확률 및 통계학

- 6장 연속형 균일분포 -

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)
세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포
- 카이제곱분포 및 베타분포
- 로그정규분포 및 와이블분포

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포
- 카이제곱분포 및 베타분포
- 로그정규분포 및 와이블분포

연속형 균일분포

- 균일분포(Uniform Distribution)
  - 정의
    - 특정 범위 내에서 각 사상이 일어날 확률이 균일한 분포
  - 종류
    - 이산형 균일분포 (Discrete Uniform Distribution)
      - 유한한 개수 내에서 이산적인 값들에 대한 균일한 확률을 갖는 분포
    - 연속형 균일분포 (Continuous Uniform Distribution)
      - 특정 구간 내에서 실수값들에 대한 균일한 확률을 갖는 분포

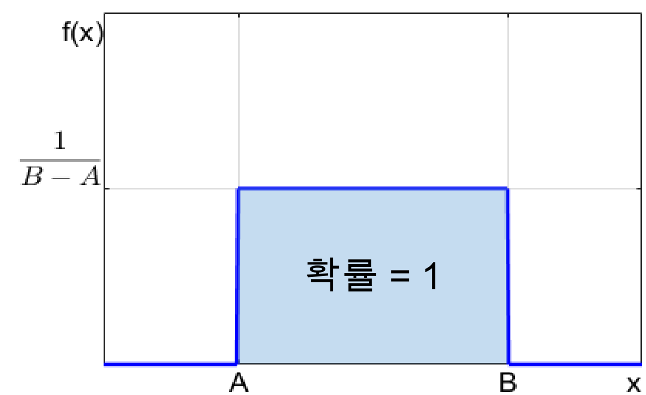
연속형 균일분포

- 연속형 균일분포(Continuous Uniform Distribution)
  - 정의
    - 특정 구간 내 모든 실수에 대해 균일한 확률을 갖는 분포
  - 특징
    - 직사각형 분포(Rectangular Distribution) 형태를 가짐
    - $[A,B]$ 내의 특정 구간에서 구간의 길이가 동일한 경우, 동일한 확률 값을 가짐

구간 $[A,B]$에서 정의되는 연속형 균일확률변수 X의 밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x;A,B) = \begin{cases} \dfrac{1}{B-A}, & A \le x \le B \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

확률밀도함수 조건 ("이공학도를 위한 확률 및 통계학", pp.103, 정의 3.6 참고)
① 모든 실수에 대해 $f(x) \ge 0$, ② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, ③ $P(\mathrm{a} < \mathrm{X} < \mathrm{b}) = \int_a^b f(x)\,dx$



<그림 6.1> 연속형 균일분포

연속형 균일분포

- 연속형 균일분포(Continuous Uniform Distribution)
  - 예제 6.1

어느 회사의 대형 회의실은 4시간을 초과하여 사용할 수 없다. 그 회의실에서는 긴 회의와 짧은 회의가 자주 열리며, 회의시간 X는 구간 $[0, 4]$에서 정의되는 균일분포로 가정할 수 있다고 한다.

(a) 밀도함수를 구하라.
(b) 어떤 회의가 최소한 3시간 이상 계속될 확률은 얼마인가?

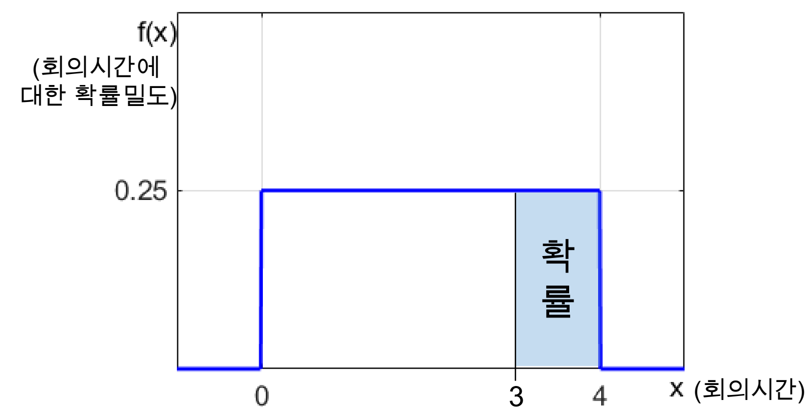
(a) 회의시간은 0시간부터 4시간까지 사용 가능

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

(b) 회의시간이 최소 3시간 이상

방법 1) $P[X \ge 3] = \int_3^4 \frac{1}{4} dx = \left[\frac{1}{4}x\right]_3^4 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

방법 2) $P[X \ge 3] = \frac{0.25}{4-3} = 0.25$



<그림 6.2> 예제 6.1

연속형 균일분포

- 연속형 균일분포(Continuous Uniform Distribution)

정리 6.1

균일분포의 평균(μ)과 분산(σ^2)은 다음과 같다.

$$\mu = \frac{A+B}{2}, \qquad \sigma^2 = \frac{(B-A)^2}{12}$$

- 증명

균일분포에서의 구간이 $[A, B]$일 때, 평균은 구간의 중간값이다.

$$\mu = \frac{A+B}{2}$$

분산은 수학적 기대값에 기반하여 다음과 같이 정리된다. 이때 확률밀도함수는 $f(x) = \frac{1}{B-A}$임을 활용한다.

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_A^B (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_A^B \left(x - \frac{A+B}{2}\right)^2 \frac{1}{B-A}\,dx = \frac{(B-A)^2}{12}$$

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포
- 카이제곱분포 및 베타분포
- 로그정규분포 및 와이블분포

정규분포 및 표준정규분포

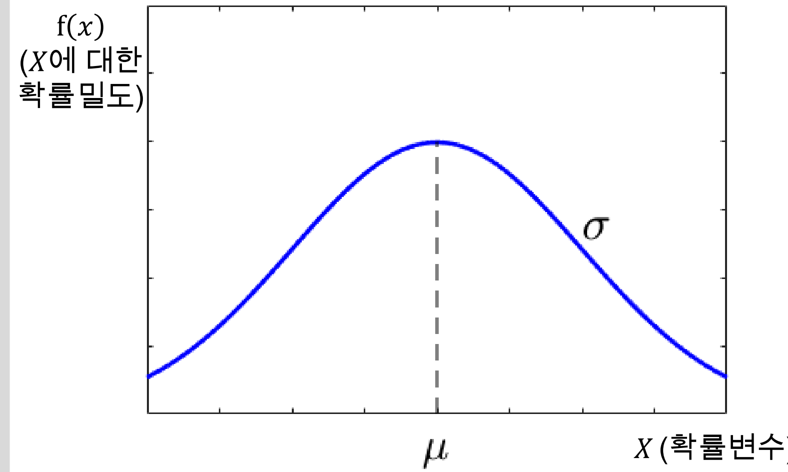
- 정규분포(Normal Distribution)
  - 정의
    - 평균 근처에 값이 모여 있는 종모양의 확률분포

평균 μ와 분산 σ^2을 가지는 확률변수 X의 확률분포는

$$n(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

와 같이 주어진다. 여기서 $\pi = 3.14159 \ldots$이고,

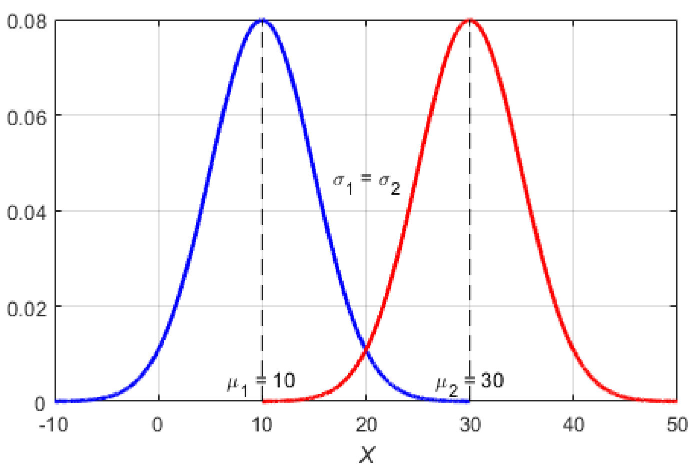
$e = 2.71828 \ldots$이다.



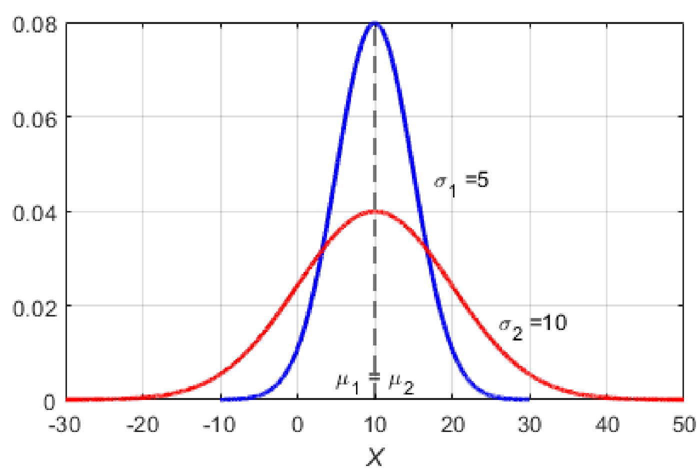
<그림 6.3> 정규곡선

정규분포 및 표준정규분포

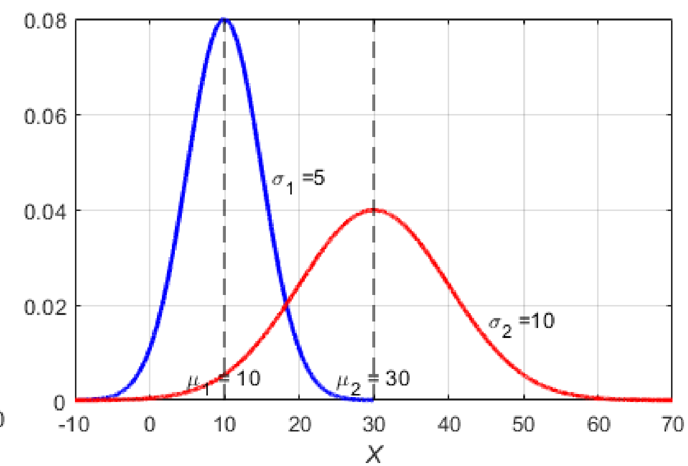
- 정규분포(Normal Distribution)
  - 특징
    - 정규곡선은 평균(μ)을 지나는 수직축에 대한 좌우대칭
    - 평균(μ)은 정규곡선의 최빈값(mode)
    - 정규곡선은 $x = \mu \pm \sigma$ 에서 변곡점을 가짐
    - 평균(μ)에서 멀어질수록 정규곡선은 수평축에 접근
    - 정규곡선과 수평축 사이의 총 면적은 1임



<그림 6.4> 평균은 다르고, 표준편차는 같은 정규곡선



<그림 6.5> 평균은 같고, 표준편차는 다른 정규곡선



<그림 6.6> 평균과 표준편차 모두 다른 정규곡선

정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포(Normal Distribution)

정리 6.2

정규분포의 평균, 표준편차, 분산은 각각 μ, σ, σ^2이다.

- 증명

정의에 의한 평균에, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, dx = \sigma dz$ 을 적용하면 다음과 같다.

$$E(X-\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0, \qquad \boldsymbol{E(X) = \mu}$$

정의에 의한 분산에, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, dx = \sigma dz$ 을 적용하면 다음과 같다.

$$E[(X-\mu)]^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$u = z, dv = ze^{-z^2/2}dz$라 하고, 이들을 부분적분하면, $du = dz, v = -e^{-z^2/2}$가 되어 다음과 같이 된다.

$$E[(X-\mu)]^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} -ze^{-z^2/2} dz + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right) = \sigma^2(0+1) = \boldsymbol{\sigma^2}$$

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 정의
    - 정규분포의 변수를 표준화한 확률분포

정의 6.1

평균이 0이고 분산이 1인 정규확률변수의 분포를 **표준정규분포(Standard Normal Distribution)**이라고 한다.

  - 특징
    - 정규분포의 개별 데이터에 대한 표준화된 형태 제공
      - $z = (x - \mu)/\sigma$
        - 개별 데이터 x가 평균으로부터 얼마나 떨어져 있는지, 또한 표준편차의 몇 배 정도 떨어져 있는지에 대한 계산
    - 표준정규분포표로 확률 계산 가능
      - 복잡한 정규분포 수식 계산에 용이
      - 두 개의 다른 정규분포 서로 비교 시 용이

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 표준정규분포표
    - $z = (x - \mu)/\sigma$ 을 통해 정규분포의 표준화된 값을 제공
    - 확률밀도함수에서 표준화된 확률변수 Z보다 작은 영역에 대한 확률 계산
      - e.g., $P(Z < 1.74) = 0.9591$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

<그림 6.7> 표준정규분포표
('이공학도를 위한 확률 및 통계학', pp.579, 부록 A.3 참고)

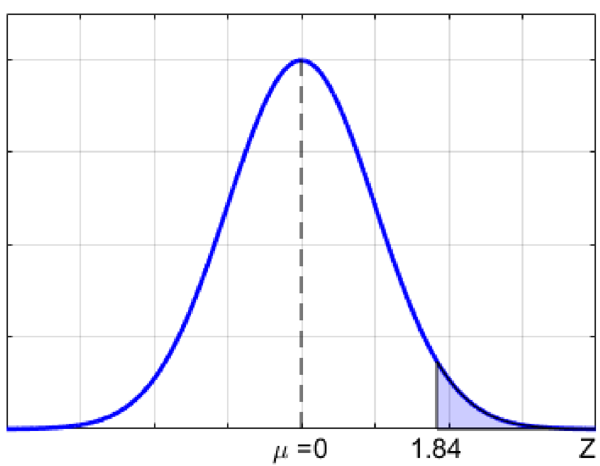
정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.2

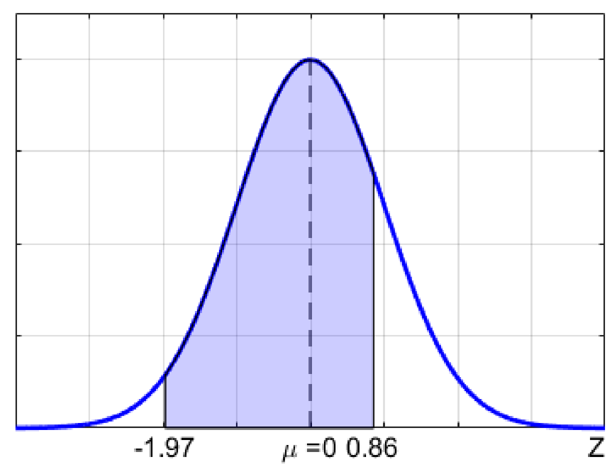
표준정규분포가 주어졌을 때, 다음의 면적을 구하라.
(a) $z = 1.84$의 오른쪽 면적
(b) $z = -1.97$과 $z = 0.86$ 사이의 면적

(a) $P(1.84 < Z) = 1 - P(Z < 1.84) = 1 - 0.9671 = 0.0329$

(b) $P(-1.97 < Z < 0.86) = P(Z < 0.86) - P(Z < -1.97) = 0.8051 - 0.0244 = 0.7807$



<그림 6.7> 예제 6.2(a)

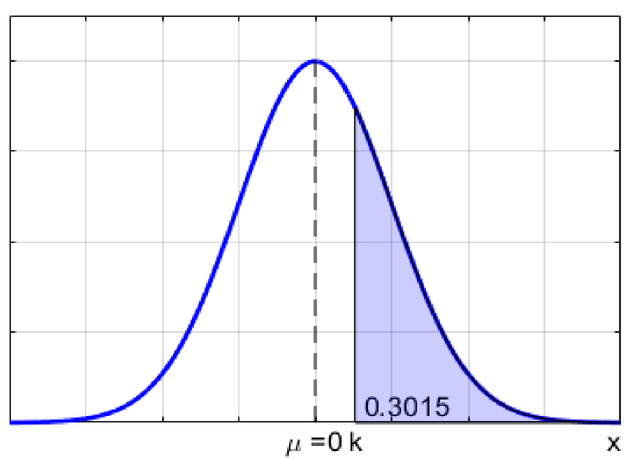


<그림 6.8> 예제 6.2(b)

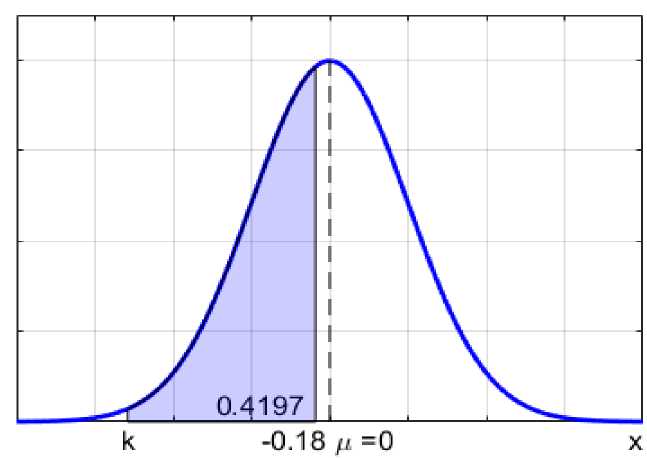
- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.3

표준정규분포가 주어졌을 때, 다음 각 경우에 대하여 k값을 구하라.
(a) $P(Z > k) = 0.3015$
(b) $P(k < Z < -0.18) = 0.4197$

(a) $\mathrm{P}(\mathrm{Z} < k) = 1 - 0.3015 = 0.6985, k = 0.52$
(b) $P(Z < -0.18) = 0.4286, \mathrm{P}(Z < k) = 0.4286 - 0.4197 = 0.0089, k = -2.37$



<그림 6.9> 예제 6.3(a)



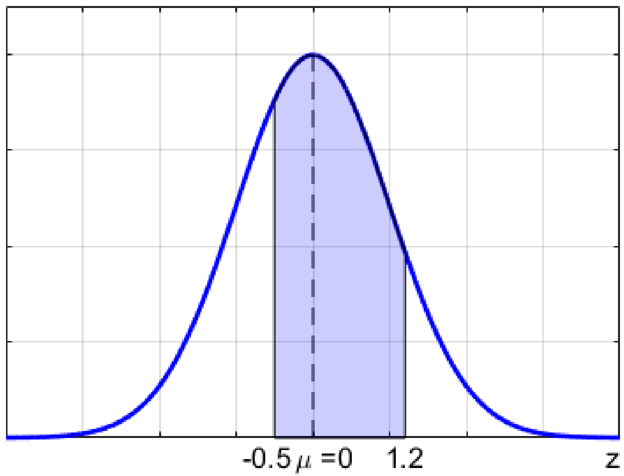
<그림 6.10> 예제 6.3(b)

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.4

$\mu = 50$이고, $\sigma = 10$인 정규분포가 주어졌을 때, X가 45와 62 사이의 값을 취할 확률을 구하라.

- $x_1 = 45, x_2 = 62$에 대응하는 z 값은 $z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5, z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$
- $P(45 < X < 62) = P(-0.5 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < -0.5)$
  $= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$



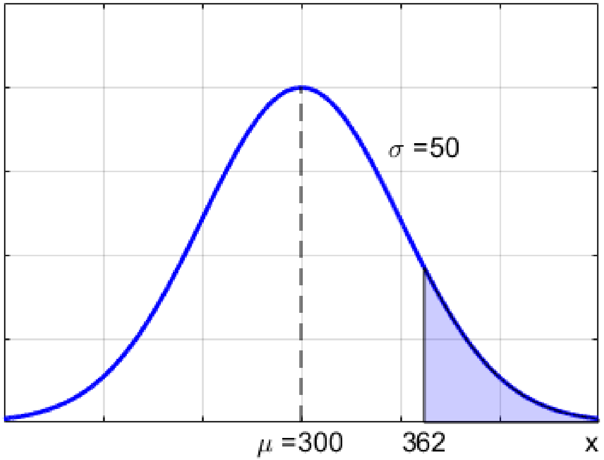
<그림 6.11> 예제 6.4

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.5

$\mu = 300$이고, $\sigma = 50$인 정규분포가 주어졌을 때, X가 362보다 큰 값을 취할 확률을 구하라.

- $x = 362$에 대응하는 z 값은 $z = \frac{(362-300)}{50} = 1.24$
- $P(X > 362) = P(Z > 1.24) = 1 - P(Z < 1.24) = 1 - 0.8925 = 0.1075$



<그림 6.12> 예제 6.5

정규분포 및 표준정규분포

- 표준정규분포(Standard Normal Distribution)
  - 예제 6.6

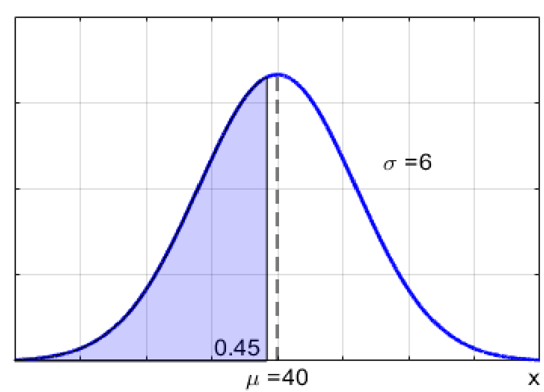
$\mu = 40$이고, $\sigma = 6$인 정규분포가 주어졌을 때, 다음을 구하라.
(a) 왼쪽 면적이 전체 면적의 45%가 되는 x
(b) 오른쪽 면적이 전체 면적의 14%가 되는 x

(a) $P(Z < -0.13) = 0.45$

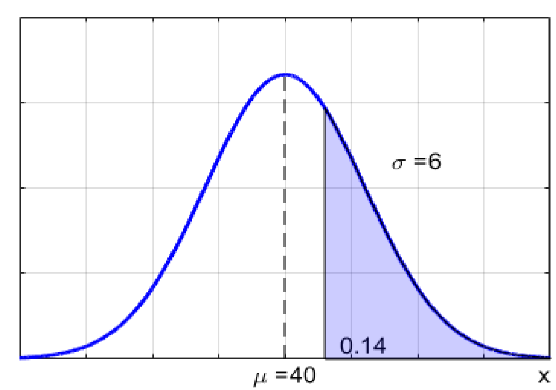
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}, x = \sigma z + \mu = 6 \times (-0.13) + 40 = 39.22$$

(b) $P(Z < 1.08) = 1 - 0.14 = 0.86$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}, x = \sigma z + \mu = 6 \times 1.08 + 40 = 46.48$$



<그림 6.13> 예제 6.6(a)



<그림 6.14> 예제 6.6(b)

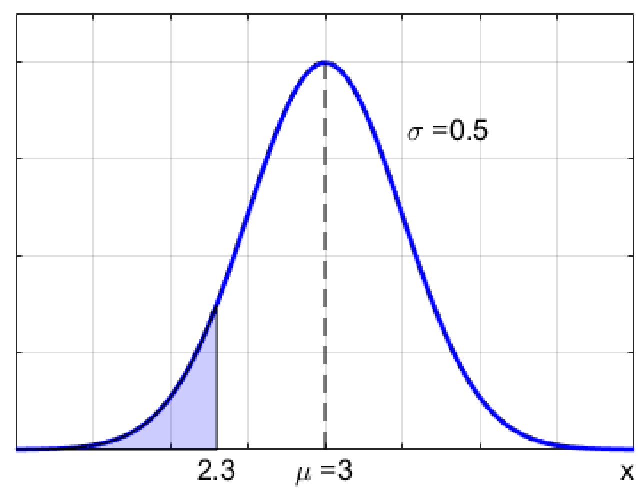
정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.7

어느 축전지는 평균수명이 3년이고, 표준편차가 0.5년인 것으로 알려져 있다. 축전지의 수명이 정규분포를 따른다고 가정할 때, 임의로 주어진 전지의 수명이 2.3년보다 짧을 확률을 구하라.

- $\mu = 3, \sigma = 0.5$이므로, $z = \frac{2.3-3}{0.5} = -1.4$
- $P(X < 2.3) = P(Z < -1.4) = 0.0808$

  $\therefore 8.08\%$



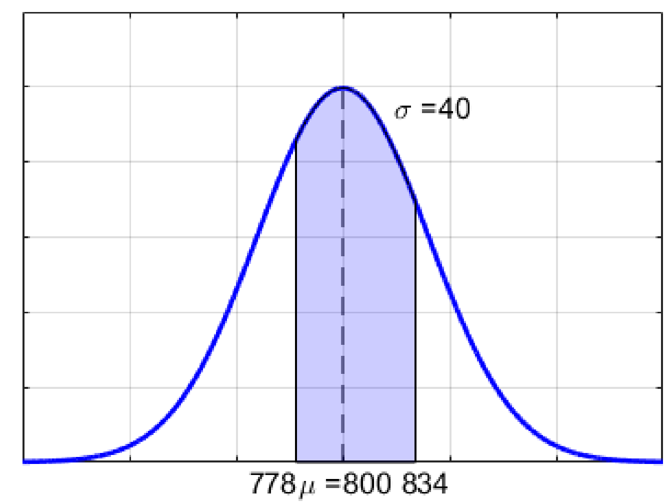
<그림 6.15> 예제 6.7

정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.8

어느 전기회사에서는 평균수명이 800시간이고 표준편차가 40시간인 정규분포의 수명분포를 가지는 전구를 생산하고 있다. 임의로 선정된 전구의 수명이 778시간과 834시간 사이에 있을 확률을 구하라.

- $x_1 = 778, x_2 = 834$이므로, $z_1 = \frac{778-800}{40} = -0.55, z_2 = \frac{834-800}{40} = 0.85$
- $P(778 < X < 834) = P(-0.55 < Z < 0.85)$
  $= P(Z < 0.85) + P(Z < -0.55)$
  $= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111$
  $\therefore 51.11\%$



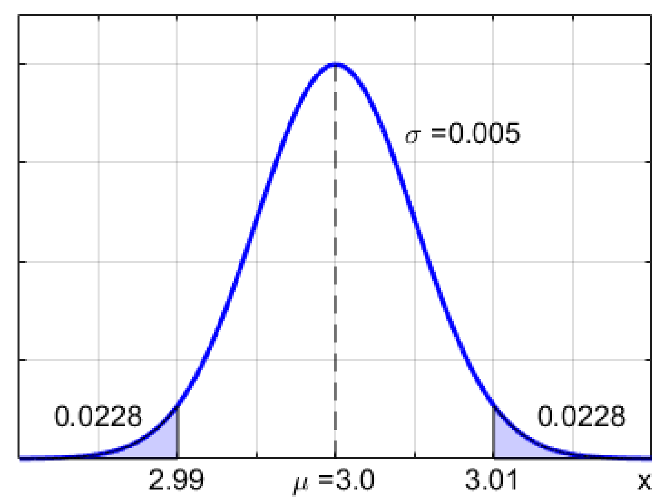
<그림 6.16> 예제 6.8

정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.9

어느 공정에서 볼베어링의 직경이 매우 중요한 품질특성이 된다. 구매자 측은 직경의 규격한계를 $3.0 \pm 0.01cm$로 정해 놓고 있다. 따라서, 이 규격한계를 벗어나는 부품은 불합격처리된다. 볼베어링의 직경은 평균이 3.0, 표준편차 0.005인 정규분포를 따른다고 할 때, 생산된 제품 중 불합격으로 처리되는 것은 얼마나 되겠는가?

- $x_1 = 2.99, x_2 = 3.01$이므로, $z_1 = \frac{2.99-3.0}{0.005} = -2.0, z_2 = \frac{3.01-3.0}{0.005} = 2.0$
- $P(2.99 < X < 3.01) = P(-2.0 < Z < 2.0) = P(Z < 2.0) \times 2 = 0.0456$
  $\therefore 4.56\%$



<그림 6.17> 예제 6.9

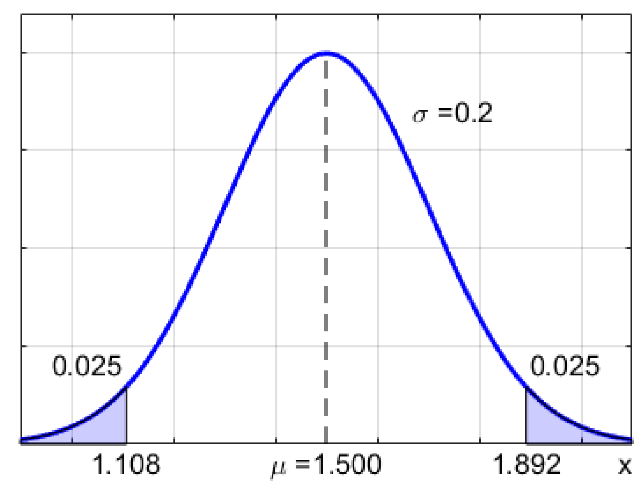
정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.10

어떤 치수가 규격한계인 $1.50 \pm d$ 내에 들어오지 않으면 모든 부품을 불합격시키는 평가기준이 사용된다고 한다. 측정값은 평균이 1.50이고 표준편차가 0.2인 정규분포를 따른다고 알려졌다. 측정값의 95%가 규격한계 내에 들도록 d값을 결정하라.

- $P(-1.96 < Z < 1.96) = P(Z < 1.96) - P(Z < -1.96) = 0.9750 - 0.0250 = 0.95$
- $\mu = 1.50, \sigma = 0.2$
- $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, 1.96 = \frac{(1.50+d)-1.50}{0.2}$

  $\therefore d = 0.392$



<그림 6.18> 예제 6.10

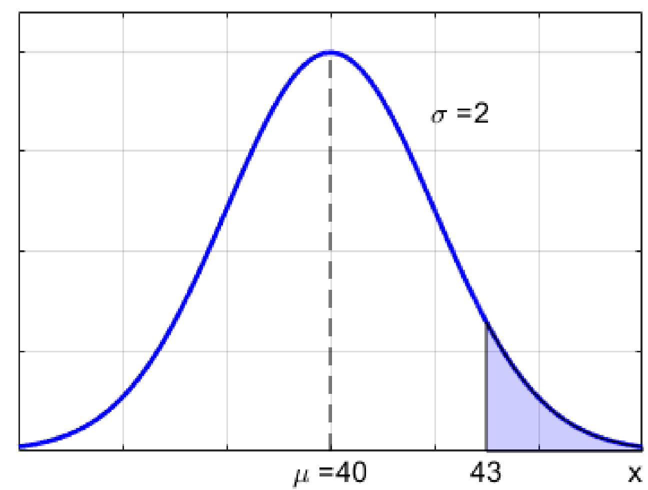
정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.11

평균저항이 40Ω이고 표준편차가 2Ω인 저항기를 만드는 기계가 있다. 저항이 정규분포를 따른다고 가정할 때, 43Ω이 넘는 저항을 가지게 되는 저항기는 몇 퍼센트나 되겠는가?

- $\mu = 40, \sigma = 2$
- $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{(43-40)}{2} = 1.5$
- $P(X > 43) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 0.0668$

$\therefore 6.68\%$



<그림 6.19> 예제 6.11

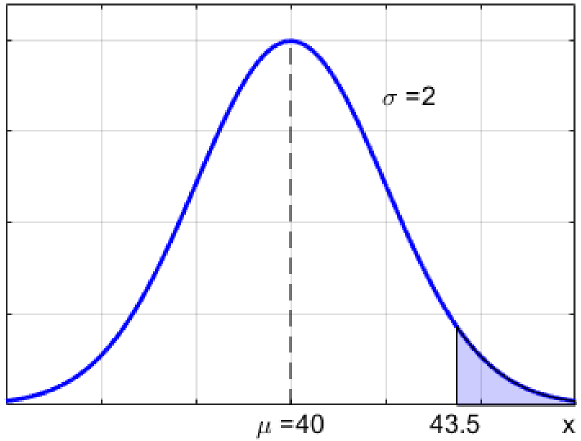
정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.12

예제 6.11에서 저항의 측정값을 소수 첫째 자리에서 반올림할 때 43Ω이 넘는 저항기의 비율을 구하라.

- 저항이 42.5Ω보다 크고 43.5Ω보다 작은 저항기는 모두 43Ω의 저항을 가지므로, 43.5Ω보다 큰 저항기의 비율을 구해야 함
- $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{43.5-40}{2} = 1.75$
- $P(X > 43.5) = P(Z > 1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 0.0401$

  $\therefore 4.01\%$



<그림 6.20> 예제 6.12

정규분포 및 표준정규분포

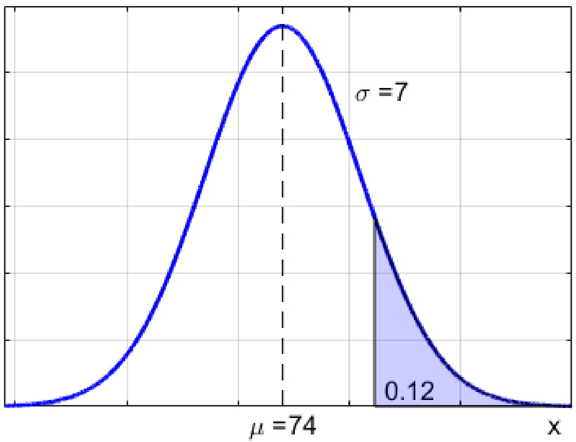
- 정규분포의 적용
  - 예제 6.13

어느 시험 성적이 평균이 74점이고 표준편차가 7인 정규분포를 따른다고 한다. 12%의 학생에게 A 학점이 주어졌다면, A 학점을 받은 학생 중 가장 낮은 점수와 B 학점을 받은 학생 중 가장 높은 점수는 각각 얼마나 되겠는가?

- 12%의 학생이 A 학점이면, 88%의 학생은 B 학점임
- $P(Z < 1.18) = 0.88$이므로, $1.18 = \frac{(x-74)}{7}, x = 82.26$

  $\therefore$ A 학점 중 가장 낮은 점수는 83점,

  B 학점 중 가장 높은 점수는 82점



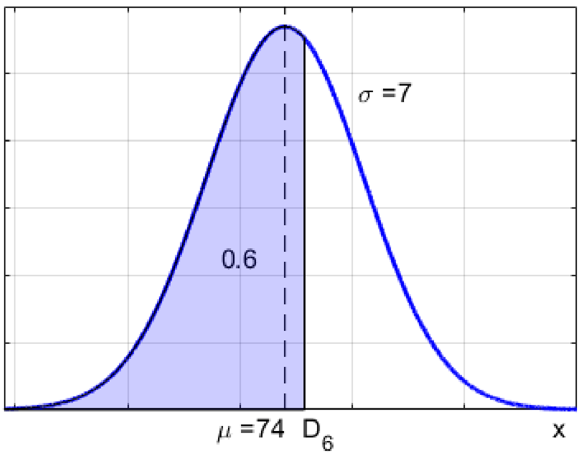
<그림 6.21> 예제 6.13

정규분포 및 표준정규분포

- 정규분포의 적용
  - 예제 6.14

어느 시험 성적이 평균이 74점이고 표준편차가 7인 정규분포를 따른다고 한다. 12%의 A 학점을 받은 학생 중 가장 낮은 점수는 83점이고, 88%의 B 학점을 받은 학생 중 가장 높은 점수가 82점이다. 이때의 제6십분위수를 구하라.
*십분위수: 전체 자료를 크기 순으로 10개의 구간으로 나눈 것

- 제6십분위수(D_6)는 60%의 면적에 달하는 x를 의미
- $P(Z < 0.25) \approx 0.6$이므로, $0.25 = \frac{x-74}{7}, x = 75.75$
  ∴ 성적의 60%는 75점 이하임



<그림 6.22> 예제 6.14

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포
- 카이제곱분포 및 베타분포
- 로그정규분포 및 와이블분포

이항분포의 정규근사

- 이항분포(Binomial Distribution)
  - 연속된 n번의 독립시행이 확률 p를 가질 때의 이산형 확률 분포

정리 5.2

이항분포 $b(x; n, p)$의 평균(μ)과 분산(σ)은 다음과 같다.

$$\mu = np, \sigma^2 = npq$$

'이공학도를 위한 확률 및 통계학', pp.165, 정리 5.2 참고

- 이항분포의 정규근사
  - 정규곡선 면적을 활용하여 이항분포 근사값을 계산하는 정리

정리 6.3

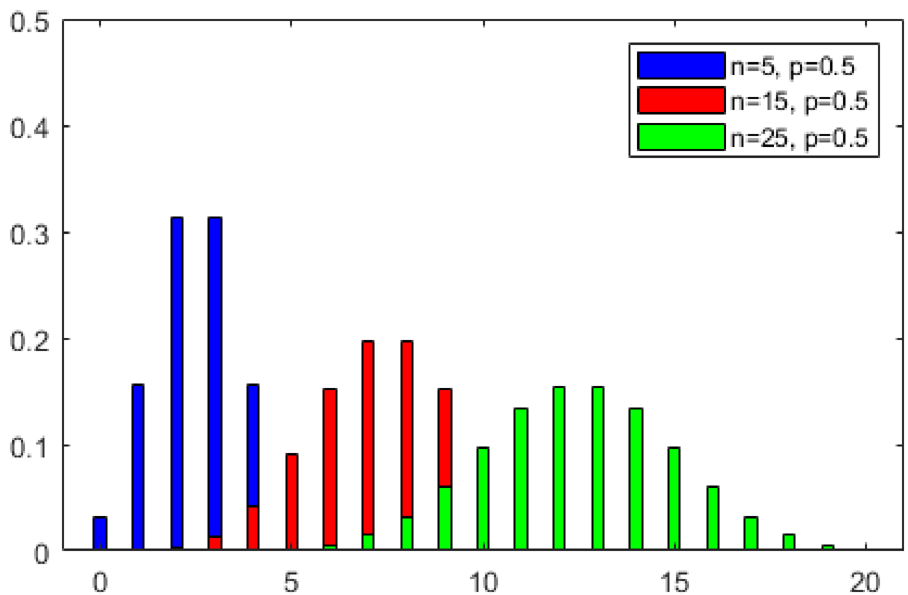
X가 $\mu = np$이고, $\sigma^2 = npq$인 이항확률변수이면, $n \to \infty$일 때

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

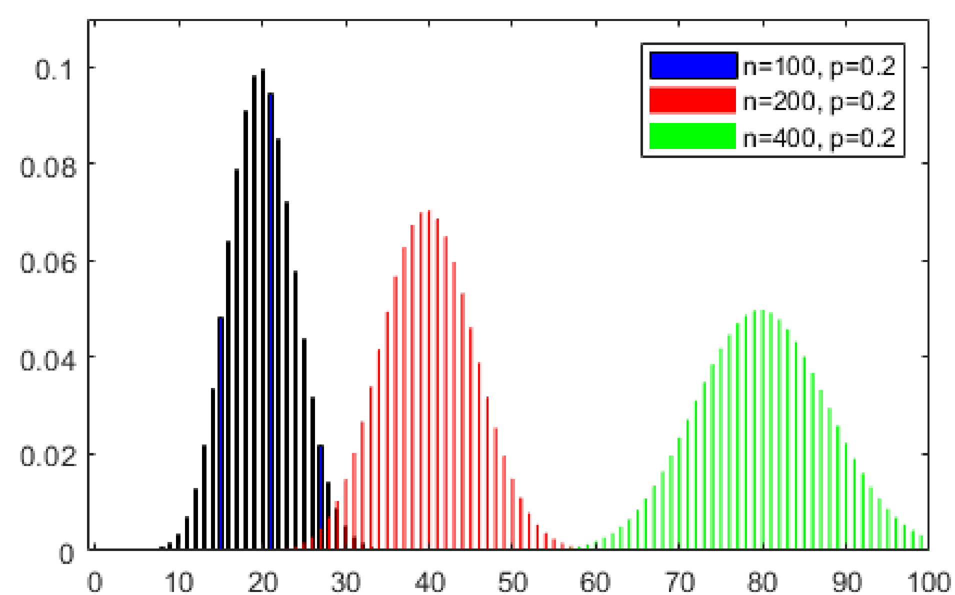
의 극한분포는 표준정규분포, 즉 $n(z; 0,1)$을 따른다.

이항분포의 정규근사

- 정규근사 가능 조건
  - 시행횟수 n이 작더라도 확률 p가 0.5에 가까운 경우
  - 확률 p가 0.5가 아니더라도 시행횟수 n이 큰 경우



<그림 6.23> n이 작고 p가 0.5인 히스토그램



<그림 6.24> p가 0.5가 아니고 n도 큰 히스토그램

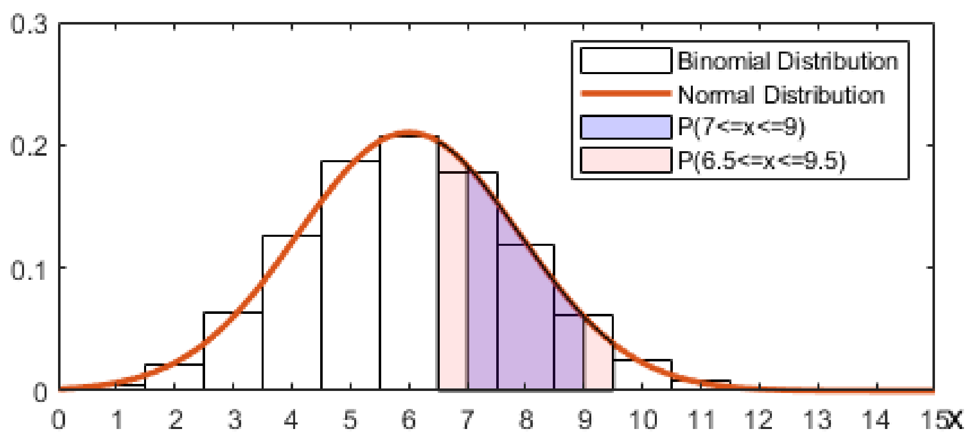
이항분포의 정규근사

- 연속성 수정(Continuity Correction)
  - 이항분포를 정규분포로 근사시키는 경우, 근사값의 오차를 보정하기 위해 x 대신 $x + 0.5$로 계산하는 것

X를 모수 n과 p를 갖는 이항확률변수라고 하자. 그러면 X는 평균이 $\mu = np$이고 분산이 $\sigma^2 = npq = np(1-p)$인 정규분포를 근사적으로 따르게 되며,

$$P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} b(k; n, p) \approx P\left(Z \le \frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

이다. 이항분포의 정규근사는 np와 npq가 5 이상일 때 더 적합하게 된다.



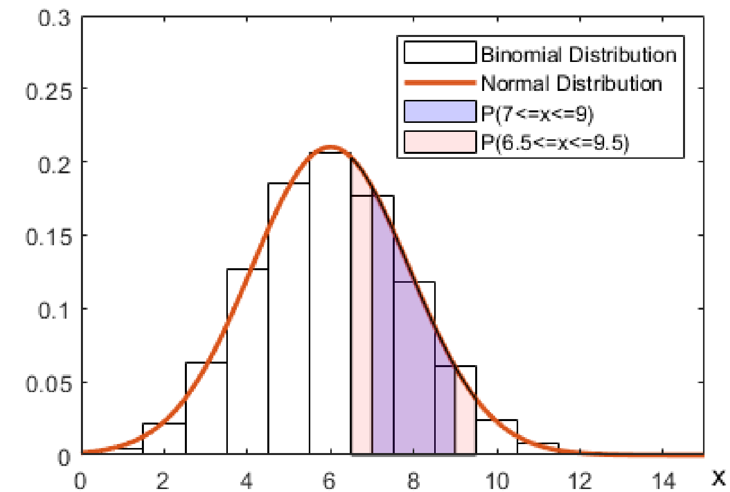
=>

$$P(\alpha \le X \le \beta) \approx P\left(\frac{x - 0.5 - np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{x + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

<그림 6.25> $b(x; 15, 0.4)$의 정규근사

이항분포의 정규근사

- 연속성 수정 - 증명
  - 이항분포 $b(x; 15,0.4)$의 정규근사
    - 평균 $\mu = np = 15 \times 0.4 = 6$
    - 분산 $\sigma^2 = npq = 15 \times 0.4 \times 0.6 = 3.6$



<그림 6.25> $b(x; 15,0.4)$의 정규근사

- $7 \le X \le 9$ 인 경우
  - 이항분포의 확률값
    - $P(7 \le X \le 9) = \sum_{x=0}^{9} b(x; 15,0.4) - \sum_{x=0}^{6} b(x; 15,0.4)$
      $= 0.9662 - 0.6098 = 0.3564$
  - 이항분포의 정규근사값
    - $x_1 = 6.5, x_2 = 9.5$ 사이의 영역에 근사값을 가짐
    - $z_1 = \frac{6.5-6}{1.897} = 0.26, z_2 = \frac{9.5-6}{1.897} = 1.85$
    - $P(7 \le X \le 9) \approx P(0.26 < Z < 1.85)$
      $= P(Z < 1.85) - P(Z < 0.26) = 0.9678 - 0.6026 = 0.3652$
    - 따라서, 이항분포 확률값인 0.3564에 근사

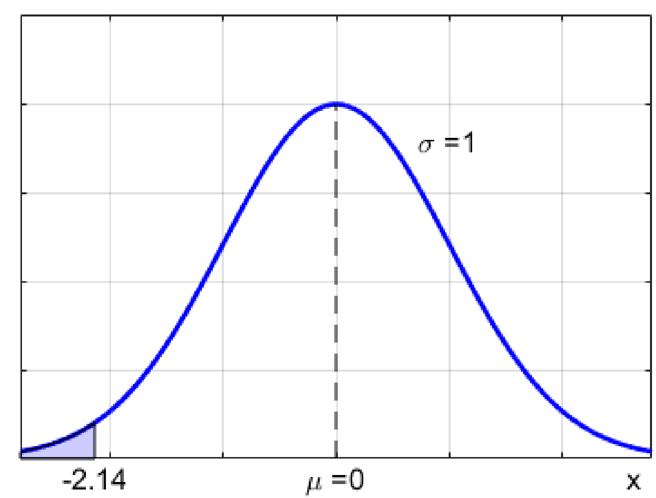
이항분포의 정규근사

- 예제 6.15

빈혈환자가 회복될 확률은 0.4라고 한다. 100명의 빈혈환자 중에서 회복되는 환자의 수(X)가 30보다 적을 확률은 얼마인가?

- 정규분포에 근사시키기 위해, 연속성 수정을 적용하여 구하고자 하는 확률은 $P(X < 30) \approx P(X < 29.5)$
- $\mu = np = 100 \times 0.4 = 40$
- $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0.4 \times 0.6} = 4.899$
- $x = 29.5,\ z = \frac{29.5-40}{4.899} = -2.14$
- $P(X < 30) \approx P(Z < -2.14) = 0.0162$

  $\therefore 1.62\%$



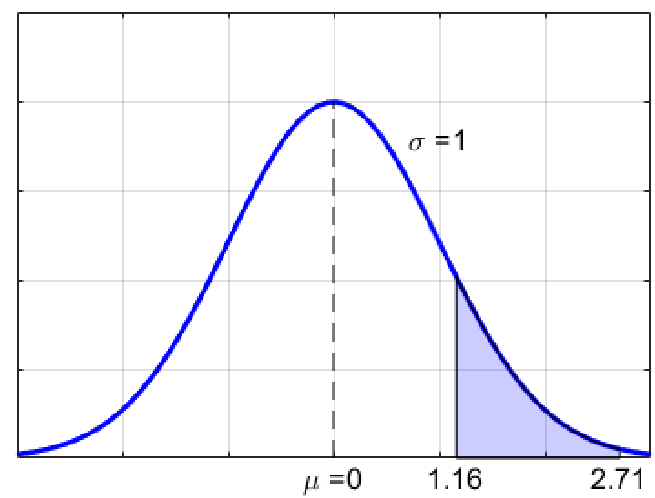
<그림 6.26> 예제 6.15

이항분포의 정규근사

- 예제 6.16

4개의 보기 중 하나의 정답이 있는 4지선다형 문제 200개가 있다고 하자. 그 시험 문제에 관한 지식을 가지고 있지 않은 학생이 200문제 중 80문제의 답을 순전히 추측으로 골랐을 때, 그 중 정답이 25개에서 30개까지일 확률은 얼마인가?

- 정규분포에 근사시키기 위해, 연속성 수정을 적용하여 구하고자 하는 확률은 $P(25 \le X \le 30) = \sum_{x=25}^{30} b(x; 80,1/4) \approx P(24.5 \le X \le 30.5)$
- $\mu = np = 80 \times 1/4 = 20$
- $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{80 \times 1/4 \times 3/4} = 3.873$
- $x_1 = 24.5, z_1 = \frac{24.5-20}{3.873} = 1.16$
- $x_2 = 30.5, z_2 = \frac{30.5-20}{3.873} = 2.71$
- $P(25 \le X \le 30) \approx P(1.16 < Z < 2.71)$
  $= P(Z < 2.71) - P(Z < 1.16) = 0.1196$
  $\therefore 11.96\%$



<그림 6.27> 예제 6.16

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포
- 카이제곱분포 및 베타분포
- 로그정규분포 및 와이블분포

감마분포 및 지수분포

- 감마함수(Gamma Function)
  - 정의
    - 정수로 된 팩토리얼(Factorial)을 자연수에 한정하지 않고, 실수와 복소수까지 확장한 함수

정의 6.2

감마함수는 $\alpha > 0$인 α에 대해서

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

로 정의된다.

  - 특징
    - 양의 정수 n에 대해 $\Gamma(n) = (n-1) \times (n-2) \dots 1 \times \Gamma(1)$
    - $\Gamma(1) = 1$
    - 양의 정수 n에 대해 $\Gamma(n) = (n-1)!$
    - $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

감마분포 및 지수분포

- 감마함수(Gamma Function)
  - 증명 (1/2)

1. 양의 정수 n에 대해 $\Gamma(n) = (n-1) \times (n-2) \dots 1 \times \Gamma(1)$
   - $u = x^{\alpha-1}, dv = e^{-x}dx$로 두고 부분적분

     $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\, dx$

     $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty -e^{-x}x^{\alpha-1}\, dx + \int_0^\infty e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\, dx = (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}\, dx$
   - 이때 $\alpha > 1$인 경우,

     $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\alpha-2) = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\Gamma(\alpha-3) =$ …
   - $\alpha = n,\ n$이 양의 정수인 경우,

     $\Gamma(n) = (n-1) \times (n-2) \dots 1 \times \Gamma(1)$
2. $\Gamma(1) = 1$
   - $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$
3. 양의 정수 n에 대해 $\Gamma(n) = (n-1)!$
   - 1번에 2번을 적용함에 따라, $\Gamma(n) = (n-1)!$

감마분포 및 지수분포

- 감마함수(Gamma Function)
  - 증명 (2/2)

    4. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
       - $\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t}\, dt$
       - $t = y^2$으로 치환적분
         - $\int_0^\infty 2y \cdot \frac{1}{y} e^{-y^2}\, dy = \int_0^\infty 2e^{-y^2}\, dt = \Gamma(1/2)$
       - 양변 제곱
         - $\Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = 4\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$
       - 극좌표로 변환
         - $\Gamma(1/2)\Gamma(1/2) = 4\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2}\, rd\, rd\theta = \pi \int_0^\infty 2re^{-r^2}\, dr = \pi \times \left[e^{-r^2}\right]_\infty^0 = \pi$

       $\therefore \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

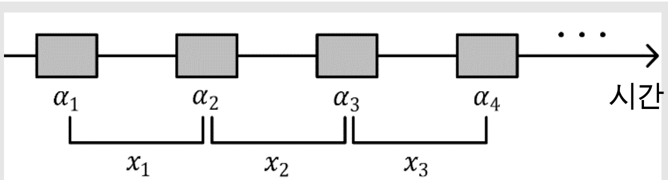
감마분포 및 지수분포

- 감마분포(Gamma Distribution)
  - 정의
    - 평균 소요시간이 β인 사건이 α번 일어날 때까지의 대기시간에 대한 연속형 확률분포

연속형 확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

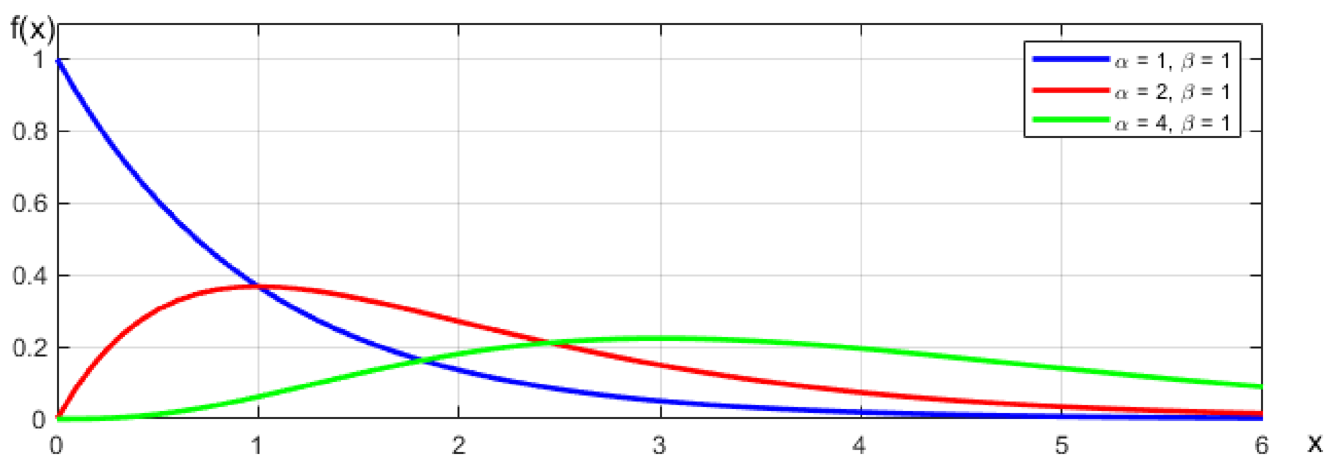
과 같이 주어질 때, X는 모수 α, β를 가지는 **감마분포**를 따른다고 한다.



α_i: i번째 사건
x_i: i번째 사건에 대한 대기시간

x축: 대기시간
y축: 대기시간에 대한 감마분포의 확률밀도

<그림 6.28> 감마분포



감마분포 및 지수분포

- 감마분포(Gamma Distribution)
  - 특징
    - 대기시간과 사건 발생 간의 관계 분석에 활용
    - 사건 발생 간 시간 간격이 일정하지 않고, 변동성이 있는 경우에 사용
    - 사건이 처음 발생하기까지의 대기시간을 구하는 경우, 지수분포와 동일한 분포
  - 평균과 분산

정리 6.4

감마분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = \alpha\beta, \qquad \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

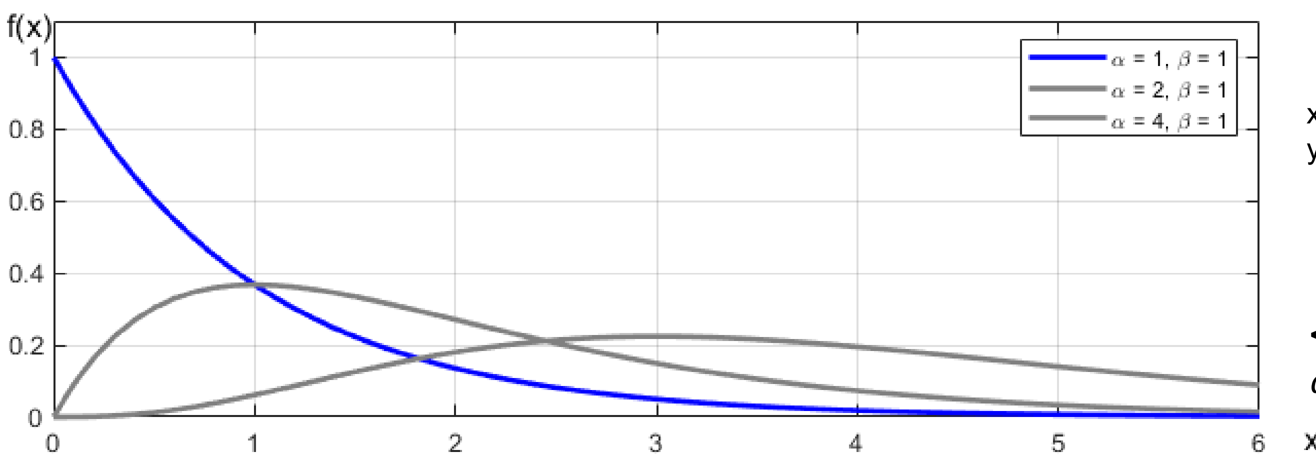
감마분포 및 지수분포

- 지수분포(Exponential Distribution)
  - 정의
    - 평균 소요시간이 β인 사건이 처음 일어날 때까지의 대기시간에 대한 연속형 확률분포

연속형 확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

과 같이 주어질 때, X는 모수 β를 가지는 **지수분포**를 따른다고 한다.



x축: 대기시간
y축: 대기시간에 대한 지수분포의 확률밀도

<그림 6.28>
$\alpha = 1$인 감마분포인 지수분포

감마분포 및 지수분포

- 지수분포(Exponential Distribution)
  - 특징
    - 감마분포에서 $\alpha = 1$일 때의 분포
    - 포아송 과정이 적용되는 상황에서 지수분포가 응용됨
  - 평균과 분산

따름정리 6.1

지수분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = \beta, \qquad \sigma^2 = \beta^2$$

감마분포 및 지수분포

- 지수분포(Exponential Distribution)
  - 포아송분포와의 관계
    - 포아송분포: 단위시간(t) 당 발생하는 사건 횟수에 대한 분포
      - $\lambda = \frac{1}{\beta}$ 이므로, $p(x; \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$
    - 지수분포: 단위시간(t) 당 해당 사건이 처음으로 발생하기까지의 대기시간에 대한 분포

    - 첫 번째 사건이 발생하기까지의 소요시간 계산
      - t시간 동안 하나의 사건도 발생하지 않을 확률: $p(0; \lambda t) = e^{-\lambda t}$
      - x시간 내 포아송 사건이 한 건도 발생하지 않을 확률:

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}$$

        - 이는 x시간 이후에 사건이 발생할 확률
      - 이에 대한 누적분포함수: $P(0 \leq X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$
      - 이에 대한 확률밀도함수: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

감마분포 및 지수분포

- 지수분포(Exponential Distribution)
  - 건망성(Memoryless)
    - 현 상황에서 다음 사건이 언제 발생할지는 이전에 발생한 사건에 영향을 받지 않는다는 성질
    - $P(X > a + t \mid X > a) = P(X > t)$
      - $P(X > a + t \mid X > a)$: a라는 시간이 지난 상태에서, t라는 시간이 더 지난 후에 사건이 발생할 확률
      - $P(X > t)$: t라는 시간이 지난 후에 사건이 발생할 확률
      - $P(X > a + t \mid X > a) = \frac{P(X>a+t)}{P(X>a)} = \frac{e^{-\lambda(a+t)}}{e^{-\lambda a}} = \frac{e^{-\lambda a}.\, e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda t}$
      - $P(X > t) = e^{-\lambda t}$

      $\therefore P(X > a + t \mid X > a) = P(X > t)$

      => a라는 시간동안 발생한 사건에 영향을 받지 않음을 의미

$F(t) = P(0 \le X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$
$1 - F(t) = P(X > t) = e^{-\lambda t}$
$P(X > a + t) = e^{-\lambda(a+t)}$
$P(X > a) = e^{-\lambda a}$

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.17

어떤 부품이 고장 나기까지의 시간(단위: 년)을 나타내는 확률변수를 T라고 하자. 그리고 T는 고장 나기까지의 평균시간이 $\beta = 5$인 지수분포를 따른다고 하자. 이 부품 5개가 각각 다른 시스템에 설치되었다고 할 때, 8년이 지난 후 적어도 2개의 부품이 여전히 작동하고 있을 확률은 얼마인가?

- 하나의 부품이 8년 이상 작동할 확률: $P(T > 8)$

$$P(T > 8) = \frac{1}{5}\int_8^{\infty} e^{-t/5}\, dt = e^{-8/5} \approx 0.2$$

- 8년이 지난 후 작동하고 있을 부품의 수: X
- 이항분포를 사용하여 다음과 같은 확률 계산

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{5} b(x; 5,0.2) = 1 - \sum_{x=0}^{1} b(x; 5,0.2) = 0.2627$$

$\therefore\ 26.27\%$

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.18

전화교환기에 도착되는 호출신호는 분당 평균이 5회인 포아송 과정을 따른다고 한다. 1분 내에 2번의 호출신호가 도착될 확률을 구하라.

- 2번의 호출신호: $\alpha = 2$
- 분당 평균 호출신호 횟수: $\lambda = 5,\ \beta = 1/5$
- 2번의 호출신호가 도착되기까지 소요된 시간: X

$$P(X \le 1) = \int_0^1 \frac{1}{\beta^2} x e^{-x/\beta}\, dx = 25 \int_0^1 x e^{-5x}\, dx = 1 - e^{-5}(1+5) = 0.96$$

$\therefore$ 96%

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.19

세탁기가 고장날 때까지의 시간 Y는 다음의 밀도함수를 따른다.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-y/4}, & y \geq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

이것은 $\mu = 4$년인 지수분포이다. 이 세탁기가 6년 이상 고장 나지 않을 확률은 얼마인가? 또한 1년 이내에 고장날 확률은 얼마인가?

- 지수분포의 누적분포함수: $F(y) = \frac{1}{\beta}\int_0^y e^{-t/\beta}\,dt = 1 - e^{-y/\beta}$
- $P(Y > 6) = 1 - F(6) = e^{-3/2} = 0.2231$
  $\therefore$ 6년 이상 고장나지 않을 확률은 22.31%, 6년 이내에 고장날 확률은 77.69%
- $P(Y < 1) = F(1) = 1 - e^{-1/4} = 0.2212$
  $\therefore$ 1년 이내에 고장날 확률은 22.12%

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.20

어떤 시스템에서는 패킷이 30초에 한 번 수신된다. 이때 4번째 패킷을 수신할 때까지 걸리는 시간(단위: 분)이 2분에서 4분 사이 소요될 확률은 얼마인가?

- 4번째 패킷을 수신: $\alpha = 4$ (감마분포)
- 평균 수신횟수: $\lambda = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{0.5} = 2$ (0.5분에 1번, 1분에 2번)
- 평균 수신 대기시간: $\beta = 0.5$

$$P(2 \le X \le 4) = \int_2^4 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}\, dx = \int_2^4 \frac{2^4}{\Gamma(4)} x^3 e^{-2x}\, dx = 0.39$$

$\therefore\ 39\%$

감마분포 및 지수분포

- 예제 6.21

보안이 강력한 시스템에서는 공격자로부터 네트워크 공격이 여러 번 시도되나, 현재까지 조사된 바에 의하면 24일에 평균 3번 정도 공격에 성공하는 것으로 확인된다. 이때 첫 번째로 성공하는 공격이 5일 안에 발생할 확률은? (단위: 일)

- 첫 번째로 성공하는 공격: $\alpha = 1$ (지수분포)
- 평균 성공횟수: $\lambda = \frac{1}{8}$ (24일에 3번, 8일에 1번, 1일에 1/8번)
- 평균 수신 대기시간: $\beta = 8$

$$P(0 \le X \le 5) = \int_0^5 \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}\, dx = \int_0^5 \frac{1}{8} e^{-x/8}\, dx = 0.4674$$

$\therefore\ 46.74\%$

목 차

- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포
- 카이제곱분포 및 베타분포
- 로그정규분포 및 와이블분포

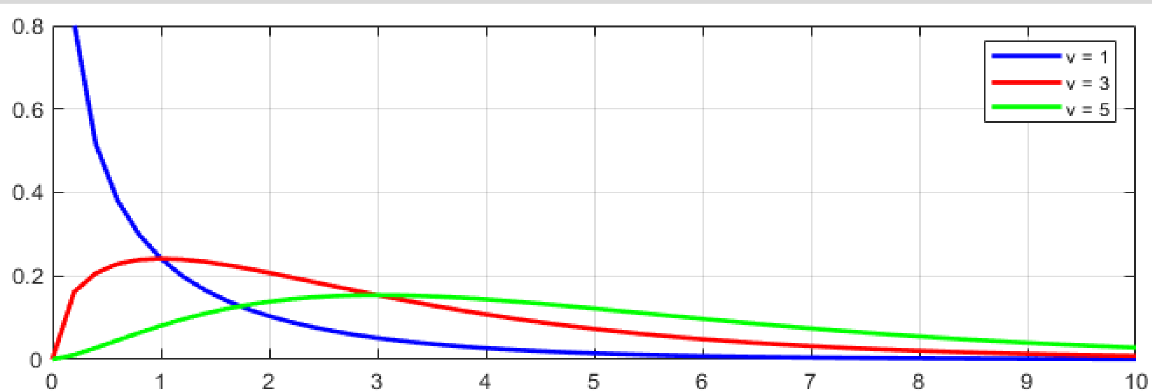
카이제곱분포 및 베타분포

- 카이제곱분포(Chi-squared Distribution)
  - 정의
    - 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z를 제곱한 것을 v개 더한 연속형 확률분포
      - 자유도(v)는 모집단에 대한 정보를 주는 독립적인 표본 개수

연속형 확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x;v)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}x^{\frac{v}{2}-1}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

과 같이 주어질 때, X는 자유도 v인 **카이제곱분포**를 따른다고 한다.



x축: 확률변수 X
y축: 자유도가 v인 카이제곱분포의 확률밀도

<그림 6.29> 카이제곱분포

카이제곱분포 및 베타분포

- 카이제곱분포(Chi-squared Distribution)
  - 특징
    - 정규분포에서 파생된 형태
    - 분산을 활용하므로 양수 값으로만 이루어짐
    - 자유도가 작을수록 왼쪽으로 치우친 분포 형태
    - 모집단 분포와 정규분포의 일치도를 검정하는 데 활용
      - e.g., 관측된 데이터가 예측된 기대값과 일치하는지 검정
  - 평균과 분산

정리 6.5

카이제곱분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = v, \qquad \sigma^2 = 2v$$

• 예제 6.22

*귀무가설: 차이, 영향력, 연관성 등이 없다고 설정하는 가설
*대립가설: 차이, 영향력, 연관성 등이 있다고 설정하는 가설

대학 교수 200명의 표본을 대상으로 조사한 결과, 총장의 정책에 대해 168명은 지지, 32명은 반대를 하였다. 이 때 모든 교수의 90% 이상은 총장의 정책에 찬성한다고 할 수 있는가?

1. 귀무가설 설정
   : 90%의 교수들은 총장의 정책을 지지함

	지지	반대	합계
가정(예측)	180	20	200
표본조사(실제)	168	32	200

2. 검정 통계량 계산

	관측값(O)	예측값(E)	$O - E$	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
지지	168	180	-12	144	0.8
반대	32	20	+12	144	7.2
합계	**200**	**200**	**-**	**-**	$\boxed{8}$

3. 카이제곱 값(X^2) 계산
   - 자유도(v) = 카테고리 수 $- 1 = 1$
   - 유의수준$(\alpha) = 0.05$
   - $\mathrm{X}^2 = 3.841$ (카이제곱분포표 참고)

∴ 검정 통계량 $>$ 카이제곱 값, 즉 90%의 교수들이 총장을 지지한다고 할 수 없음

카이제곱분포 및 베타분포

- 예제 6.23

*귀무가설: 차이, 영향력, 연관성 등이 없다고 설정하는 가설
*대립가설: 차이, 영향력, 연관성 등이 있다고 설정하는 가설

캔디 봉지를 랜덤 표본으로 10봉지 수집한다. 각 봉지에 5가지 맛과 100개의 캔디가 있다. 가설은 봉지마다 담긴 5가지 맛의 비율이 동일하다는 것이다. 이때 5가지 맛의 사탕을 하나로 합치면, 각 개수가 동일한가?

1. 귀무가설 설정
   : 전체 모집단 봉지에 담긴 5가지 맛의 비율이 동일함
2. 검정 통계량 계산
   : 52.75

캔디 맛	관측값(O)	예측값(E)	$O - E$	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
사과	180	200	-20	400	2
라임	250	200	50	2500	12.5
체리	120	200	-80	6400	32
오렌지	225	200	25	625	3.125
포도	225	200	25	625	3.125
합계	**1000**	**1000**	-	-	$\boxed{\textbf{52.75}}$

3. 카이제곱 값(X^2) 계산
   - 자유도(v) $=$ 카테고리 수 $- 1 = 4$
   - 유의수준(α) $= 0.05$
   - $\mathrm{X}^2 = 9.488$ (카이제곱분포표 참고)

∴ 검정 통계량 $>$ 카이제곱 값, 즉 캔디 맛별 비율이 동일하지 않음

카이제곱분포 및 베타분포

- 예제 6.24

*귀무가설: 차이, 영향력, 연관성 등이 없다고 설정하는 가설
*대립가설: 차이, 영향력, 연관성 등이 있다고 설정하는 가설

공격 탐지용 데이터세트를 생성하기 위해 10번의 패킷 수집 실험을 진행하였으며, 각 실험마다 3가지 공격 패턴에 대한 패킷을 1,000개씩 수집하였다. 이때 각 실험마다 수집된 3가지 공격에 대한 패킷 비율이 동일할 때, 전체 공격 실험에 대한 패킷을 합치면, 공격별로 수집된 패킷의 비율이 동일한가?

1. 귀무가설 설정
   : 전체 모집단 데이터세트에 포함된 3가지 공격 패킷의 비율이 동일함
2. 검정 통계량 계산
   : 140

공격	관측값(O)	예측값(E)	$O - E$	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
DoS	1300	1000	300	90000	90
Spoofing	900	1000	-100	10000	10
Hijacking	800	1000	-200	40000	40
합계	**3000**	**3000**	**-**	**-**	$\boxed{\textbf{140}}$

3. 카이제곱 값(X^2) 계산
   - 자유도(v) = 카테고리 수 $- 1 = 2$
   - 유의수준$(\alpha) = 0.05$
   - $\mathrm{X}^2 = 5.991$ (카이제곱분포표 참고)

∴ 검정 통계량 $>$ 카이제곱 값, 즉 공격별로 수집된 패킷의 비율이 동일하지 않음

- 베타분포(Beta Distribution)
  - 베타함수(Beta Function)

정의 6.3

베타함수는 다음과 같이 정의되며, 여기에서 $\alpha, \beta > 0$이고 $\Gamma(\alpha)$는 감마함수이다.

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

- 증명

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \int_0^\infty y^{\beta-1}e^{-y}\,dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}e^{-x-y}\,dxdy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t x^{\alpha-1}\,(t-x)^{\beta-1}e^{-t}\,dxdt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^1 ts^{\alpha-1}\,(t-ts)^{\beta-1}e^{-t}t\,dsdt$$

$$= \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\,dt \int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}\,ds$$

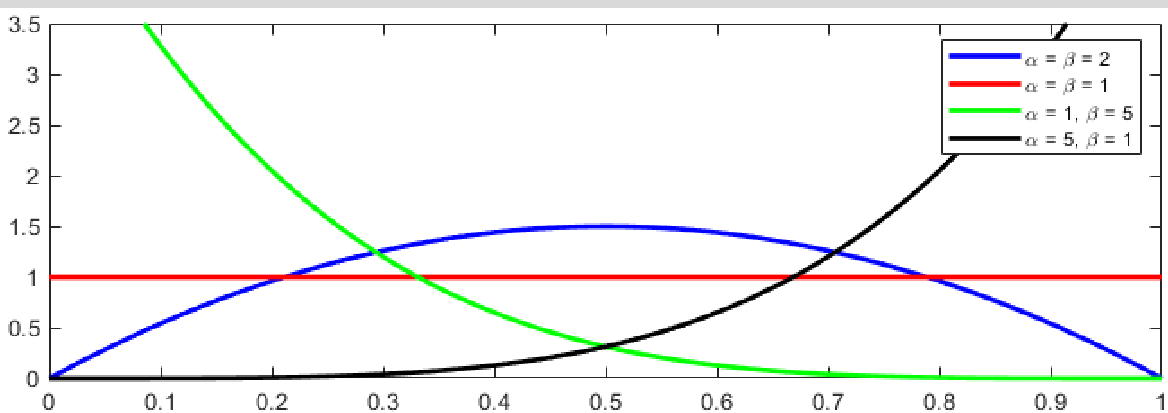
$$= \Gamma(\alpha+\beta), B(\alpha, \beta)$$

카이제곱분포 및 베타분포

- 베타분포(Beta Distribution)
  - 정의
    - 0과 1사이의 값을 가지는 확률변수의 성공확률을 나타내는 연속형 확률분포

연속형 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같을 때, 확률변수 X는 모수가 $\alpha > 0$이고 $\beta > 0$인 **베타분포**를 따른다고 한다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



α: 성공횟수
β: 실패횟수
x축: 성공확률
y축: 성공확률에 대한 베타분포의 확률밀도

<그림 6.30> 베타분포

카이제곱분포 및 베타분포

- 베타분포(Beta Distribution)
  - 특징
    - 이항분포에 대응하는 연속형 확률분포
      - e.g., 전체 시간 중에 x를 하는 시간, 전체 물질의 양 중에 x의 비율 등
    - $\alpha = \beta$인 경우, $x = 0.5$를 중심으로 좌우대칭
    - $\alpha = \beta = 1$인 경우, $[0, 1]$에서 균등분포
    - 베이즈 추정법에서 사전 분포로 사용됨
      - 사전 분포: 데이터 관측 전에 얻을 수 있는 사전 지식
  - 평균과 분산

정리 6.6

베타분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

카이제곱분포 및 베타분포

- 예제 6.25

한 온라인 쇼핑몰에는 고객이 판매 상품에 대한 좋음과 나쁨 두 가지 평가를 할 수 있다. 어떤 제품에 대해 현재까지 400개의 좋음과 100개의 나쁨 평가를 받았다. 그렇다면, 이 제품이 고객들로부터 좋음을 받을 확률이 0.85 이상일 확률은?

- 성공횟수(좋음 평가 횟수): $\alpha = 400$
- 실패횟수(나쁨 평가 횟수): $\beta = 100$
- 베타함수: $B(\alpha, \beta) = B(400{,}100) = \int_0^1 x^{400-1}(1-x)^{100-1}\,dx =$

$$\int_0^1 (x^{399} - x^{498})\,dx = \left[\frac{1}{400}x^{400} - \frac{1}{499}x^{499}\right]_0^1 = 0.0005$$

- $P(X \geq 0.85) = 1 - P(X < 0.85) = 1 - \int_0^{0.85} \frac{1}{0.0005} x^{400-1}(1-x)^{100-1}\,dx$

$$= 1 - \frac{1}{0.0005}\left[\frac{1}{400}x^{400} - \frac{1}{499}x^{499}\right]_0^{0.85} = 1 - 0.9985 = 0.0015$$

$\therefore 0.15\%$

카이제곱분포 및 베타분포

- 예제 6.26

어떤 상표의 텔레비전이 구입 첫 해에 서비스를 받는 비율이 $\alpha = 3$이고 $\beta = 2$인 베타분포를 따르는 확률변수일 때, 올해에 팔린 이 상표의 텔레비전이 구입 첫 해에 서비스를 받을 비율이 최소 80% 이상일 확률은?

- 성공횟수(서비스를 받음): $\alpha = 3$
- 실패횟수(서비스를 받지 않음): $\beta = 2$
- 베타함수: $B(\alpha, \beta) = B(3,2) = \int_0^1 x^{3-1}(1-x)^{2-1}\,dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

- $P(X \geq 0.8) = 1 - P(X < 0.8) = 1 - \int_0^{0.8} 12(x^2 - x^3)\,dx$

$$= 1 - 12\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{0.8} = 1 - 0.8192 = 0.1808$$

$\therefore 18.08\%$

카이제곱분포 및 베타분포

- 예제 6.27

개발한 공격 탐지 시스템에서는 네트워크 공격을 15번 시도했을 때, 9번을 탐지한다고 한다. 이러한 시스템에서 공격을 시도했을 때, 최소 80% 이상 공격을 탐지할 확률은?

- 성공횟수(공격 탐지 성공): $\alpha = 9$
- 실패횟수(공격 탐지 실패): $\beta = 6$
- 베타함수: $B(\alpha, \beta) = B(9,6) = \int_0^1 x^{9-1}(1-x)^{6-1}\,dx = \int_0^1 (x^8 - x^{14})\,dx$

$$= \left[\frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{15}x^{15}\right]_0^1 = \frac{2}{45}$$

- $P(X \geq 0.8) = 1 - P(X < 0.8) = 1 - \int_0^{0.8} \frac{45}{2}(x^8 - x^{14})\,dx$

$$= 1 - \frac{45}{2}\left[\frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{15}x^{15}\right]_0^{0.8} = 1 - 0.2827 = 0.7173$$

$\therefore 71.73\%$

목 차

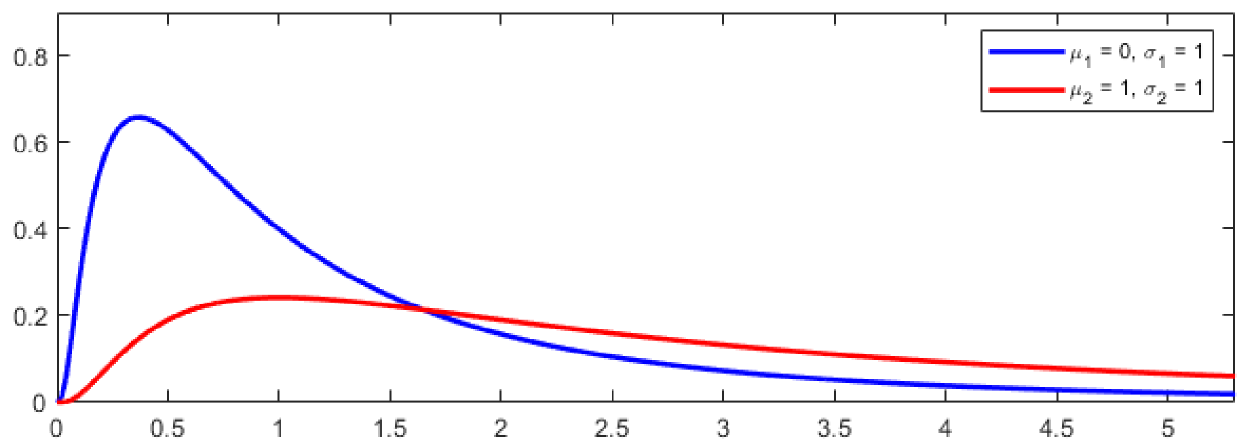
- 연속형 균일분포
- 정규분포 및 표준정규분포
- 이항분포의 정규근사
- 감마분포 및 지수분포
- 카이제곱분포 및 베타분포
- 로그정규분포 및 와이블분포

로그정규분포 및 와이블분포

- 로그정규분포(Lognormal Distribution)
  - 정의
    - 정규분포의 변수를 로그화하여 변형시킨 연속형 확률분포

연속형 확률변수 $Y = \ln(X)$가 평균 μ이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따를 때 확률변수 X의 분포를 **로그정규분포**라고 한다. X의 밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\ln(x)-\mu]^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



x축: 로그로 변환된 정규분포의 확률변수
y축: 로그 스케일에 대한 로그정규분포의 확률밀도

<그림 6.31> 로그정규분포

로그정규분포 및 와이블분포

- 로그정규분포(Lognormal Distribution)
  - 특징
    - 표준편차가 작을수록 로그정규분포의 변동성이 적음을 의미
    - 양수 값을 가지는 데이터 모델링에 유용함
      - 무게, 밀도, 높이, 에너지, 길이 등에 대한 값
    - 빠르게 변하는 흐름 예측에 활용
      - 주식 가격 변동성, 선거결과 득표율 등
  - 평균과 분산

정리 6.7

로그정규분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = e^{\mu+\sigma^2/2}, \qquad \sigma^2 = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

로그정규분포 및 와이블분포

- 예제 6.28

화학공장에서 배출되는 오염물질의 농도(ppm)가 $\mu = 3.2$이고 $\sigma = 1$인 로그정규분포를 따른다고 하자. 농도가 8ppm을 초과할 확률은 얼마인가?

- 오염물질의 농도: x, $P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$
- 이때 $In(X)$는 $\mu = 3.2$이고 $\sigma = 1$인 정규분포를 따르고, Φ는 표준정규분포의 누적분포함수임
- $P(X \leq 8) = \Phi\left[\frac{\ln(8) - 3.2}{1}\right] = \Phi(-1.12) = 0.1314$
- $P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0.1314 = 0.8686$

  $\therefore 86.86\%$

로그정규분포 및 와이블분포

- 예제 6.29

기관차에 사용되는 어떤 전자제어장치의 수명(단위: 1000마일)은 $\mu = 5.149$이고 $\sigma = 0.737$인 로그정규분포를 따른다고 한다. 수명의 5백분위수를 구하라.
*5백분위수: 5%에 위치하는 값

- 장치 수명: X
- $P(Z < -1.645) = 0.0500$
- 이때 $In(X)$는 $\mu = 5.149$이고 $\sigma = 0.737$인 정규분포를 따름
- 표준정규분포 확률변수 변환 공식: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}, x = z\sigma + \mu, \ln(X) = z\sigma + \mu$
- $In(X) = 5.149 + 0.737 \times (-1.645) = 3.937$

$\therefore x = 51.265$이므로, 장치의 5%만이 51,265마일 이하의 수명을 가짐

로그정규분포 및 와이블분포

- 예제 6.30

특정 주식의 가격 변동이 로그정규분포를 따른다고 가정한다. 이때 특정 주식의 현재 가격은 100달러이고, 로그수익률의 평균은 0.05, 표준편차는 0.2라고 할 때, 다음 달에 이 주식의 가격이 90달러에서 110달러 사이에 있을 확률을 구하라.

- 주식 가격: X
- 이때 $In(X)$는 $\mu = 0.05$이고 $\sigma = 0.2$인 정규분포를 따르고, Φ는 표준정규분포의 누적분포함수임
- $P(90 \le X \le 110) = P(X \le 110) - P(X \le 90) = 0.9909 - 0.9863 = 0.0046$
  - $P(X \le 90) = \Phi\left[\frac{\ln(90) - 0.05}{0.2}\right] = 0.9863$
  - $P(X \le 110) = \Phi\left[\frac{\ln(110) - 0.05}{0.2}\right] = 0.9909$

$\therefore 0.46\%$

로그정규분포 및 와이블분포

- 예제 6.31

어떤 시스템에서의 한시간 동안 네트워크 트래픽 사용량(단위: Mbps)이 $\mu = 4$이고 $\sigma = 2$인 로그정규분포를 따른다고 한다. 1초에 270Mbps 이상의 트래픽을 사용할 확률은?

- 이때 $In(X)$는 $\mu = 4$이고 $\sigma = 2$인 정규분포를 따르고, Φ는 표준정규분포의 누적분포함수임
- $P(X \geq 270) = 1 - P(X < 270) = 1 - 0.7879 = 0.2121$
  - $P(X \leq 270) = \Phi\left[\frac{\ln(270)-4}{2}\right] = 0.7879$

$\therefore 21.21\%$

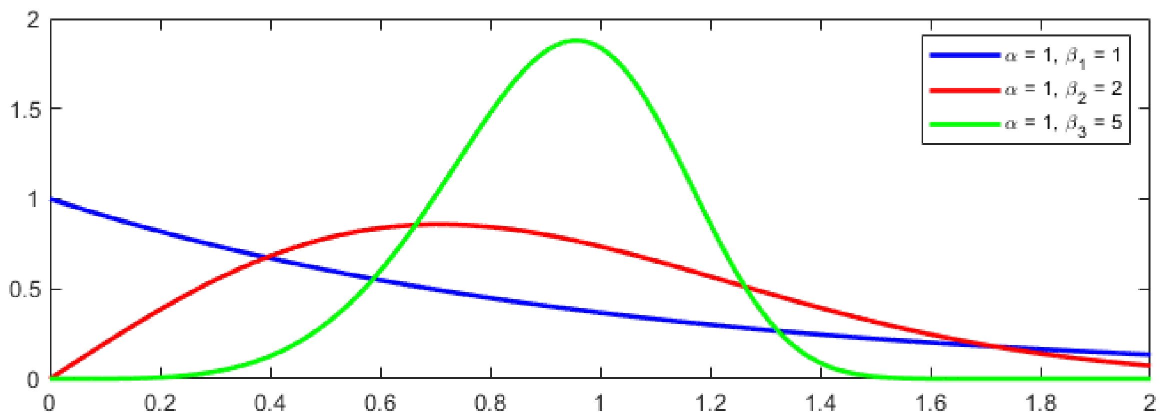
로그정규분포 및 와이블분포

- 와이블분포(Weibull Distribution)
  - 정의
    - 지수분포를 일반화한 연속형 확률분포

연속형 확률변수 X의 확률분포가

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}}, & x>0\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

과 같이 주어질 때, X는 모수 α,β를 가지는 **와이블분포**를 따른다고 한다.



x축: 대기시간, 수명 등의 확률변수
y축: 대기시간, 수명 등에 대한 와이블분포의 확률밀도

<그림 6.32> 와이블분포

로그정규분포 및 와이블분포

- 와이블분포(Weibull Distribution)
  - 특징
    - 제품이나 장치의 수명, 고장률 등 수명 분석에 활용
    - $\beta = 1$인 경우, 고장률이 일정함을 의미
      - 지수분포와 동일한 형태
    - $\beta > 1$인 경우, 고장률이 증가함을 의미
      - 정규분포의 형태와 비슷하나 비대칭임
    - $0 < \beta < 1$인 경우, 고장률이 감소함을 의미
  - 평균과 분산

정리 6.8

와이블분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right), \qquad \sigma^2 = \alpha^{-\frac{2}{\beta}}\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$$

로그정규분포 및 와이블분포

- 와이블분포(Weibull Distribution)
  - 누적분포함수
    - 와이블분포의 누적분포함수를 활용하여 고장률 분석 가능

와이블분포의 누적분포함수는 다음과 같이 주어진다.

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^{\beta}}, \qquad x \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

- 예제 6.32

어느 제품의 수명(단위: 시간)은 $\alpha = 0.01$이고 $\beta = 2$인 와이블분포를 따른다고 한다. 8시간 이전에 이 제품이 고장날 확률은 얼마인가?

- $P(X < 8) = F(8) = 1 - \mathrm{e}^{-(0.01)8^2} = 0.4727$

  $\therefore 47.27\%$

로그정규분포 및 와이블분포

- 와이블분포(Weibull Distribution)
  - 고장률(Failure Rate 또는 Hazard Rate) (1/2)
    - $R(t)$를 시점 t에서 주어진 부품의 신뢰도로 정의
      - $R(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(t)\, dt = 1 - F(t)$
    - $F(t)$는 T의 누적분포일 때, 부품이 시간 t까지 작동한 경우에 $T = t, T = t + \Delta t$ 사이에서 고장이 날 조건부확률
      - $\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{R(t)}$
    - 이를 Δt로 나눈 후, $\Delta t \to 0$으로 극한을 취하면, $Z(t)$로 표시되는 고장률
      - $Z(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} \frac{1}{R(t)} = \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}$

로그정규분포 및 와이블분포

- 와이블분포(Weibull Distribution)
  - 고장률(Failure Rate 또는 Hazard Rate) (2/2)

와이블분포의 시간 t에서의 고장률은 다음과 같다.

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \qquad t > 0$$

- 의미
  - 고장률 $Z(t)$는 부품이 시간 t까지 고장나지 않은 경우에, t부터 Δt만큼 더 생존할 조건부확률의 변화율을 의미함
    - $\beta = 1$이면, 고장률은 α로서 상수가 되며, 이는 지수분포의 건망성을 나타냄
    - $\beta > 1$이면, $Z(t)$는 증가함수이며, 부품이 시간에 따라 마모되는 현상을 표현함
    - $\beta < 1$이면, $Z(t)$는 감소함수이며, 시간이 지남에 따라 강해지는 것을 의미함

로그정규분포 및 와이블분포

- 예제 6.33

보청기용 건전지의 수명(단위: 년)은 $\alpha = 1/2, \beta = 2$인 와이블분포를 따르는 확률변수라고 가정하자.
(a) 건전지의 평균수명은 얼마인가?
(b) 건전지의 성능이 2년 후까지 지속될 확률은?

(a) 건전지의 평균수명은 얼마인가?

- 가정사항은 평균적으로 6개월에 한 번 건전지의 수명이 다하며, 2번째로 수명이 다하는 경우의 와이블분포를 따름을 의미함
- 평균$(\mu) = \alpha^{-1/\beta}\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\times\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1.253$

  $\therefore 1.253$년

(b) 건전지의 성능이 2년 후까지 지속될 확률은?

- $P(X>2) = 1 - P(X<2) = 1 - F(2) = 1 - 1 + e^{-\alpha x^{\beta}} = e^{-2} = 0.1353$
  $\therefore 13.53\%$

로그정규분포 및 와이블분포

- 예제 6.34

자동차 배기통의 수명은 고장률이 $Z(t) = 1/\sqrt{t}$인 와이블분포를 따른다. 배기통이 4년 후에도 계속 사용될 확률을 구하라.

- $Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} = 1/\sqrt{t}$
  - $\beta - 1 = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$
  - $\alpha\beta = 1, \alpha = 2$
- $P(X > 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - F(4) = 1 - 1 + e^{-\alpha x^{\beta}} = e^{-4} = 0.0183$

  $\therefore 1.83\%$

로그정규분포 및 와이블분포

- 예제 6.35

어떤 회사에서 개발한 소프트웨어 시스템의 특정 모듈이 버그로 인해 일정 시간마다 고장나며, 이로 인해 평균적으로 50일에 한 번씩 점검하고 있다. 이때 이 시스템 모듈의 고장률은 와이블분포를 따른다고 할 때, 이 모듈이 5일 내에 고장날 확률은?

- 평균적으로 50일에 한 번 모듈이 고장나며, 5일 내로 처음 고장날 확률을 구하는 문제임
  - 평균 수명(λ)은 50일이므로, $\alpha = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{50}$
  - 처음 고장날 확률이므로, $\beta = 1$
- 와이블분포의 누적분포함수 이용
- $P(X \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-\frac{1}{6}} = 1 - 0.8464 = 0.1536$

  $\therefore 15.36\%$

Thanks!

김 지 혜 (jihye@pel.sejong.ac.kr)

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.1

```
A = 1;
B = 3;
x = 0:0.01:4;
pdf_values = zeros(size(x));
pdf_values(x >= A & x <= B) = 1 / (B - A);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, pdf_values, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
xlim([0, 4]);
ylim([0, 1]);
xticks([A, B]);
yticks(0.5);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(1, 0, 'A', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(3, 0, 'B', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(0, 0.5, '$$\frac{1}{B-A}$$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'bottom',
'HorizontalAlignment', 'right');
text(0, 0.9, 'f(x)', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'right');
set(gca, 'FontSize', 14);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.2

```
A = 0;
B = 4;
x = -1:0.01:5;
pdf_values = zeros(size(x));
pdf_values(x >= A & x <= B) = 1 / (B - A);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, pdf_values, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
xlim([-1, 5]);
ylim([0, 0.5]);
xticks([A, B]);
yticks(1 / (B - A));
text(5, 0, 'x', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(-1, 0.45, 'f(x)', 'FontSize', 14, 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'right');
set(gca, 'FontSize', 14);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.3

```
mu = 2;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, min(ylim), '\mu', 'FontSize', 20, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(3.1, 0.33, '\sigma', 'FontSize', 22, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center’);
xlim([0, 4]);
ylim([0, 0.6]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 20, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
set(gca, 'FontSize', 20);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.4 (1/2)

```
mu1 = 10;
sigma1 = 5;
mu2 = 30;
sigma2 = 5;
x1 = mu1 - 4 * sigma1:0.01:mu1 + 4 * sigma1;
x2 = mu2 - 4 * sigma2:0.01:mu2 + 4 * sigma2;
y1 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma1)) * exp(-(x1 - mu1).^2 / (2 * sigma1^2));
y2 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma2)) * exp(-(x2 - mu2).^2 / (2 * sigma2^2));
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
line([mu1 mu1], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
line([mu2 mu2], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu1, min(ylim), ['\mu_1 = ' num2str(mu1)], 'FontSize', 12,'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment',
'center');
text(mu2, min(ylim), ['\mu_2 = ' num2str(mu2)], 'FontSize', 12,'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment',
'center');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.4 (2/2)

```
text(20, 0.05, '\sigma_1 = \sigma_2', 'FontSize', 13,'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
xlabel('\it{X}');
hold off;
grid on;
```

  - 그림 6.5 (1/2)

```
mu1 = 10;
sigma1 = 5;
mu2 = 10;
sigma2 = 10;
x1 = mu1 - 4 * sigma1:0.01:mu1 + 4 * sigma1;
x2 = mu2 - 4 * sigma2:0.01:mu2 + 4 * sigma2;
y1 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma1)) * exp(-(x1 - mu1).^2 / (2 * sigma1^2));
y2 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma2)) * exp(-(x2 - mu2).^2 / (2 * sigma2^2));
figure;
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
line([mu1 mu1], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.5 (2/2)

```
line([mu2 mu2], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu1, min(ylim), '\mu_1 = \mu_2', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(25, 0.05, ['\sigma_1 =' num2str(sigma1)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(35, 0.02, ['\sigma_2 =' num2str(sigma2)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
xlabel('\it{X}');
hold off;
grid on;
```

  - 그림 6.6 (1/2)

```
mu1 = 10;
sigma1 = 5;
mu2 = 30;
sigma2 = 10;
x1 = mu1 - 4 * sigma1:0.01:mu1 + 4 * sigma1;
x2 = mu2 - 4 * sigma2:0.01:mu2 + 4 * sigma2;
y1 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma1)) * exp(-(x1 - mu1).^2 / (2 * sigma1^2));
y2 = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma2)) * exp(-(x2 - mu2).^2 / (2 * sigma2^2));
figure;
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.6 (2/2)

```
hold on;
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
line([mu1 mu1], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
line([mu2 mu2], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--’);
text(mu1, min(ylim), ['\mu_1 = ' num2str(mu1)], 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(mu2, min(ylim), ['\mu_2 = ' num2str(mu2)], 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center’);
text(20, 0.05, ['\sigma_1 =' num2str(sigma1)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(50, 0.02, ['\sigma_2 =' num2str(sigma2)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center');
xlabel('\it{X}');
hold off;
grid on;
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.7

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 1.84:0.01:4;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.84, 0, '1.84', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'Z', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.8

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = -1.97:0.01:0.86;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-1.97, 0, '-1.97', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(0.86, 0, '0.86', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'Z', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.9

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 0.52:0.01:4;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.2, 0, '0.3015', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(0.52, 0, 'k', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.10

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = -2.58:0.01:-0.18;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(0.45, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-0.9, 0, '0.4197', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-0.45, 0, '-0.18', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-2.58, 0, 'k', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.11

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = -0.5:0.01:1.2;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(0.15, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-0.6, 0, '-0.5', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.2, 0, '1.2', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-4, 4]);
ylim([0, 0.45]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(4, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.12

```
mu = 300;
sigma = 50;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 362:0.01:450;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(362, 0.007, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(362, 0, '362', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([150, 450]);
ylim([0, 0.01]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(450, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.13

```
mu = 40;
sigma = 6;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 20:0.01:39.22;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(50, 0.05, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(37, 0, '0.45', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([20, 60]);
ylim([0, 0.08]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(60, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.14

```
mu = 40;
sigma = 6;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 43:0.01:60;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(50, 0.05, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(46, 0, '0.14', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([20, 60]);
ylim([0, 0.08]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(60, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.15

```
mu = 3;
sigma = 0.5;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 1:0.01:2.3;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(3.8, 0.7, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(2.3, 0, '2.3', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([1, 5]);
ylim([0, 0.9]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(5, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.16

```
mu = 800;
sigma = 40;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 778:0.01:834;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(802, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(842, 0.01, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(767, 0, '778', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(839, 0, '834', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([650, 950]);
ylim([0, 0.012]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(60, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.17 (1/2)

```
mu = 3.0;
sigma = 0.005;
x = mu - 4 * sigma:0.000001:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x1 = 2.98:0.000001:2.99;
overlap_y1 = interp1(x, y, overlap_x1);
overlap_x2 = 3.01:0.000001:3.02;
overlap_y2 = interp1(x, y, overlap_x2);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, '\mu =3.0', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(3.008, 70, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(2.99, 0, '2.99', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(3.01, 0, '3.01', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(2.985, 13, '0.0228', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(3.0155, 13, '0.0228', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x1, fliplr(overlap_x1)], [overlap_y1, zeros(size(overlap_y1))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.17 (2/2)

```
fill([overlap_x2, fliplr(overlap_x2)], [overlap_y2, zeros(size(overlap_y2))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([2.98, 3.02]);
ylim([0, 90]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(3.02, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

  - 그림 6.18 (1/2)

```
mu = 1.500;
sigma = 0.2;
x = mu - 4 * sigma:0.001:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x1 = 0.9:0.001:1.108;
overlap_y1 = interp1(x, y, overlap_x1);
overlap_x2 = 1.892:0.001:2.1;
overlap_y2 = interp1(x, y, overlap_x2);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.18 (2/2)

```
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, '\mu =1.500', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.75, 1.8, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.97, 0.5, '0.025', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.03, 0.5, '0.025', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.108, 0, '1.108', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.892, 0, '1.892', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x1, fliplr(overlap_x1)], [overlap_y1, zeros(size(overlap_y1))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
fill([overlap_x2, fliplr(overlap_x2)], [overlap_y2, zeros(size(overlap_y2))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([0.9, 2.1]);
ylim([0, 2.2]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(2.1, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.19

```
mu = 40;
sigma = 2;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 43:0.01:46;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(42.5, 0.18, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(43, 0, '43', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([34, 46]);
ylim([0, 0.22]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(46, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.20

```
mu = 40;
sigma = 2;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 43.5:0.01:46;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(42.5, 0.18, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(43.5, 0, '43.5', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([34, 46]);
ylim([0, 0.22]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(46, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.21

```
mu = 74;
sigma = 7;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 82.26:0.01:100;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(83, 0.05, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(85.5, 0, '0.12', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([49, 100]);
ylim([0, 0.06]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(99, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.22

```
mu = 74;
sigma = 7;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 49:0.01:75.75;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], ylim, 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(71, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(83, 0.05, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(70, 0.02, '0.6', 'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(77, 0, 'D_6', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([49, 100]);
ylim([0, 0.06]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(99, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.23

```
n1 = 5;
p1 = 0.5;
x1 = 0:n1;
y1 = binopdf(x1,n1,p1);
n2 = 15;
p2 = 0.5;
x2 = 0:n2;
y2 = binopdf(x2,n2,p2);
n3 = 25;
p3 = 0.5;
x3 = 0:n3;
y3 = binopdf(x3,n3,p3);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 500, 300]);
bar(x1, y1, 0.3, 'blue')
hold on;
bar(x2, y2, 0.3, 'red')
bar(x3, y3, 0.3, 'green')
xlim([-1, 21]);
ylim([0, 0.5]);
xticks(0:5:20);
legend('n=5, p=0.5','n=15, p=0.5','n=25, p=0.5','location','northeast')
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.24

```
n1 = 100;
p1 = 0.2;
x1 = 0:n1;
y1 = binopdf(x1,n1,p1);
n2 = 200;
p2 = 0.2;
x2 = 0:n2;
y2 = binopdf(x2,n2,p2);
n3 = 400;
p3 = 0.2;
x3 = 0:n3;
y3 = binopdf(x3,n3,p3);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 500, 300]);
bar(x1, y1, 0.3, 'blue')
hold on;
bar(x2, y2, 0.3, 'red')
bar(x3, y3, 0.3, 'green')
xlim([-1, 100]);
ylim([0, 0.11]);
xticks(0:10:100);
legend('n=100, p=0.2','n=200, p=0.2','n=400, p=0.2','location','northeast')
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.25

```
n = 15;
p = 0.4;
x1 = 0:n;
y1 = binopdf(x1,n,p);
mu = n*p;
sigma = sqrt(n*p*(1-p));
x2 = 0:0.1:n;
y2 = normpdf(x2,mu,sigma);
overlap_x1 = 7:0.01:9;
overlap_y1 = interp1(x2, y2, overlap_x1);
overlap_x2 = 6.5:0.01:9.5;
overlap_y2 = interp1(x2, y2, overlap_x2);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 500, 200]);
bar(x1, y1, 1, 'white')
hold on;
plot(x2, y2, 'LineWidth', 2)
fill([overlap_x1, fliplr(overlap_x1)], [overlap_y1, zeros(size(overlap_y1))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
fill([overlap_x2, fliplr(overlap_x2)], [overlap_y2, zeros(size(overlap_y2))], 'Red', 'FaceAlpha', 0.1);
legend('Binomial Distribution','Normal Distribution','P(7<=x<=9)','P(6.5<=x<=9.5)','location','northeast')
xlim([0, 15]);
ylim([0, 0.3]);
xticks(0:1:15);
text(15.5, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.26

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = -2.8:0.01:-2.14;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--');
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1, 0.38, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(-2.14, 0, '-2.14', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-2.8, 2.8]);
ylim([0, 0.5]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(2.7, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.27

```
mu = 0;
sigma = 1;
x = mu - 4 * sigma:0.01:mu + 4 * sigma;
y = (1 / (sqrt(2 * pi) * sigma)) * exp(-(x - mu).^2 / (2 * sigma^2));
overlap_x = 1.16:0.01:2.71;
overlap_y = interp1(x, y, overlap_x);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 450, 300]);
plot(x, y, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
line([mu mu], [0, max(y)], 'Color', 'Black', 'LineStyle', '--’);
text(mu, 0, ['\mu =' num2str(mu)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1, 0.38, ['\sigma =' num2str(sigma)], 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(1.16, 0, '1.16', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
text(2.71, 0, '2.71', 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 12);
fill([overlap_x, fliplr(overlap_x)], [overlap_y, zeros(size(overlap_y))], 'Blue', 'FaceAlpha', 0.2);
xlim([-3, 3]);
ylim([0, 0.5]);
xticklabels([]);
yticklabels([]);
text(3.2, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.28

```
x = 0:0.1:6;
y1 = gampdf(x,1,1);
y2 = gampdf(x,2,1);
y3 = gampdf(x,4,1);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 800, 250]);
plot(x, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
plot(x, y2, 'Color', '#808080', 'LineWidth', 2);
plot(x, y3, 'Color', '#808080', 'LineWidth', 2);
xlim([0, 6]);
ylim([0, 1.1]);
text(6.3, 0, 'x', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(0, 1.15, 'f(x)', 'FontSize', 12, 'VerticalAlignment', 'top', 'HorizontalAlignment', 'right');
legend('\alpha = 1, \beta = 1','\alpha = 2, \beta = 1','\alpha = 4, \beta = 1')
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.29

```
x1 = 0:0.2:10;
y1 = chi2pdf(x1,1);
x2 = 0:0.2:10;
y2 = chi2pdf(x2,3);
x3 = 0:0.2:10;
y3 = chi2pdf(x3,5);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 800, 250]);
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
grid on;
hold on;
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
plot(x3, y3, 'Color', 'Green', 'LineWidth', 2);
legend(["v = 1","v = 3","v = 5"]);
hold off
xlim([0, 10]);
ylim([0, 0.8]);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.30

```
x = 0:0.01:1;
y1 = betapdf(x,2,2);
y2 = betapdf(x,1,1);
y3 = betapdf(x,1,5);
y4 = betapdf(x,5,1);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 800, 250]);
plot(x, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(x, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
plot(x, y3, 'Color', 'Green', 'LineWidth', 2);
plot(x, y4, 'Color', '#000000', 'LineWidth', 2);
legend(["\alpha = \beta = 2","\alpha = \beta = 1","\alpha = 1, \beta = 5", "\alpha = 5, \beta = 1"]);
hold off
xlim([0, 1]);
ylim([0, 3.5]);
```

- MATLAB 코드
  - 그림 6.31

```
x1 = 0:0.02:10;
mu1 = 0;
sigma1 = 1;
y1 = lognpdf(x1,mu1,sigma1);
x2 = 0:0.02:10;
mu2 = 1;
sigma2 = 1;
y2 = lognpdf(x2,mu2,sigma2);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 800, 250]);
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
legend(["\mu_1 = 0, \sigma_1 = 1", "\mu_2 = 1, \sigma_2 = 1"]);
hold off
xlim([0, 5.3]);
ylim([0, 0.9]);
```

부록 #1

- MATLAB 코드
  - 그림 6.32

```
alpha = 1;
beta1 = 1;
beta2 = 2;
beta3 = 5;
x1 = 0:0.001:3;
y1 = wblpdf(x1, alpha, beta1);
x2 = 0:0.001:3;
y2 = wblpdf(x2, alpha, beta2);
x3 = 0:0.001:3;
y3 = wblpdf(x2, alpha, beta3);
fig = figure;
set(fig, 'Position', [100, 100, 800, 250]);
plot(x1, y1, 'Color', 'Blue', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(x2, y2, 'Color', 'Red', 'LineWidth', 2);
plot(x3, y3, 'Color', 'Green', 'LineWidth', 2);
legend(["\alpha = 1, \beta_1 = 1","\alpha = 1, \beta_2 = 2", "\alpha = 1, \beta_3 = 5"]);
hold off
xlim([0, 2]);
ylim([0, 2]);
```