확률 및 통계학

- 6장 연속형 균일분포(1) -

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)
세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포

연속형 균일분포

- 균일분포(Uniform Distribution)
  - 정의
    - 특정 범위 내에서 각 사상이 일어날 확률이 균일한 분포
  - 종류
    - 이산형 균일분포 (Discrete Uniform Distribution)
      - 유한한 개수 내에서 이산적인 값들에 대한 균일한 확률을 갖는 분포
    - 연속형 균일분포 (Continuous Uniform Distribution)
      - 특정 구간 내에서 실수값들에 대한 균일한 확률을 갖는 분포

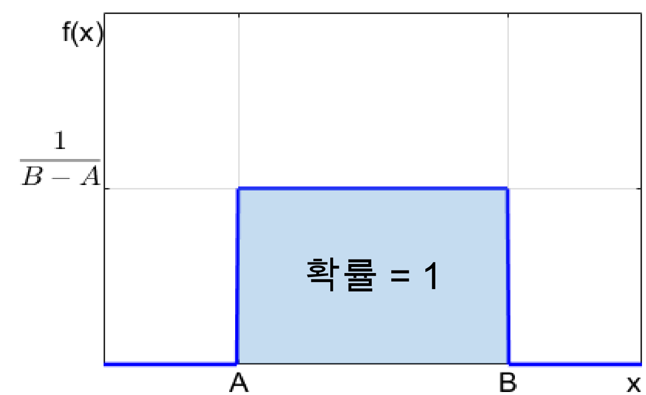
연속형 균일분포

- 연속형 균일분포(Continuous Uniform Distribution)
  - 정의
    - 특정 구간 내 모든 실수에 대해 균일한 확률을 갖는 분포
  - 특징
    - 직사각형 분포(Rectangular Distribution) 형태를 가짐
    - $[A, B]$ 내의 특정 구간에서 구간의 길이가 동일한 경우, 동일한 확률 값을 가짐

구간 $[A, B]$에서 정의되는 연속형 균일확률변수 X의 밀도 함수는 다음과 같다.

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A}, & A \le x \le B \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

확률밀도함수 조건 (“이공학도를 위한 확률 및 통계학“, pp.103, 정의 3.6 참고)
① 모든 실수에 대해 $f(x) \ge 0$, ② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, ③ $P(\mathrm{a} < \mathrm{X} < \mathrm{b}) = \int_a^b f(x)\,dx$



<그림 6.1> 연속형 균일분포

연속형 균일분포

- 연속형 균일분포(Continuous Uniform Distribution)
  - 예제 6.1

어느 회사의 대형 회의실은 4시간을 초과하여 사용할 수 없다. 그 회의실에서는 긴 회의와 짧은 회의가 자주 열리며, 회의시간 X는 구간 $[0,4]$에서 정의되는 균일분포로 가정할 수 있다고 한다.

(a) 밀도함수를 구하라.
(b) 어떤 회의가 최소한 3시간 이상 계속될 확률은 얼마인가?

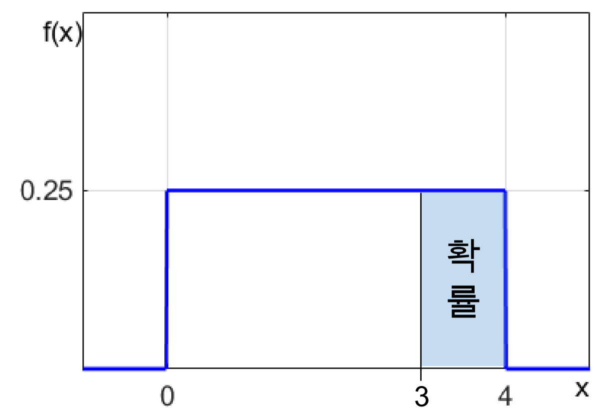
(a) 회의시간은 0시간부터 4시간까지 사용 가능

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

(b) 회의시간이 최소 3시간 이상

방법 1) $P[X \ge 3] = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_3^4 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

방법 2) $P[X \ge 3] = \frac{0.25}{4-3} = 0.25$



<그림 6.2> 예제 6.1

연속형 균일분포

- 연속형 균일분포(Continuous Uniform Distribution)

정리 6.1

균일분포의 평균(μ)과 분산(σ^2)은 다음과 같다.

$$\mu = \frac{A+B}{2}, \qquad \sigma^2 = \frac{(B-A)^2}{12}$$

- 증명

균일분포에서의 구간이 $[A, B]$일 때, 평균은 구간의 중간값이다.

$$\mu = \frac{A+B}{2}$$

분산은 수학적 기대값에 기반하여 다음과 같이 정리된다. 이때 확률밀도함수는 $f(x) = \frac{1}{B-A}$임을 활용한다.

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_A^B (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_A^B \left(x - \frac{A+B}{2}\right)^2 \frac{1}{B-A}\,dx = \frac{(B-A)^2}{12}$$

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포

정규분포 및 표준정규분포

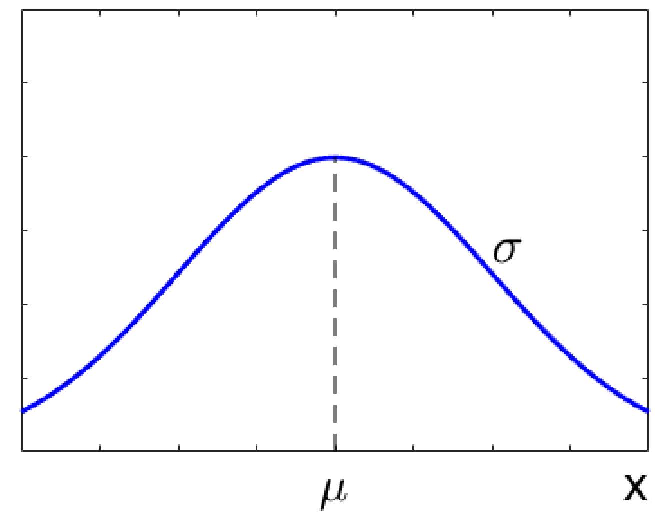
- 정규분포(Normal Distribution)
  - 정의
    - 평균 근처에 값이 모여 있는 종모양의 확률분포

평균 μ와 분산 σ^2을 가지는 확률변수 X의 확률분포는

$$n(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2},\qquad -\infty<x<\infty$$

와 같이 주어진다. 여기서 $\pi=3.14159\ldots$이고,

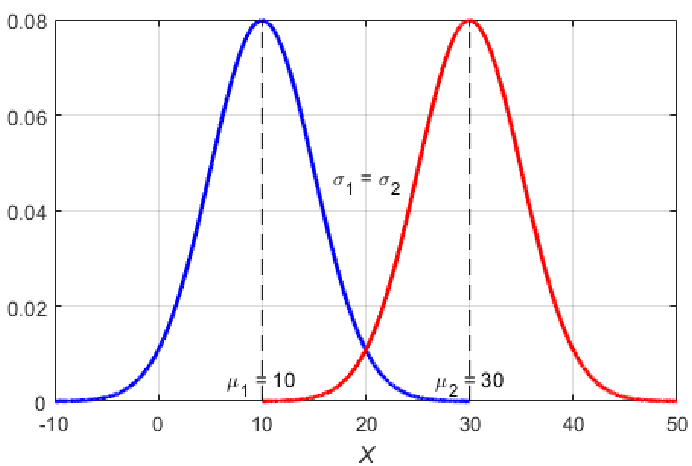
$e=2.71828\ldots$이다.



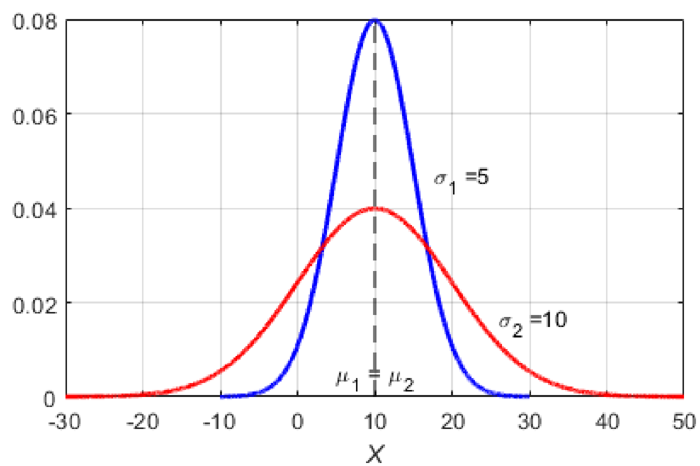
<그림 6.3> 정규곡선

정규분포 및 표준정규분포

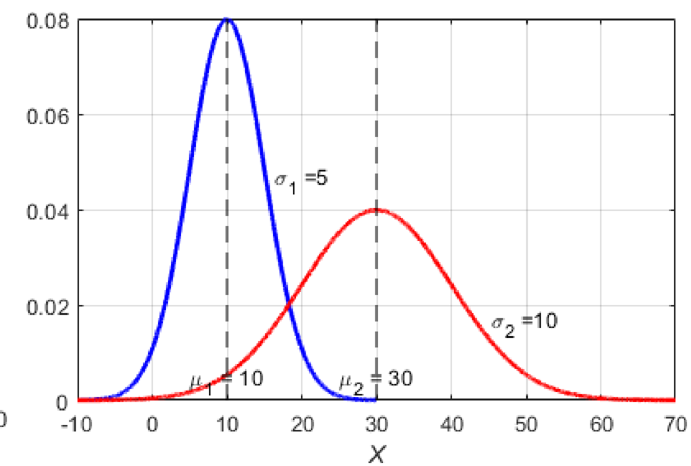
- 정규분포(Normal Distribution)
  - 특징
    - 정규곡선은 평균(μ)을 지나는 수직축에 대한 좌우대칭
    - 평균(μ)은 정규곡선의 최빈값(mode)
    - 정규곡선은 $x = \mu \pm \sigma$ 에서 변곡점을 가짐
    - 평균(μ)에서 멀어질수록 정규곡선은 수평축에 접근
    - 정규곡선과 수평축 사이의 총 면적은 1임



<그림 6.4> 평균은 다르고,
표준편차는 같은 정규곡선



<그림 6.5> 평균은 같고,
표준편차는 다른 정규곡선



<그림 6.6> 평균과 표준편차
모두 다른 정규곡선

정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포(Normal Distribution)

정리 6.2

정규분포의 평균, 표준편차, 분산은 각각 μ, σ, σ^2이다.

- 증명

정의에 의한 평균에, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, dx = \sigma dz$ 을 적용하면 다음과 같다.

$$E(X-\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0, \qquad \boldsymbol{E(X) = \mu}$$

정의에 의한 분산에, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, dx = \sigma dz$ 을 적용하면 다음과 같다.

$$E[(X-\mu)]^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$u = z, dv = ze^{-z^2/2}dz$라 하고, 이들을 부분적분하면, $du = dz, v = -e^{-z^2/2}$가 되어 다음과 같이 된다.

$$E[(X-\mu)]^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} -ze^{-z^2/2} dz + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right) = \sigma^2(0+1) = \boldsymbol{\sigma^2}$$

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 정의
    - 정규분포의 변수를 표준화한 확률분포

정의 6.1

평균이 0이고 분산이 1인 정규확률변수의 분포를 **표준정규분포(Standard Normal Distribution)**이라고 한다.

  - 특징
    - 정규분포의 개별 데이터에 대한 표준화된 형태 제공
      - $z = (x - \mu)/\sigma$
        - 개별 데이터 x가 평균으로부터 얼마나 떨어져 있는지, 또한 표준편차의 몇 배 정도 떨어져 있는지에 대한 계산
    - 표준정규분포표로 확률 계산 가능
      - 복잡한 정규분포 수식 계산에 용이
      - 두 개의 다른 정규분포 서로 비교 시 용이

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 표준정규분포표
    - $z = (x - \mu)/\sigma$ 을 통해 정규분포의 표준화된 값을 제공
    - 확률밀도함수에서 표준화된 확률변수 Z보다 작은 영역에 대한 확률 계산
      - e.g., $P(Z < 1.74) = 0.9591$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

<그림 6.7> 표준정규분포표
('이공학도를 위한 확률 및 통계학', pp.579, 부록 A.3 참고)

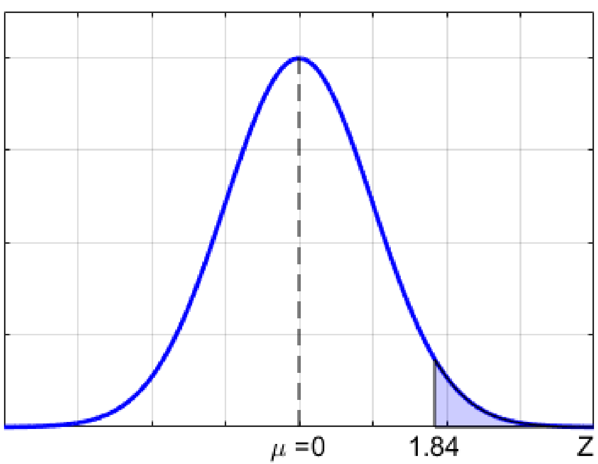
정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.2

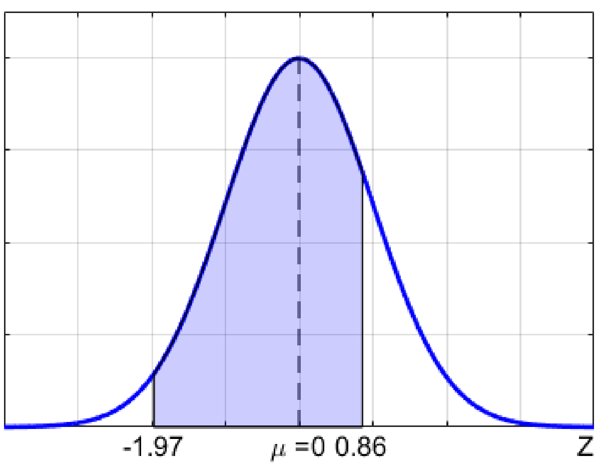
표준정규분포가 주어졌을 때, 다음의 면적을 구하라.
(a) $z = 1.84$의 오른쪽 면적
(b) $z = -1.97$과 $z = 0.86$ 사이의 면적

(a) $P(1.84 < Z) = 1 - P(Z < 1.84) = 1 - 0.9671 = 0.0329$

(b) $P(-1.97 < Z < 0.86) = P(Z < 0.86) - P(Z < -1.97) = 0.8051 - 0.0244 = 0.7807$



<그림 6.7> 예제 6.2(a)



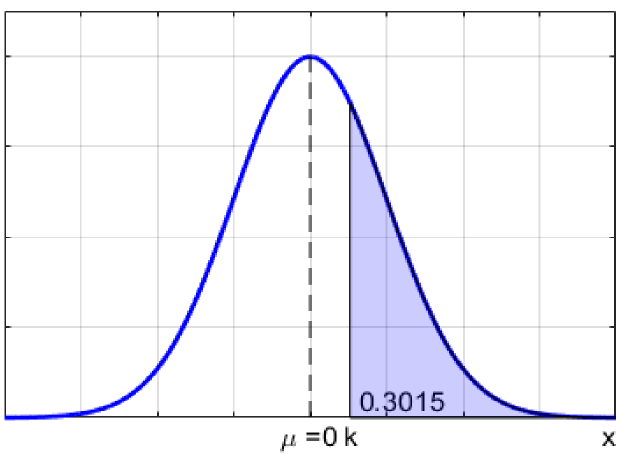
<그림 6.8> 예제 6.2(b)

정규분포 및 표준정규분포

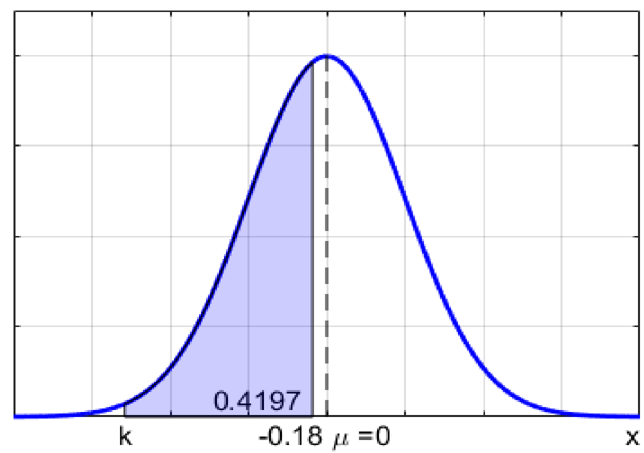
- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.3

표준정규분포가 주어졌을 때, 다음 각 경우에 대하여 k값을 구하라.
(a) $P(Z > k) = 0.3015$
(b) $P(k < Z < -0.18) = 0.4197$

(a) $\mathrm{P}(\mathrm{Z} < k) = 1 - 0.3015 = 0.6985, k = 0.52$
(b) $P(Z < -0.18) = 0.4286, \mathrm{P}(Z < k) = 0.4286 - 0.4197 = 0.0089, k = -2.37$



<그림 6.9> 예제 6.3(a)



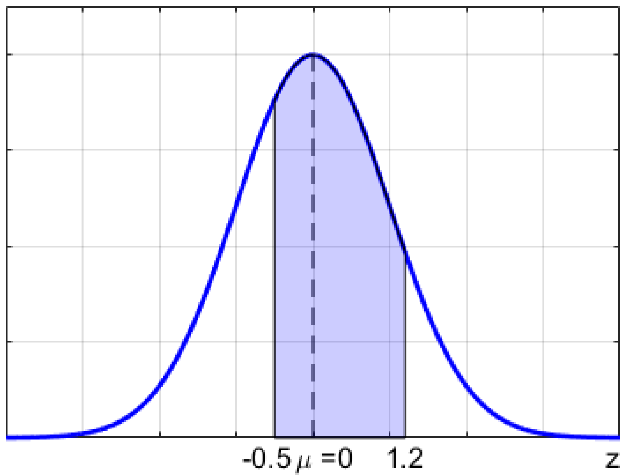
<그림 6.10> 예제 6.3(b)

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.4

$\mu = 50$이고, $\sigma = 10$인 정규분포가 주어졌을 때, X가 45와 62 사이의 값을 취할 확률을 구하라.

- $x_1 = 45, x_2 = 62$에 대응하는 z 값은 $z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5, z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$
- $P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5)$
  $= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$



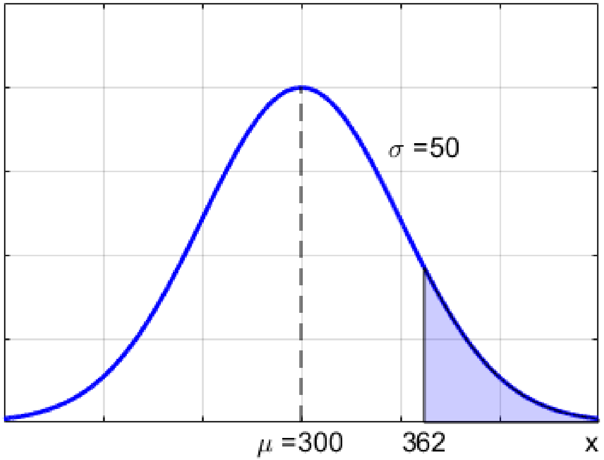
<그림 6.11> 예제 6.4

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.5

$\mu = 300$이고, $\sigma = 50$인 정규분포가 주어졌을 때, X가 362보다 큰 값을 취할 확률을 구하라.

- $x = 362$에 대응하는 z 값은 $z = \frac{(362-300)}{50} = 1.24$
- $P(X > 362) = P(Z > 1.24) = 1 - P(Z < 1.24) = 1 - 0.8925 = 0.1075$



<그림 6.12> 예제 6.5

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.6

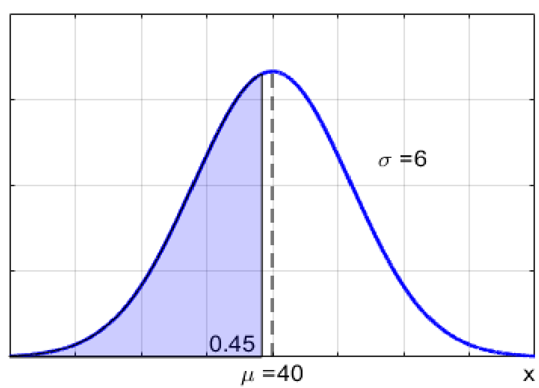
$\mu = 40$이고, $\sigma = 6$인 정규분포가 주어졌을 때, 다음을 구하라.
(a) 왼쪽 면적이 전체 면적의 45%가 되는 x
(b) 오른쪽 면적이 전체 면적의 14%가 되는 x

(a) $P(Z < -0.13) = 0.45$

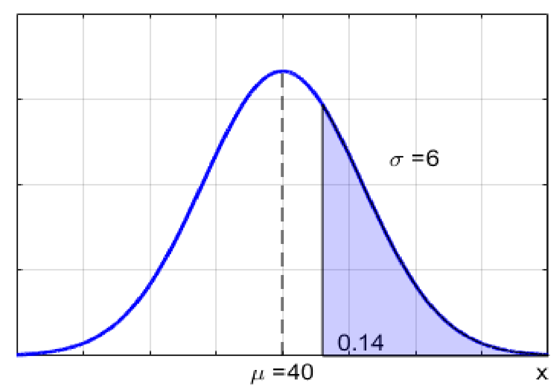
$z = \frac{x-\mu}{\sigma}, x = \sigma z + \mu = 6 \times (-0.13) + 40 = 39.22$

(b) $P(Z < 1.08) = 1 - 0.14 = 0.86$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}, x = \sigma z + \mu = 6 \times 1.08 + 40 = 46.48$



<그림 6.13> 예제 6.6(a)



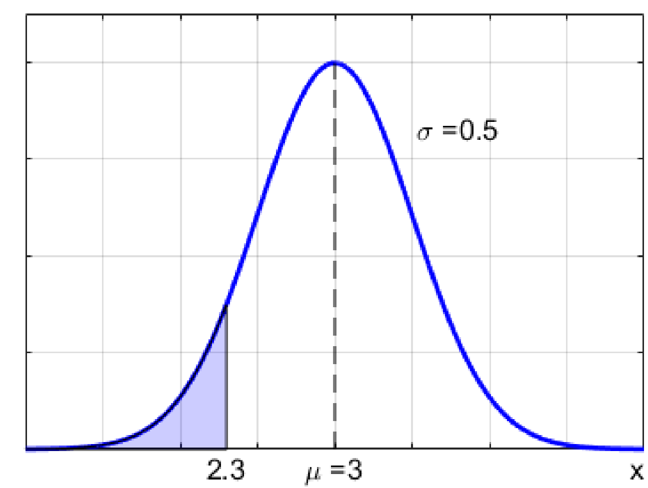
<그림 6.14> 예제 6.6(b)

정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.7

어느 축전지는 평균수명이 3년이고, 표준편차가 0.5년인 것으로 알려져 있다. 축전지의 수명이 정규분포를 따른다고 가정할 때, 임의로 주어진 전지의 수명이 2.3년보다 짧을 확률을 구하라.

- $\mu = 3, \sigma = 0.5$이므로, $z = \frac{2.3-3}{0.5} = -1.4$
- $P(X < 2.3) = P(Z < -1.4) = 0.0808$
  $\therefore 8.08\%$



<그림 6.15> 예제 6.7

정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.8

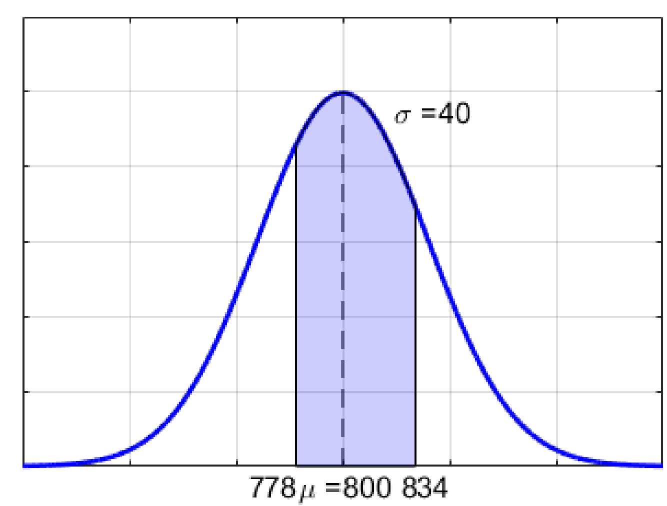
어느 전기회사에서는 평균수명이 800시간이고 표준편차가 40시간인 정규분포의 수명분포를 가지는 전구를 생산하고 있다. 임의로 선정된 전구의 수명이 778시간과 834시간 사이에 있을 확률을 구하라.

- $x_1 = 778, x_2 = 834$이므로, $z_1 = \frac{778-800}{40} = -0.55, z_2 = \frac{834-800}{40} = 0.85$
- $P(778 < X < 834) = P(-0.55 < Z < 0.85)$

$= P(Z < 0.85) + P(Z < -0.55)$

$= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111$

$\therefore 51.11\%$



<그림 6.16> 예제 6.8

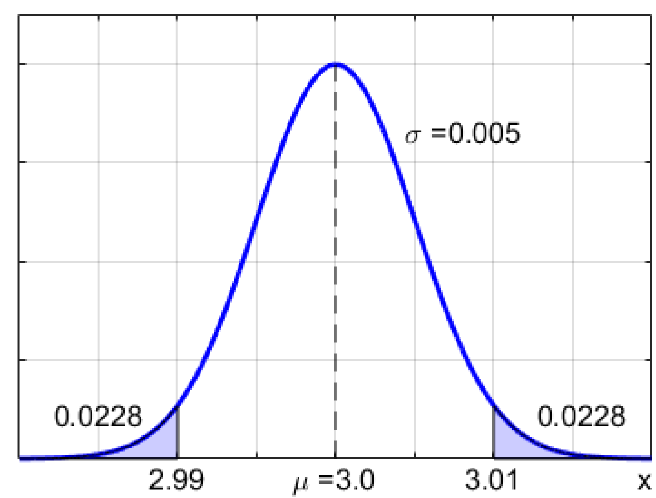
정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.9

어느 공정에서 볼베어링의 직경이 매우 중요한 품질특성이 된다. 구매자 측은 직경의 규격한계를 $3.0 \pm 0.01cm$로 정해 놓고 있다. 따라서, 이 규격한계를 벗어나는 부품은 불합격처리된다. 볼베어링의 직경은 평균이 3.0, 표준편차 0.005인 정규분포를 따른다고 할 때, 생산된 제품 중 불합격으로 처리되는 것은 얼마나 되겠는가?

- $x_1 = 2.99, x_2 = 3.01$이므로, $z_1 = \frac{2.99-3.0}{0.005} = -2.0, z_2 = \frac{3.01-3.0}{0.005} = 2.0$
- $P(2.99 < X < 3.01) = P(-2.0 < Z < 2.0) = P(Z < 2.0) \times 2 = 0.0456$

  $\therefore 4.56\%$



<그림 6.17> 예제 6.9

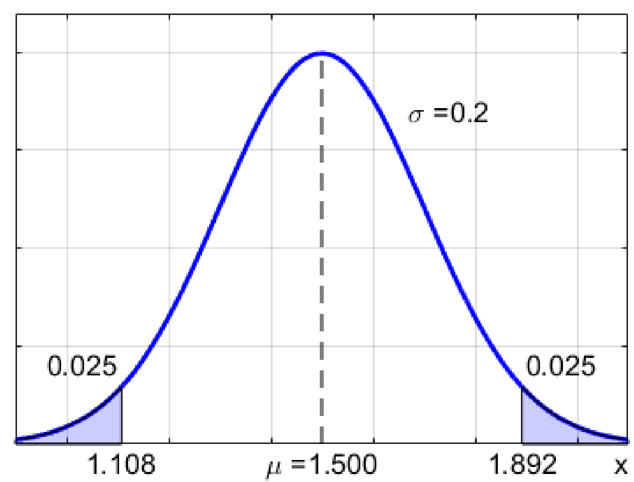
정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.10

어떤 치수가 규격한계인 $1.50 \pm d$ 내에 들어오지 않으면 모든 부품을 불합격시키는 평가기준이 사용된다고 한다. 측정값은 평균이 1.50이고 표준편차가 0.2인 정규분포를 따른다고 알려졌다. 측정값의 95%가 규격한계 내에 들도록 d값을 결정하라.

- $P(-1.96 < Z < 1.96) = P(Z < 1.96) - P(Z < -1.96) = 0.9750 - 0.0250 = 0.95$
- $\mu = 1.50, \sigma = 0.2$
- $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, 1.96 = \frac{(1.50+d)-1.50}{0.2}$

  $\therefore d = 0.392$



<그림 6.18> 예제 6.10

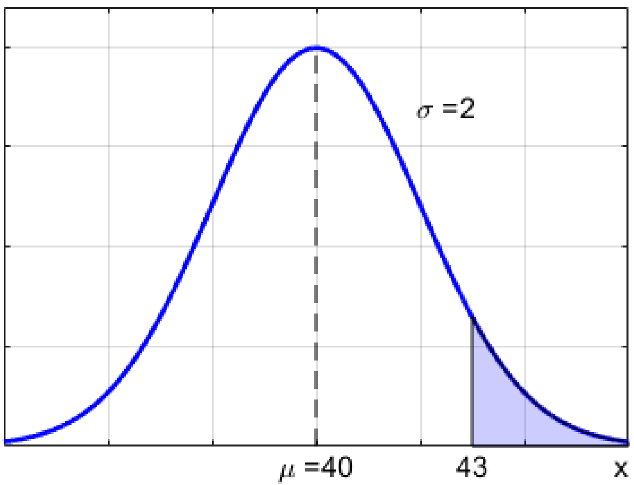
정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.11

평균저항이 40Ω이고 표준편차가 2Ω인 저항기를 만드는 기계가 있다. 저항이 정규분포를 따른다고 가정할 때, 43Ω이 넘는 저항을 가지게 되는 저항기는 몇 퍼센트나 되겠는가?

- $\mu = 40, \sigma = 2$
- $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{(43-40)}{2} = 1.5$
- $P(X > 43) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 0.0668$

$\therefore 6.68\%$



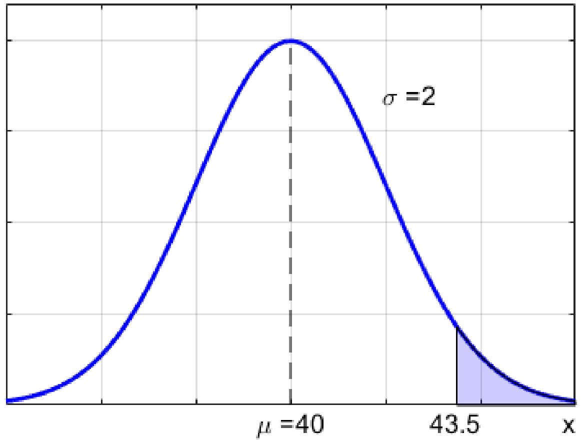
<그림 6.19> 예제 6.11

정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.12

예제 6.11에서 저항의 측정값을 소수 첫째 자리에서 반올림할 때 43Ω이 넘는 저항기의 비율을 구하라.

- 저항이 42.5Ω보다 크고 43.5Ω보다 작은 저항기는 모두 43Ω의 저항을 가지므로, 43.5Ω보다 큰 저항기의 비율을 구해야 함
- $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{43.5-40}{2} = 1.75$
- $P(X > 43.5) = P(Z > 1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 0.0401$
  $\therefore 4.01\%$



<그림 6.20> 예제 6.12

정규분포 및 표준정규분포

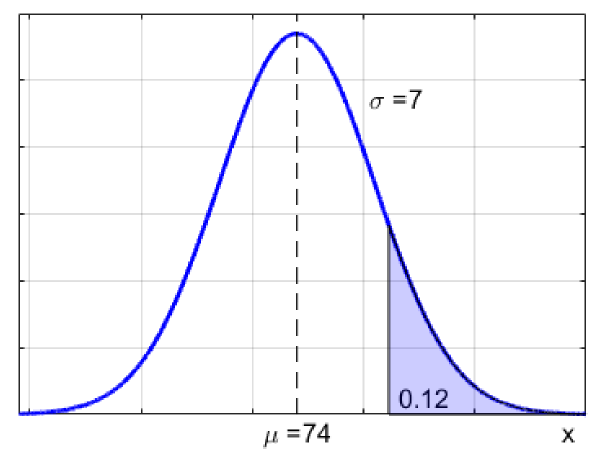
- 정규분포의 적용
  - 예제 6.13

어느 시험 성적이 평균이 74점이고 표준편차가 7인 정규분포를 따른다고 한다. 12%의 학생에게 A 학점이 주어졌다면, A 학점을 받은 학생 중 가장 낮은 점수와 B 학점을 받은 학생 중 가장 높은 점수는 각각 얼마나 되겠는가?

- 12%의 학생이 A 학점이면, 88%의 학생은 B 학점임
- $P(Z < 1.18) = 0.88$이므로, $1.18 = \frac{(x-74)}{7}, x = 82.26$

  $\therefore$ A 학점 중 가장 낮은 점수는 83점,

  B 학점 중 가장 높은 점수는 82점



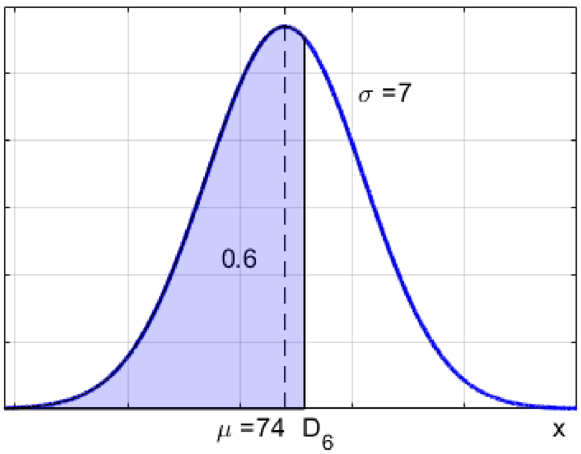
<그림 6.21> 예제 6.13

정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.14

어느 시험 성적이 평균이 74점이고 표준편차가 7인 정규분포를 따른다고 한다. 12%의 A 학점을 받은 학생 중 가장 낮은 점수는 83점이고, 88%의 B 학점을 받은 학생 중 가장 높은 점수가 82점이다. 이때의 제6십분위수를 구하라.
*십분위수: 전체 자료를 크기 순으로 10개의 구간으로 나눈 것

- 제6십분위수(D_6)는 60%의 면적에 달하는 x를 의미
- $P(Z < 0.25) \approx 0.6$이므로, $0.25 = \frac{x-74}{7}, x = 75.75$
  ∴ 성적의 60%는 75점 이하임



<그림 6.22> 예제 6.14

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포

이항분포의 정규근사

- 이항분포(Binomial Distribution)
  - 연속된 n번의 독립시행이 확률 p를 가질 때의 이산형 확률 분포

정리 5.2

이항분포 $b(x; n, p)$의 평균(μ)과 분산(σ)은 다음과 같다.

$$\mu = np, \sigma^2 = npq$$

'이공학도를 위한 확률 및 통계학', pp.165, 정리 5.2 참고

- 이항분포의 정규근사
  - 정규곡선 면적을 활용하여 이항분포 근사값을 계산하는 정리

정리 6.3

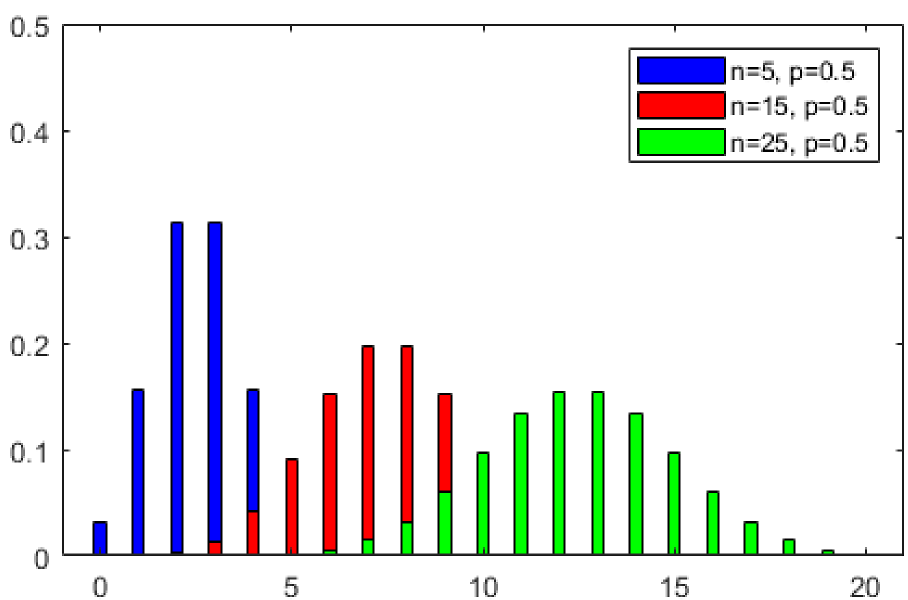
X가 $\mu = np$이고, $\sigma^2 = npq$인 이항확률변수이면, $n \to \infty$일 때

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

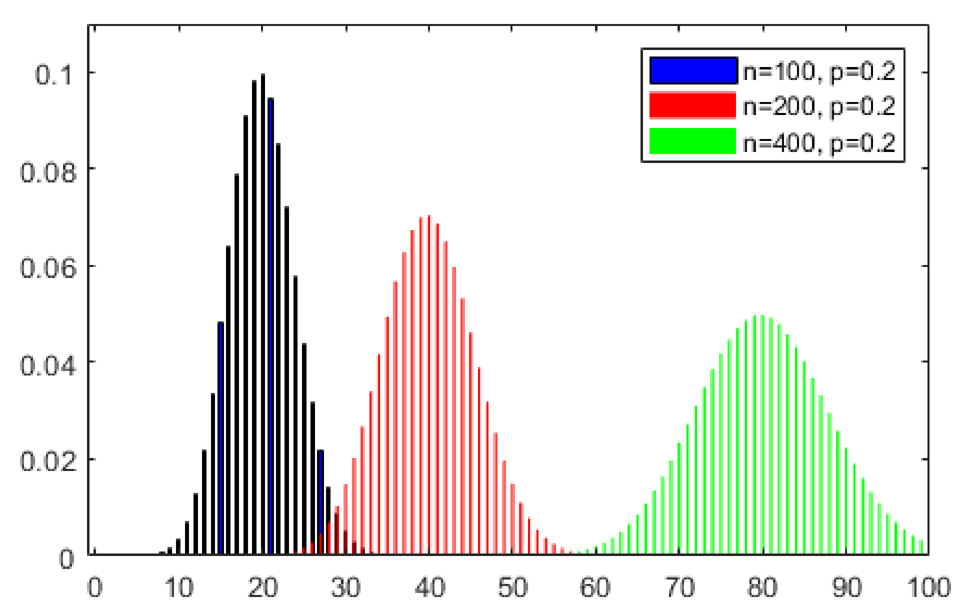
의 극한분포는 표준정규분포, 즉 $n(z; 0,1)$을 따른다.

이항분포의 정규근사

- 정규근사 가능 조건
  - 시행횟수 n이 작더라도 확률 p가 0.5에 가까운 경우
  - 확률 p가 0.5가 아니더라도 시행횟수 n이 큰 경우



<그림 6.23> n이 작고 p가 0.5인 히스토그램



<그림 6.24> p가 0.5가 아니고 n도 큰 히스토그램

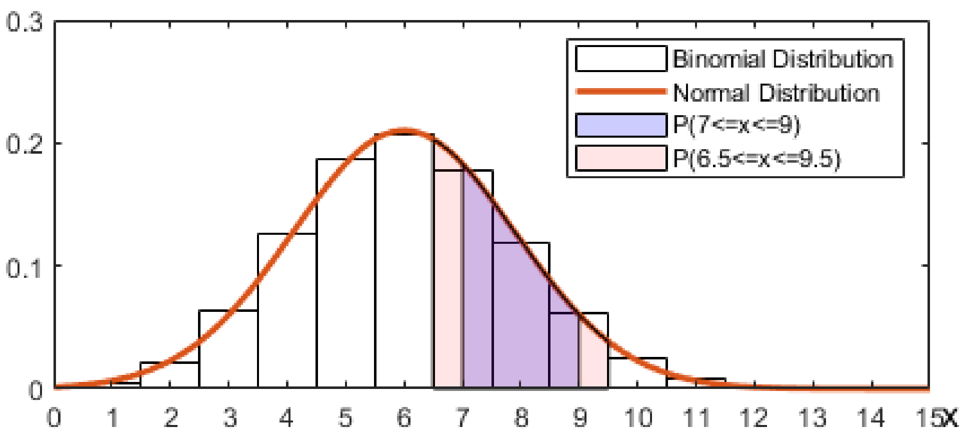
이항분포의 정규근사

- 연속성 수정(Continuity Correction)
  - 이항분포를 정규분포로 근사시키는 경우, 근사값의 오차를 보정하기 위해 x 대신 $x + 0.5$로 계산하는 것

X를 모수 n과 p를 갖는 이항확률변수라고 하자. 그러면 X는 평균이 $\mu = np$이고 분산이 $\sigma^2 = npq = np(1-p)$인 정규분포를 근사적으로 따르게 되며,

$$P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} b(k; n, p) \approx P\left(Z \le \frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

이다. 이항분포의 정규근사는 np와 npq가 5 이상일 때 더 적합하게 된다.



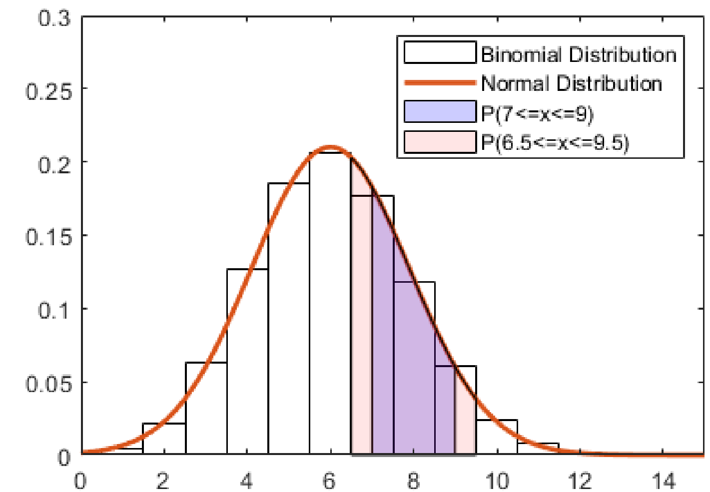
=>

$$P(\alpha \le X \le \beta) \approx P\left(\frac{x - 0.5 - np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

<그림 6.25> $b(x; 15, 0.4)$의 정규근사

이항분포의 정규근사

- 연속성 수정 - 증명
  - 이항분포 $b(x; 15,0.4)$의 정규근사
    - 평균 $\mu = np = 15 \times 0.4 = 6$
    - 분산 $\sigma^2 = npq = 15 \times 0.4 \times 0.6 = 3.6$
  - $7 \le X \le 9$ 인 경우
    - 이항분포의 확률값
      - $P(7 \le X \le 9) = \sum_{x=0}^{9} b(x; 15,0.4) - \sum_{x=0}^{6} b(x; 15,0.4)$
        $= 0.9662 - 0.6098 = 0.3564$
    - 이항분포의 정규근사값
      - $x_1 = 6.5, x_2 = 9.5$ 사이의 영역에 근사값을 가짐
      - $z_1 = \frac{6.5-6}{1.897} = 0.26, z_2 = \frac{9.5-6}{1.897} = 1.85$
      - $P(7 \le X \le 9) \approx P(0.26 < Z < 1.85)$
        $= P(Z < 1.85) - P(Z < 0.26) = 0.9678 - 0.6026 = 0.3652$
      - 따라서, 이항분포 확률값인 0.3564에 근사



<그림 6.25> $b(x; 15,0.4)$의 정규근사

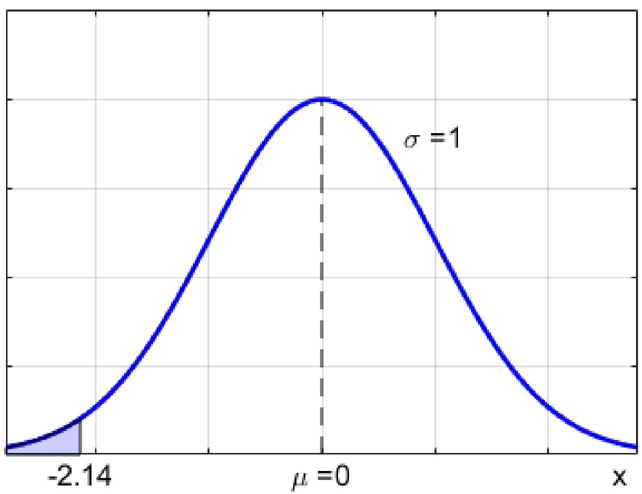
이항분포의 정규근사

- 예제 6.15

빈혈환자가 회복될 확률은 0.4라고 한다. 100명의 빈혈환자 중에서 회복되는 환자의 수(X)가 30보다 적을 확률은 얼마인가?

- 정규분포에 근사시키기 위해, 연속성 수정을 적용하여 구하고자 하는 확률은 $P(X < 30) \approx P(X < 29.5)$
- $\mu = np = 100 \times 0.4 = 40$
- $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0.4 \times 0.6} = 4.899$
- $x = 29.5,\ z = \frac{29.5-40}{4.899} = -2.14$
- $P(X < 30) \approx P(Z < -2.14) = 0.0162$

  $\therefore 1.62\%$



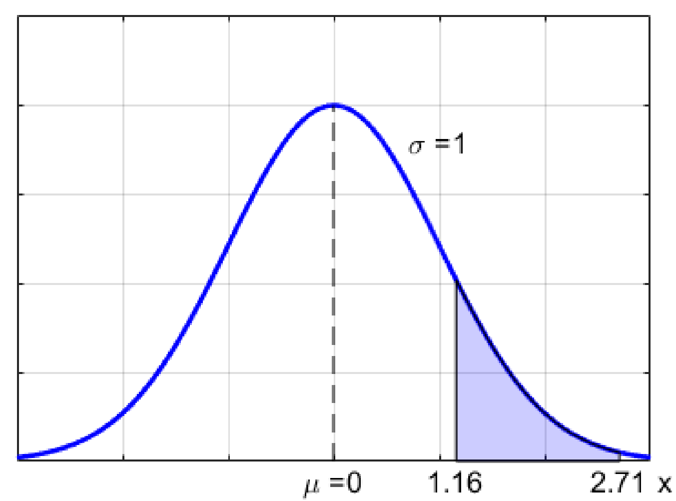
<그림 6.26> 예제 6.15

이항분포의 정규근사

- 예제 6.16

4개의 보기 중 하나의 정답이 있는 4지선다형 문제 200개가 있다고 하자. 그 시험 문제에 관한 지식을 가지고 있지 않은 학생이 200문제 중 80문제의 답을 순전히 추측으로 골랐을 때, 그 중 정답이 25개에서 30개까지일 확률은 얼마인가?

- 정규분포에 근사시키기 위해, 연속성 수정을 적용하여 구하고자 하는 확률은 $P(25 \le X \le 30) = \sum_{x=25}^{30} b(x; 80, 1/4) \approx P(24.5 \le X \le 30.5)$
- $\mu = np = 80 \times 1/4 = 20$
- $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \times 1/4 \times 3/4} = 3.873$
- $x_1 = 24.5, z_1 = \frac{24.5-20}{3.873} = 1.16$
- $x_2 = 30.5, z_2 = \frac{30.5-20}{3.873} = 2.71$
- $P(25 \le X \le 30) \approx P(1.16 < Z < 2.71)$
  $= P(Z < 2.71) - P(Z < 1.16) = 0.1196$
  $\therefore 1.19\%$



<그림 6.27> 예제 6.16

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포

감마분포 및 지수분포

- 감마함수(Gamma Function)
  - 정의
    - 정수로 된 팩토리얼(Factorial)을 자연수에 한정하지 않고, 실수와 복소수까지 확장한 함수

정의 6.2

감마함수는 $\alpha > 0$인 α에 대해서

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

로 정의된다.

  - 특징
    - 양의 정수 n에 대해 $\Gamma(n) = (n-1) \times (n-2) \ldots 1 \times \Gamma(1)$
    - $\Gamma(1) = 1$
    - 양의 정수 n에 대해 $\Gamma(n) = (n-1)!$
    - $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

감마분포 및 지수분포

- 감마함수(Gamma Function)
  - 증명 (1/2)

1. 양의 정수 n에 대해 $\Gamma(n) = (n-1) \times (n-2) \ldots 1 \times \Gamma(1)$
   - $u = x^{\alpha-1}, dv = e^{-x}dx$로 두고 부분적분

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty -e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx + \int_0^\infty e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx = (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}\,dx$$

   - 이때 $\alpha > 1$인 경우,

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2) = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\Gamma(\alpha-3) = \ \ldots$$

   - $\alpha = n,\ n$이 양의 정수인 경우,

$$\Gamma(n) = (n-1) \times (n-2) \ldots 1 \times \Gamma(1)$$

2. $\Gamma(1) = 1$
   - $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$
3. 양의 정수 n에 대해 $\Gamma(n) = (n-1)!$
   - 1번에 2번을 적용함에 따라, $\Gamma(n) = (n-1)!$

감마분포 및 지수분포

- 감마함수(Gamma Function)
  - 증명 (2/2)

4. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
   - $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt$
   - $t = y^2$으로 치환적분
     - $\int_0^\infty 2y \cdot \frac{1}{y} e^{-y^2}\, dy = \int_0^\infty 2e^{-y^2}\, dt = \Gamma(1/2)$
   - 양변 제곱
     - $\Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = 4\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$
   - 극좌표로 변환
     - $\Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = 4\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2}\, rd\, rd\theta = \pi \int_0^\infty 2re^{-r^2}\, dr = \pi \times \left[e^{-r^2}\right]_\infty^0 = \pi$

   $\therefore \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

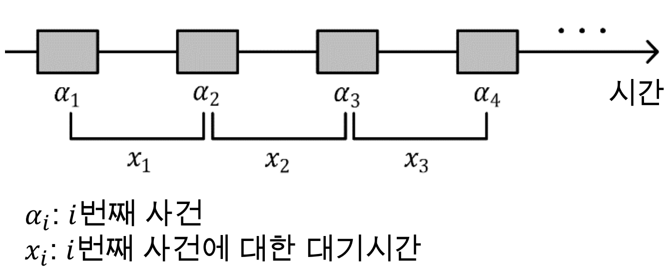
감마분포 및 지수분포

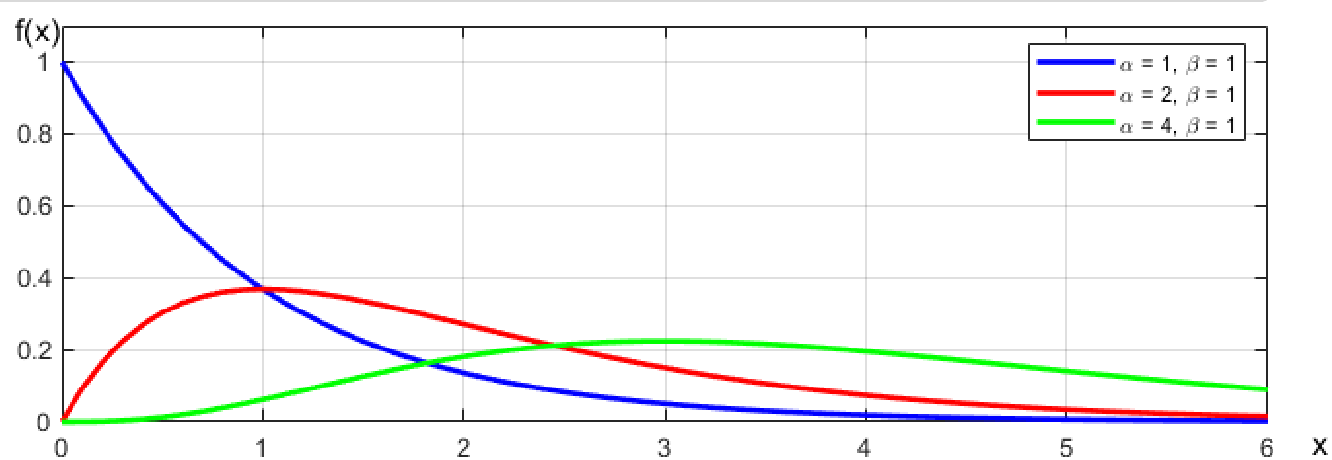
- 감마분포(Gamma Distribution)
  - 정의
    - 평균 소요시간이 β인 사건이 α번 일어날 때까지의 대기시간에 대한 연속형 확률분포

연속형 확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

과 같이 주어질 때, X는 모수 α, β를 가지는 **감마분포**를 따른다고 한다.





<그림 6.28> 감마분포

감마분포 및 지수분포

- 감마분포(Gamma Distribution)
  - 특징
    - 대기시간과 사건 발생 간의 관계 분석에 활용
    - 사건 발생 간 시간 간격이 일정하지 않고, 변동성이 있는 경우에 사용
    - 사건이 처음 발생하기까지의 대기시간을 구하는 경우, 지수분포와 동일한 분포
  - 평균과 분산

정리 6.4

감마분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = \alpha\beta, \qquad \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

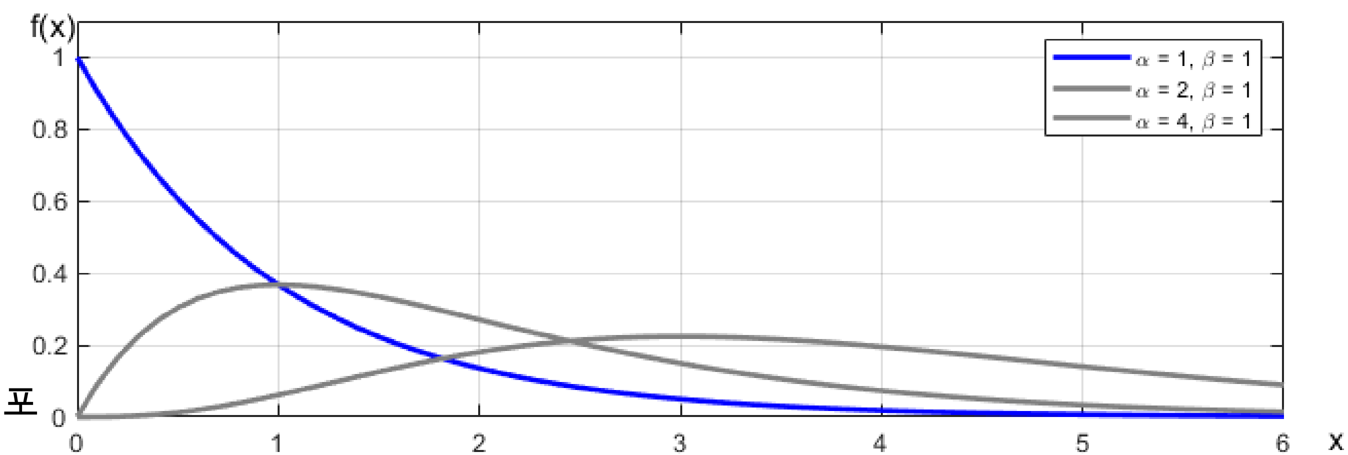
감마분포 및 지수분포

- 지수분포(Exponential Distribution)
  - 정의
    - 평균 소요시간이 β인 사건이 처음 일어날 때까지의 대기시간에 대한 연속형 확률분포

연속형 확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

과 같이 주어질 때, X는 모수 β를 가지는 **지수분포**를 따른다고 한다.



<그림 6.28> $\alpha = 1$인 감마분포

감마분포 및 지수분포

- 지수분포(Exponential Distribution)
  - 특징
    - 감마분포에서 $\alpha = 1$일 때의 분포
    - 포아송 과정이 적용되는 상황에서 지수분포가 응용됨
  - 평균과 분산

따름정리 6.1

지수분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = \beta, \qquad \sigma^2 = \beta^2$$

감마분포 및 지수분포

- 지수분포(Exponential Distribution)
  - 포아송분포와의 관계
    - 포아송분포: 단위시간(t) 당 발생하는 사건 횟수에 대한 분포
      - $\lambda = \frac{1}{\beta}$ 일 때, $p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$
    - 지수분포: 단위시간(t) 당 해당 사건이 처음으로 발생하기까지의 대기시간에 대한 분포

    - 첫 번째 사건이 발생하기까지의 소요시간 계산
      - t시간 동안 하나의 사건도 발생하지 않을 확률
      - $p(0; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$
      - 이는 x시간 내에 포아송 사건이 한 건도 발생하지 않을 확률과 동일
      - $P(X > x) = e^{-\lambda x}$
      - 이에 대한 누적분포함수: $P(0 \leq X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$
      - 이에 대한 확률밀도함수: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

감마분포 및 지수분포

- 지수분포(Exponential Distribution)
  - 건망성(Memoryless)
    - 현 상황에서 다음 사건이 언제 발생할지는 이전에 발생한 사건에 영향을 받지 않는다는 성질
    - $P(X > a + t \mid X > a) = P(X > t)$
      - $P(X > a + t \mid X > a)$: a라는 시간이 지난 상태에서, t라는 시간이 더 지난 후에 사건이 발생할 확률
      - $P(X > t)$: t라는 시간이 지난 후에 사건이 발생할 확률
      - $P(X > a + t \mid X > a) = \frac{P(X>a+t)}{P(X>a)} = \frac{e^{-\lambda(a+t)}}{e^{-\lambda a}} = \frac{e^{-\lambda a}.\ e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda t}$
      - $P(X > t) = e^{-\lambda t}$

      $\therefore P(X > a + t \mid X > a) = P(X > t)$

$F(t) = P(0 \le X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$
$1 - F(t) = P(X > t) = e^{-\lambda t}$
$P(X > a + t) = e^{-\lambda(a+t)}$
$P(X > a) = e^{-\lambda a}$

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.17

어떤 부품이 고장 나기까지의 시간(단위: 년)을 나타내는 확률변수를 T라고 하자. 그리고 T는 고장 나기까지의 평균시간이 $\beta = 5$인 지수분포를 따른다고 하자. 이 부품 5개가 각각 다른 시스템에 설치되었다고 할 때, 8년이 지난 후 적어도 2개의 부품이 여전히 작동하고 있을 확률은 얼마인가?

- 하나의 부품이 8년 이상 작동할 확률: $P(T > 8)$

$$P(T > 8) = \frac{1}{5}\int_{8}^{\infty} e^{-t/5}\,dt = e^{-8/5} \approx 0.2$$

- 8년이 지난 후 작동하고 있을 부품의 수: X
- 이항분포를 사용하여 다음과 같은 확률 계산

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{5} b(x; 5, 0.2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} b(x; 5, 0.2) = 0.2627$$

$\therefore 26.27\%$

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.18

전화교환기에 도착되는 호출신호는 분당 평균이 5회인 포아송 과정을 따른다고 한다. 1분 내에 2번의 호출신호가 도착될 확률을 구하라.

- 2번의 호출신호: $\alpha = 2$
- 분당 평균 호출신호 횟수: $\lambda = 5,\ \beta = 1/5$
- 2번의 호출신호가 도착되기까지 소요된 시간: X

$$P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{\beta^2} x e^{-x/\beta}\, dx = 25 \int_0^1 x e^{-5x}\, dx = 1 - e^{-5}(1+5) = 0.96$$

$\therefore\ 96\%$

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.19

세탁기가 고장날 때까지의 시간 Y는 다음의 밀도함수를 따른다.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-y/4}, & y \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

이것은 $\mu = 4$년인 지수분포이다. 이 세탁기가 6년 이상 고장 나지 않을 확률은 얼마인가? 또한 1년 이내에 고장날 확률은 얼마인가?

- 지수분포의 누적분포함수: $F(y) = \frac{1}{\beta}\int_0^y e^{-t/\beta}\, dt = 1 - e^{-y/\beta}$
- $P(Y > 6) = 1 - F(6) = e^{-3/2} = 0.2231$

  ∴ 6년 이상 고장나지 않을 확률은 22.31%, 6년 이내에 고장날 확률은 77.69%
- $P(Y < 1) = 1 - e^{-1/4} = 0.2212$

  ∴ 1년 이내에 고장날 확률은 22.12%

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.20

어떤 시스템에서는 패킷이 30초에 한 번 수신된다. 이때 4번째 패킷을 수신할 때까지 걸리는 시간(단위: 분)이 2분에서 4분 사이 소요될 확률은 얼마인가?

- 4번째 패킷을 수신: $\alpha = 4$ (감마분포)
- 평균 수신횟수: $\lambda = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{0.5} = 2$ (0.5분에 1번, 1분에 2번)
- 평균 수신 대기시간: $\beta = 0.5$

$$P(2 \le X \le 4) = \int_2^4 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}\, dx = \int_2^4 \frac{2^4}{\Gamma(4)} x^3 e^{-2x}\, dx = 0.39$$

$\therefore\ 39\%$

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.21

보안이 강력한 시스템에서는 공격자로부터 네트워크 공격이 여러 번 시도되나, 현재까지 조사된 바에 의하면 24일에 평균 3번 정도 공격에 성공하는 것으로 확인된다. 이때 첫 번째로 성공하는 공격이 5일 안에 발생할 확률은? (단위: 일)

- 첫 번째로 성공하는 공격: $\alpha = 1$ (지수분포)
- 평균 성공횟수: $\lambda = \frac{1}{8}$ (24일에 3번, 8일에 1번, 1일에 1/8번)
- 평균 수신 대기시간: $\beta = 8$

$$P(0 \leq X \leq 5) = \int_0^5 \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}\, dx = \int_0^5 \frac{1}{8} e^{-x/8}\, dx = 0.4674$$

$\therefore\ 46.74\%$

Thanks!

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.1

```
A = 1;
B = 3;
x = 0:0.01:4;
pdf_values = zeros(size(x));
pdf_values(x >= A & x <= B) = 1 / (B - A);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, pdf_values, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
xlim([0, 4]);
ylim([0, 1]);
xticks([A, B]);
yticks(0.5);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(1, 0, 'A', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(3, 0, 'B', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(0, 0.5, '$$\frac{1}{B-A}$$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'bottom',
'HorizontalAlignment', 'right');
text(0, 0.9, 'f(x)', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'right');
set(gca, 'FontSize', 14);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.2

```
A = 0;
B = 4;
x = -1:0.01:5;
pdf_values = zeros(size(x));
pdf_values(x >= A & x <= B) = 1 / (B - A);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, pdf_values, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
xlim([-1, 5]);
ylim([0, 0.5]);
xticks([A, B]);
yticks(1 / (B - A));
text(5, 0, 'x', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(-1, 0.45, 'f(x)', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'right');
set(gca, 'FontSize', 14);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.3

```
mu = 2;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, min(ylim), '\mu', 'FontSize', 20, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(3.1, 0.33, '\sigma', 'FontSize', 22, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center’);
xlim([0, 4]);
ylim([0, 0.6]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 20, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
set(gca, 'FontSize', 20);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.4 (1/2)

```
mu1 = 10;
sigma1 = 5;
mu2 = 30;
sigma2 = 5;
x1 = mu1 - 4 * sigma1:0.01:mu1 + 4 * sigma1;
x2 = mu2 - 4 * sigma2:0.01:mu2 + 4 * sigma2;
y1 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma1)) * exp(-(x1 - mu1).^2 / (2 * sigma1^2));
y2 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma2)) * exp(-(x2 - mu2).^2 / (2 * sigma2^2));
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
line([mu1 mu1], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
line([mu2 mu2], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--’);
text(mu1, min(ylim), ['\mu_1 = ' num2str(mu1)], 'FontSize', 12,'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment',
'center');
text(mu2, min(ylim), ['\mu_2 = ' num2str(mu2)], 'FontSize', 12,'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment',
'center');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.4 (2/2)

```
text(20, 0.05, '\sigma_1 = \sigma_2', 'FontSize', 13,'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
xlabel('\it{X}');
hold off;
grid on;
```

  - 그림 6.5 (1/2)

```
mu1 = 10;
sigma1 = 5;
mu2 = 10;
sigma2 = 10;
x1 = mu1 - 4 * sigma1:0.01:mu1 + 4 * sigma1;
x2 = mu2 - 4 * sigma2:0.01:mu2 + 4 * sigma2;
y1 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma1)) * exp(-(x1 - mu1).^2 / (2 * sigma1^2));
y2 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma2)) * exp(-(x2 - mu2).^2 / (2 * sigma2^2));
figure;
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
line([mu1 mu1], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.5 (2/2)

```
line([mu2 mu2], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu1, min(ylim), '\mu_1 = \mu_2', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(25, 0.05, ['\sigma_1 =' num2str(sigma1)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(35, 0.02, ['\sigma_2 =' num2str(sigma2)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
xlabel('\it{X}');
hold off;
grid on;
```

  - 그림 6.6 (1/2)

```
mu1 = 10;
sigma1 = 5;
mu2 = 30;
sigma2 = 10;
x1 = mu1 - 4 * sigma1:0.01:mu1 + 4 * sigma1;
x2 = mu2 - 4 * sigma2:0.01:mu2 + 4 * sigma2;
y1 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma1)) * exp(-(x1 - mu1).^2 / (2 * sigma1^2));
y2 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma2)) * exp(-(x2 - mu2).^2 / (2 * sigma2^2));
figure;
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.6 (2/2)

```
hold on;
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
line([mu1 mu1], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
line([mu2 mu2], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu1, min(ylim), ['\mu_1 = ' num2str(mu1)], 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(mu2, min(ylim), ['\mu_2 = ' num2str(mu2)], 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(20, 0.05, ['\sigma_1 =' num2str(sigma1)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(50, 0.02, ['\sigma_2 =' num2str(sigma2)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
xlabel('\it{X}');
hold off;
grid on;
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.7

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 1.84:0.01:4;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.84, 0, '1.84', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'Z', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.8

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = -1.97:0.01:0.86;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-1.97, 0, '-1.97', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(0.86, 0, '0.86', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'Z', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.9

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 0.52:0.01:4;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.2, 0, '0.3015', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(0.52, 0, 'k', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.10

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = -2.58:0.01:-0.18;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--’);
text(0.45, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-0.9, 0, '0.4197', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-0.45, 0, '-0.18', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-2.58, 0, 'k', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.11

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = -0.5:0.01:1.2;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--’);
text(0.15, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-0.6, 0, '-0.5', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.2, 0, '1.2', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.12

```
mu = 300;
sigma = 50;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 362:0.01:450;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(362, 0.007, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(362, 0, '362', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([150, 450]);
ylim([0, 0.01]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(450, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.13

```
mu = 40;
sigma = 6;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 20:0.01:39.22;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(50, 0.05, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(37, 0, '0.45', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([20, 60]);
ylim([0, 0.08]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(60, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.14

```
mu = 40;
sigma = 6;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 43:0.01:60;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(50, 0.05, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(46, 0, '0.14', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([20, 60]);
ylim([0, 0.08]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(60, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.15

```
mu = 3;
sigma = 0.5;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 1:0.01:2.3;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--’);
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(3.8, 0.7, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(2.3, 0, '2.3', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([1, 5]);
ylim([0, 0.9]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(5, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.16

```
mu = 800;
sigma = 40;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 778:0.01:834;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--’);
text(802, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(842, 0.01, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(767, 0, '778', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(839, 0, '834', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([650, 950]);
ylim([0, 0.012]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(60, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.17 (1/2)

```
mu = 3.0;
sigma = 0.005;
x = mu - 4 * sigma:0.000001:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x1 = 2.98:0.000001:2.99;
overlap_y1 = interp1(x, y, overlap_x1);
overlap_x2 = 3.01:0.000001:3.02;
overlap_y2 = interp1(x, y, overlap_x2);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, '\mu =3.0', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(3.008, 70, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(2.99, 0, '2.99', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(3.01, 0, '3.01', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(2.985, 13, '0.0228', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(3.0155, 13, '0.0228', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x1, fliplr(overlap_x1)], [overlap_y1, zeros(size(overlap_y1))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.17 (2/2)

```
fill([overlap_x2, fliplr(overlap_x2)], [overlap_y2, zeros(size(overlap_y2))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([2.98, 3.02]);
ylim([0, 90]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(3.02, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

  - 그림 6.18 (1/2)

```
mu = 1.500;
sigma = 0.2;
x = mu - 4 * sigma:0.001:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x1 = 0.9:0.001:1.108;
overlap_y1 = interp1(x, y, overlap_x1);
overlap_x2 = 1.892:0.001:2.1;
overlap_y2 = interp1(x, y, overlap_x2);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.18 (2/2)

```
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, '\mu =1.500', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.75, 1.8, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.97, 0.5, '0.025', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.03, 0.5, '0.025', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.108, 0, '1.108', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.892, 0, '1.892', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x1, fliplr(overlap_x1)], [overlap_y1, zeros(size(overlap_y1))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
fill([overlap_x2, fliplr(overlap_x2)], [overlap_y2, zeros(size(overlap_y2))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([0.9, 2.1]);
ylim([0, 2.2]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(2.1, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.19

```
mu = 40;
sigma = 2;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 43:0.01:46;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(42.5, 0.18, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(43, 0, '43', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([34, 46]);
ylim([0, 0.22]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(46, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.20

```
mu = 40;
sigma = 2;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 43.5:0.01:46;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(42.5, 0.18, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(43.5, 0, '43.5', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([34, 46]);
ylim([0, 0.22]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(46, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.21

```
mu = 74;
sigma = 7;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 82.26:0.01:100;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(83, 0.05, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(85.5, 0, '0.12', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([49, 100]);
ylim([0, 0.06]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(99, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.22

```
mu = 74;
sigma = 7;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 49:0.01:75.75;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(71, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(83, 0.05, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(70, 0.02, '0.6', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(77, 0, 'D_6', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([49, 100]);
ylim([0, 0.06]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(99, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.23

```
n1 = 5;
p1 = 0.5;
x1 = 0:n1;
y1 = binopdf(x1,n1,p1);
n2 = 15;
p2 = 0.5;
x2 = 0:n2;
y2 = binopdf(x2,n2,p2);
n3 = 25;
p3 = 0.5;
x3 = 0:n3;
y3 = binopdf(x3,n3,p3);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 500, 300]);
bar(x1, y1, 0.3, 'blue')
hold on;
bar(x2, y2, 0.3, 'red')
bar(x3, y3, 0.3, 'green')
xlim([-1, 21]);
ylim([0, 0.5]);
xticks(0:5:20);
legend('n=5, p=0.5','n=15, p=0.5','n=25, p=0.5','location','northeast')
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.24

```
n1 = 100;
p1 = 0.2;
x1 = 0:n1;
y1 = binopdf(x1,n1,p1);
n2 = 200;
p2 = 0.2;
x2 = 0:n2;
y2 = binopdf(x2,n2,p2);
n3 = 400;
p3 = 0.2;
x3 = 0:n3;
y3 = binopdf(x3,n3,p3);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 500, 300]);
bar(x1, y1, 0.3, 'blue')
hold on;
bar(x2, y2, 0.3, 'red')
bar(x3, y3, 0.3, 'green')
xlim([-1, 100]);
ylim([0, 0.11]);
xticks(0:10:100);
legend('n=100, p=0.2','n=200, p=0.2','n=400, p=0.2','location','northeast')
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.25

```
n = 15;
p = 0.4;
x1 = 0:n;
y1 = binopdf(x1,n,p);
mu = n*p;
sigma = sqrt(n*p*(1-p));
x2 = 0:0.1:n;
y2 = normpdf(x2,mu,sigma);
overlap_x1 = 7:0.01:9;
overlap_y1 = interp1(x2, y2, overlap_x1);
overlap_x2 = 6.5:0.01:9.5;
overlap_y2 = interp1(x2, y2, overlap_x2);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 500, 200]);
bar(x1, y1, 1, 'white')
hold on;
plot(x2, y2, 'LineWidth', 2)
fill([overlap_x1, fliplr(overlap_x1)], [overlap_y1, zeros(size(overlap_y1))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
fill([overlap_x2, fliplr(overlap_x2)], [overlap_y2, zeros(size(overlap_y2))], 'Red', 'FaceAlpha', 0.1);
legend('Binomial Distribution','Normal Distribution','P(7<=x<=9)','P(6.5<=x<=9.5)','location','northeast')
xlim([0, 15]);
ylim([0, 0.3]);
xticks(0:1:15);
text(15.5, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right’);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.26

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = -2.8:0.01:-2.14;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1, 0.38, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-2.14, 0, '-2.14', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-2.8, 2.8]);
ylim([0, 0.5]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(2.7, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.27

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 1.16:0.01:2.71;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--’);
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1, 0.38, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.16, 0, '1.16', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(2.71, 0, '2.71', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-3, 3]);
ylim([0, 0.5]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(3.2, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.28

```
x = 0:0.1:6;
y1 = gampdf(x,1,1);
y2 = gampdf(x,2,1);
y3 = gampdf(x,4,1);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 800, 250]);
plot(x, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
plot(x, y2, 'Color', '#808080', 'LineWidth', 2);
plot(x, y3, 'Color', '#808080', 'LineWidth', 2);
xlim([0, 6]);
ylim([0, 1.1]);
text(6.3, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(0, 1.15, 'f(x)', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
legend('\alpha = 1, \beta = 1','\alpha = 2, \beta = 1','\alpha = 4, \beta = 1')
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.29 (1/2)

```
x1 = 0:0.02:10;
mu1 = 0;
sigma1 = 1;
y1 = lognpdf(x1,mu1,sigma1);
x2 = 0:0.02:10;
mu2 = 1;
sigma2 = 1;
y2 = lognpdf(x2,mu2,sigma2);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 800, 250]);
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
text(1.2, 0.6, ['\mu_1 =' num2str(mu1)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.2, 0.53, ['\sigma_1 =' num2str(sigma1)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize',
12);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.29 (2/2)

```
text(3.1, 0.3, ['\mu_1 =' num2str(mu1)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(3.1, 0.23, ['\sigma_1 =' num2str(sigma1)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize',
12);
xlim([0, 5.3]);
ylim([0, 0.9]);
text(5.3, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(0, 0.95, 'f(x)', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```