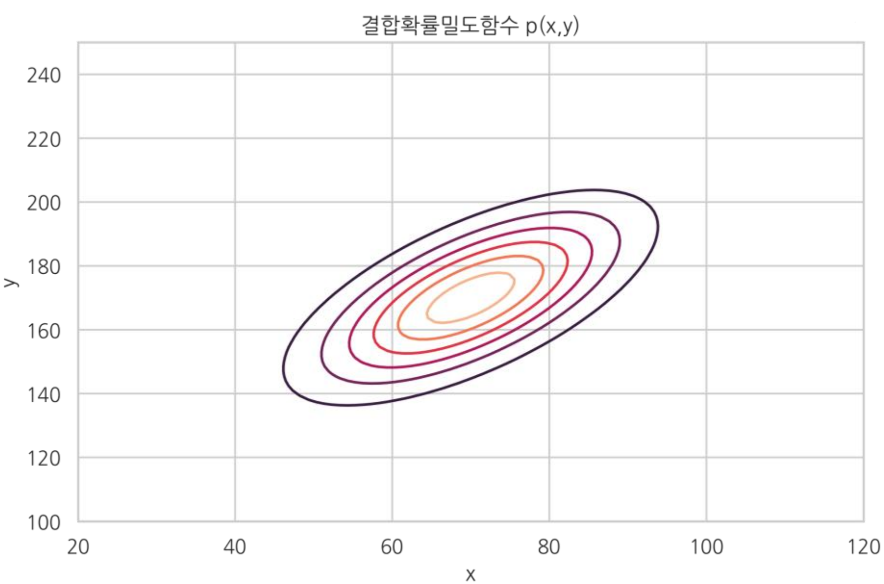
정의 3.9

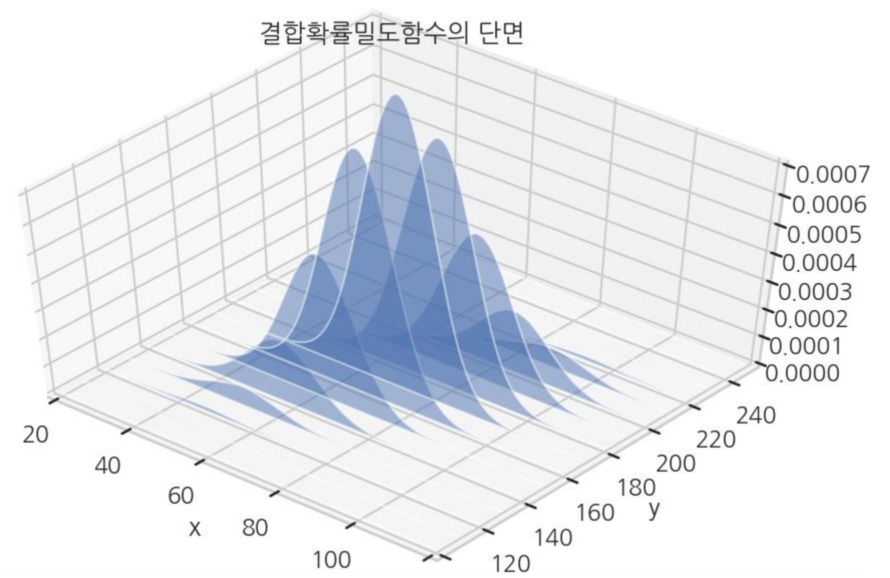
다음 조건이 만족될 때 함수 $f(x, y)$를 연속확률변수 X와 Y의 **결합확률밀도함수(joint PDF)**라 한다.

1. 모든 (x, y)에 대하여 $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$
3. $P[(X, Y) \in A] = \int \int_A f(x, y)\, dx\, dy$, 이때 A는 xy 평면상의 임의의 영역

결합확률분포

- 결합확률밀도함수(Joint PDF)
  - X와 Y가 연속형 확률변수이면 $f(x,y)$는 xy평면 위에 놓여 있는 표면이 됨
  - A를 xy평면상의 임의의 영역이라면 $P(X,Y) \in A$는 밑면과 단면으로 구성되는 입체의 부피와 같게 됨





<출처>: https://datascienceschool.net

결합확률분포

- 예제 3.15 (1/2)

어느 과자회사에서는 연한 초콜릿과 진한 초콜릿을 입힌 과자상자를 취급할 때, 임의로 하나의 과자상자를 선택하는 경우, **X와 Y를 각각 연한 초콜릿과 진한 초콜릿의 비율**이라 하면, 결합확률 분포는 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (a) 정의 3.9의 조건 2를 증명하라.
  - $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{5} + \frac{6y}{5}\right) dy = \left(\frac{2y}{5} + \frac{3y^2}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

결합확률분포

- 예제 3.15 (2/2)

어느 과자회사에서는 연한 초콜릿과 진한 초콜릿을 입힌 과자상자를 취급할 때, 임의로 하나의 과자상자를 선택하는 경우, **X와 Y를 각각 연한 초콜릿과 진한 초콜릿의 비율**이라 하면, 결합확률 분포는 다음과 같다.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{5}(2x+3y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

- (b) $A=\{(x,y)|0<x<\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}<y<\frac{1}{2}\}$이라고 할 때, $P[(X,Y)\in A]$를 구하라.
  - $P[(X,Y)\in A]=\mathrm{P}\left(0<\ X<\frac{1}{2},\frac{1}{4}<Y<\frac{1}{2}\right)$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x^2}{5}+\frac{6xy}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}dy$$

$$=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{10}+\frac{3y}{5}\right)dy=\left(\frac{y}{10}+\frac{3y^2}{10}\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\right)\right]=\frac{13}{160}$$

결합확률분포

- 주변분포(Marginal Distribution) (1/3)
  - 정의
    - 결합확률분포에서 하나의 확률변수에 대한 확률분포를 추출하는 것
  - 필요성 (1/2)
    1. 다수의 확률변수들에 대한 확률 값의 분포를 확인하여, 개별 변수의 특성을 파악하기 위함
       - 예시
         - 성별(X)과 선호하는 영화 장르(Y)의 상관관계를 나타낸 결합확률분포를 통해, 판타지 장르를 좋아하는 사람의 비율을 파악하는 경우
         - 학생들의 공부 시간(X)과 기말고사 점수대(Y)의 상관관계를 나타낸 결합확률분포를 통해, 기말고사 80점 대 학생들의 비율을 파악하는 경우

결합확률분포

- 주변분포(Marginal Distribution) (2/3)
  - 필요성 (2/2)
    2. 개별 변수에 대한 미래의 일을 예측하여 활용하기 위함
       - 예시
         - 온라인 쇼핑몰에서, 구매액 범위(X)와 할인쿠폰 사용 여부(Y)에 대한 결합확률분포를 통해, 고객의 할인쿠폰 사용율을 파악하여 운영전략을 세우는 경우
    3. 조건부 분포 계산에 활용하기 위함
       - 예시
         - 한달 동안의 날씨(X)와 아이스크림 판매율(Y)에 대한 결합확률분포를 통해, 날씨가 맑은 경우의 비율을 파악한 뒤, 날씨가 맑은 경우에 아이스크림 판매율을 파악하는 경우

- 주변분포(Marginal Distribution) (3/3)

정의 3.10

X와 Y의 **주변분포**는 다음과 같이 주어진다.

1. 이산형인 경우

$$g(x) = \sum_{y} f(x, y), \qquad h(y) = \sum_{x} f(x, y)$$

2. 연속형인 경우

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy, \qquad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

결합확률분포

• 예제 3.16

표 3.1의 열과 행의 합이 각각 X와 Y의 주변분포가 됨을 증명하라.

- 확률변수 X에 대하여 다음 값들을 구할 수 있다.
  - $g(0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$
  - $g(1) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = \frac{9}{28} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{15}{28}$
  - $g(2) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) = \frac{3}{28} + 0 + 0 = \frac{3}{28}$

$f(x,y)$		청색 볼펜 수 (x)			행의 합
		0	1	2	
적색 볼펜 수 (y)	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

<표 3.1> 예제3.14의 결합확률분포 표

- 위의 값들은 표3.1의 열의 합과 일치하며, 같은 방법으로 $h(y)$의 값들이 행의 합으로 표현됨을 알 수 있다. 이에 대한 주변분포는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{5}{14}, & x = 0 \\ \frac{15}{28}, & x = 1 \\ \frac{3}{28}, & x = 2 \end{cases} \qquad h(y) = \begin{cases} \frac{15}{28}, & y = 0 \\ \frac{3}{7}, & y = 1 \\ \frac{1}{28}, & y = 2 \end{cases}$$

결합확률분포

• 예제 3.17

예제 3.15의 결합분포에 대하여 $g(x)$와 $h(y)$를 구하라.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 연한 초콜릿의 비율: x, 진한 초콜릿의 비율: y
- $0 \le x \le 1$ 구간에서는 다음과 같으며, 그 외의 영역에서는 $g(x) = 0$이 된다.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy = \left(\frac{4xy}{5} + \frac{3y^2}{5}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{4x+3}{5}$$

- 같은 방법으로 $0 \le y \le 1$ 구간에서는 다음과 같으며, 그 외의 영역에서는 $h(y) = 0$이 된다.

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx = \frac{2(1+3y)}{5}$$

결합확률분포

- 조건부분포(Conditional Distribution)
  - 정의
    - 조건이 주어진 경우, 특정 확률변수에 대한 확률분포를 나타내는 것
  - 필요성
    1. 주어진 상황을 고려하여 미래의 일을 예측하기 위함
       - 예시
         - 온라인 쇼핑몰에서, 고양이 화장실 구매 여부(X)와 고양이 모래 구매 여부(Y)가 주어졌을 때, 고양이 화장실을 구매한 경우에 고양이 모래를 구매할 확률을 예측하는 경우
    2. 특정 조건이 주어졌을 때, 추론을 통해 가설을 검증하기 위함
       - 예시
         - '기침 증상 여부와 코로나 양성 결과 간에는 연관이 없다'는 가설을 증명하기 위해, 기침 증상 여부(X)와 검사 결과(Y)를 통해, 기침 증상을 가진 코로나 환자 그룹과 기침 증상이 없는 코로나 환자 그룹의 검사 결과를 분석하는 경우

- 조건부 분포(Conditional Distribution)

정의 3.11

X와 Y를 이산형 또는 연속형인 두 확률변수라고 할 때, $X = x$로 주어졌을 때 확률변수 Y의 조건부 분포(Conditional Distribution)는 다음과 같이 주어진다.

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \qquad g(x) > 0$$

같은 방법으로 $Y = y$로 주어졌을 때 확률변수 X의 조건부 분포는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \qquad h(y) > 0$$

결합확률분포

- 조건부 분포(Conditional Distribution)
  - 확률변수가 a와 b사이의 값을 가질 확률
    - 확률변수 X와 Y가 이산형 확률변수인 경우
      - $\mathrm{P}(a < X < b | Y = y) = \sum_{a<x<b} f(x|y)$
    - 확률변수 X와 Y가 연속형 확률변수인 경우
      - $\mathrm{P}(a < X < b | Y = y) = \int_a^b f(x|y)dx$

결합확률분포

• 예제 3.18 (1/3)

예제 3.14에서 $Y=1$로 주어졌을 때, X의 조건부 분포를 구하고, 그것을 이용하여 $P(X=0|Y=1)$을 구하라.

$f(x,y)$		청색 볼펜 수 (x) 0	1	2	행의 합
적색 볼펜 수 (y)	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

<표 3.1> 예제3.14의 결합확률분포 표

$Y=1$일 때, $f(x|y)$가 필요하므로 $h(1)$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$h(1)=\sum_{x=0}^{2} f(x,1)=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}+0=\frac{3}{7}$$

$f(x|1)$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f(x|1)=\frac{f(x,1)}{h(1)}=\frac{7}{3}f(x,1), \qquad x=0,1,2$$

결합확률분포

- 예제 3.18 (2/3)

예제 3.14에서 $Y = 1$로 주어졌을 때, X의 조건부 분포를 구하고, 그것을 이용하여 $P(X = 0|Y = 1)$을 구하라.

$f(x,y)$		청색 볼펜 수 (x) 0	1	2	행의 합
적색 볼펜 수 (y)	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

<표 3.1> 예제3.14의 결합확률분포 표

따라서,

$$f(0|1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(0,1) = \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f(1|1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(1,1) = \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f(2|1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(2,1) = \left(\frac{7}{3}\right)(0) = 0$$

이 되고, $Y = 1$일 때, X 의 조건부 분포는 다음과 같다.

$$f(x|1) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

결합확률분포

- 예제 3.18 (3/3)

예제 3.14에서 $\mathrm{Y}=1$로 주어졌을 때, X의 조건부 분포를 구하고, 그것을 이용하여 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0|\mathrm{Y}=1)$을 구하라.

$f(x,y)$		청색 볼펜 수 (x) 0	1	2	행의 합
적색 볼펜 수 (y)	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

<표 3.1> 예제3.14의 결합확률분포 표

끝으로, 조건부 확률의 정의를 사용하면,

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(Y=y,X=x)}{P(Y=y)}=\frac{f(x,y)}{h(y)}=f(x|y)$$

이므로,

$$P(X=0|Y=1)=f(0|1)=\frac{1}{2}$$

따라서, 두 개의 볼펜 중 하나가 적색이라는 사실이 알려지면 다른 하나의 볼펜이 청색이 아닐 확률은 $\frac{1}{2}$이 됨을 알 수 있다.

결합확률분포

- 예제 3.19

<u>**X와 Y를 각각 단위 온도 변화량과 어떤 원자가 방출하는 스펙트럼 변화율**</u>을 나타내는 확률변수라 할 때, 확률변수 (X, Y)에 대한 결합밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (a) 주변밀도함수 $g(x), h(y)$와 조건부밀도함수 $f(y|x)$를 구하라.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x}^{1} 10xy^2\,dy$$

$$= \frac{10}{3}xy^3\Big|_{y=x}^{y=1} = \frac{10}{3}x(1-x^3), \qquad 0 < x < 1$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0}^{y} 10xy^2\,dx = 5x^2y^2\Big|_{x=0}^{x=y} = 5y^4, \qquad 0 < y < 1$$

따라서,

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{1-x^3}, \quad 0 < x < y < 1$$

- (b) <u>**온도가 0.25 단위 높아졌을 때 스펙트럼 변화량이 $\frac{1}{2}$보다 클 확률**</u>을 구하라.

$$P\left(Y > \frac{1}{2} \middle| X = 0.25\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y|x=0.25)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3y^2}{1-0.25^3}\,dy = \frac{8}{9}$$

결합확률분포

- 예제 3.20

파주시의 **체감 온도 변화량이 X**, **습도 변화율이 Y** 일 때, 결합확률분포가 다음과 같이 주어졌다. 이를 이용하여, **$g(x), h(y), f(x|y)$를 구하고**, **$P(1/4 < X < 1/2 | Y = 1/3)$의 값**을 구하라.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}, & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4}\,dy = \left(\frac{xy}{4} + \frac{xy^3}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4}\,dx = \left(\frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{1+3y^2}{2}, \quad 0 < y < 1$$

따라서,

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{x(1+3y^2)/4}{(1+3y^2)/2} = \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2$$

이고,

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}\,dx = \frac{3}{64}$$

이 된다.

결합확률분포

- 결합확률분포, 주변분포, 조건부분포
  - 예제 (1/4)

눈의 수가 1부터 6까지 나올 수 있는 **2개의 주사위를 던지는 경우**, **주사위 A에 대한 눈의 값이 확률변수 X, 주사위 B에 대한 눈의 값이 확률변수 Y**라고 하자. 이때, **주사위 B의 눈의 값이 3일 때, 주사위 A의 눈이 2보다 크고 5보다 작을 확률**을 구하라.

- 문제에서 주어진 것
  - 확률변수 X: 주사위 A에 대한 눈의 값
  - 확률변수 Y: 주사위 B에 대한 눈의 값
  - $f(2 < x < 5|y = 3)$ 의 값을 구하라

- 주사위 B의 눈의 값이 3일 때, 주사위 A의 눈이 2보다 크고 5보다 작을 확률 $f(2 < x < 5|y = 3)$ 을 구하기 위한 절차
  1. X와 Y에 대한 결합확률분포 계산
  2. 주사위 B의 눈의 값이 3인 경우에 대한 주변분포 $h(3)$ 계산
  3. 주사위 B의 눈의 값이 3일 때, 주사위 A의 눈이 2보다 크고 5보다 작을 확률 $f(2 < x < 5|y = 3)$ 에 대한 조건부분포 계산

결합확률분포

- 결합확률분포, 주변분포, 조건부분포
  - 예제 (2/4)

눈의 수가 1부터 6까지 나올 수 있는 **2개의 주사위를 던지는 경우**, **주사위 A에 대한 눈의 값이 확률변수 X, 주사위 B에 대한 눈의 값이 확률변수 Y**라고 하자. 이때, **주사위 B의 눈의 값이 3일 때, 주사위 A의 눈이 2보다 크고 5보다 작을 확률**을 구하라.

1. X와 Y에 대한 결합확률분포 계산
   - 주사위에서 각 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로
   - $f(x,y) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$f(x,y)$		주사위 A에 대한 눈의 값(X)					
		1	2	3	4	5	6
주사위 B에 대한 눈의 값(Y)	1	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	2	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	3	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	4	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	5	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	6	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$

결합확률분포

- 결합확률분포, 주변분포, 조건부분포
  - 예제 (3/4)

눈의 수가 1부터 6까지 나올 수 있는 **2개의 주사위를 던지는 경우**, **주사위 A에 대한 눈의 값이 확률변수 X, 주사위 B에 대한 눈의 값이 확률변수 Y**라고 하자. 이때, **주사위 B의 눈의 값이 3일 때, 주사위 A의 눈이 2보다 크고 5보다 작을 확률**을 구하라.

2. 주사위 B의 눈의 값이 3인 경우에 대한 주변분포 계산
   - $h(y) = \sum_x f(x, y)$
   - $h(3) = f(1,3) + f(2,3) + f(3,3) + f(4,3) + f(5,3) + f(6,3) = \frac{1}{6}$

$f(x, y)$		주사위 A에 대한 눈의 값(X)					
		1	2	3	4	5	6
주사위 B에 대한 눈의 값(Y)	1	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	2	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	3	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	4	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	5	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	6	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$

결합확률분포

- 결합확률분포, 주변분포, 조건부분포
  - 예제 (4/4)

눈의 수가 1부터 6까지 나올 수 있는 **2개의 주사위를 던지는 경우**, **주사위 A에 대한 눈의 값이 확률변수 X, 주사위 B에 대한 눈의 값이 확률변수 Y**라고 하자. 이때, **주사위 B의 눈의 값이 3일 때, 주사위 A의 눈이 2보다 크고 5보다 작을 확률**을 구하라.

3. $f(2 < x < 5|y = 3)$ 에 대한 조건부분포 계산
   - $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$
   - $f(2 < x < 5|y = 3) = \sum_{x=3}^{4} \frac{f(x,3)}{h(3)}$
     - $f(3,3) + f(4,3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$
     - $h(3) = \frac{1}{6}$
   - 따라서, $f(2 < x < 5|y = 3) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$

$f(x,y)$		주사위 A에 대한 눈의 값(X)					
		1	2	3	4	5	6
주사위 B에 대한 눈의 값(Y)	1	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	2	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	3	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	4	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	5	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$
	6	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$	$^1/_{36}$

결합확률분포

- 통계적 독립(Statistically Independent)

정의 3.12

X와 Y를 결합확률분포 $f(x,y)$와 주변분포 $g(x)$, $h(y)$를 가지는 이산형 혹은 연속형 확률변수라 할 때, 모든 x, y 에 대하여 $f(x,y) = g(x)h(y)$가 성립하면 **확률변수 X와 Y는 통계적으로 독립**이라 함

- $f(x,y)$가 y에 종속되어 있지 않다면, $f(x|y) = \mathrm{g(x)}$이고 $f(x,y) = g(x)h(y)$가 됨
  - 증명
    - $f(x,y) = f(x|y)h(y)$
      $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)h(y)\,dy$
      $g(x) = f(x|y)\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,dy$
      $\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\,dy = 1$, 따라서 $g(x) = f(x|y)$
      $f(x,y) = g(x)h(y)$

결합확률분포

- 예제 3.21

예제 3.14의 확률변수들이 통계적으로 독립이 아님을 증명하라.

$f(x,y)$		청색 볼펜 수 (x) 0	1	2	행의 합
적색 볼펜 수 (y)	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

<표 3.1> 예제3.14의 결합확률분포 표

- $f(0,1) = \frac{3}{14}$
- $g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0,y) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$
- $h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$

- $f(0,1) \neq g(0)h(1)$

결합확률분포

• 통계적 독립(Statistically Independent)

정의 3.13

$X_1, X_2, \cdots, X_n$을 결합확률분포 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$과 주변분포 $f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_n(x_n)$을 가지는 이산형 혹은 연속형 확률변수라고 할 때, 모든 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$에 대하여

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

이 성립하면 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 **상호 통계적으로 독립**이라고 한다.

결합확률분포

- 예제 3.22

종이팩으로 포장된 부패성 식품의 보존기간이 다음과 같은 확률밀도함수를 가지는 확률변수라고 하자.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

<u>$\boldsymbol{X_1, X_2, X_3}$**가 독립적으로 추출된 3개의 포장된 음식의 보존기간**</u>을 나타낸다고 할 때 <u>$\boldsymbol{P(X_1 < 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2)}$</u>를 구하라.

- 3개의 포장단위가 독립적으로 추출됨에 따라 확률변수 X_1, X_2, X_3가 통계적으로 독립이라 할 수 있고, 따라서 결합밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)f(x_2)f(x_3) = \mathrm{e}^{-x_1}\mathrm{e}^{-x_2}\mathrm{e}^{-x_3} = \mathrm{e}^{-x_1-x_2-x_3}$$

따라서,

$$P(X_1 < 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2) = \int_2^\infty \int_1^3 \int_0^2 e^{-x_1-x_2-x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$
$$= (1 - \mathrm{e}^{-2})(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-3})\mathrm{e}^{-2} = 0.0372$$

Thanks!

이 하 늘(haneul@pel.sejong.ac.kr)

부록 #1

- MATLAB 코드(1/4)
  - 그림 3.1

```
a = [0 1 2 3 4]; p = [1/16 4/16 6/16 4/16 1/16];
stem(a,p);
set(gca, 'xlim', [-1 5]);
```

  - 그림 3.2

```
histogram('BinEdges',-0.5:4.5,'BinCounts',[1/16 4/16 6/16 4/16 1/16]);
```

부록 #2

- MATLAB 코드(2/4)
  - 그림 3.3

```
x=0:5;
y=binocdf(x,5,0.5);
stairs(x,y)
```

  - 그림 3.4(1)

```
pd = makedist('Weibull','A',5,'B',2);

x = 0:.1:15;
y = pdf(pd,x);

plot(x,y,'LineWidth',2);
```

부록 #3

- MATLAB 코드(3/4)
  - 그림 3.4(2)

```
pd = makedist('Normal');

x = -3:.1:3;
p = cdf(pd,x);

plot(x,p);
```

  - 그림 3.5

```
x = -3:.1:3;
xs=x(x>=0&x<=2);

figure;
hold on;
a=area(xs,normpdf(xs,0,3));
a.FaceAlpha=0.2;
p=plot(x,normpdf(x,0,3));
p.Color='blue';
```

부록 #4

- MATLAB 코드(4/4)
  - 그림 3.6

```
x = linspace(-1, 3, 1000);

f1 = @(x) 0;
f2 = @(x) (x.^3 + 1) / 9;
f3 = @(x) 1;

y = zeros(size(x));
y(x < -1) = f1(x(x < 0));
y(x >= -1 & x < 2) = f2(x(x >= -1 & x < 2));
y(x >= 2) = f3(x(x >= 2));

plot(x, y);
grid on;
```