확률 및 통계학

-7장 확률변수의 함수-

이 하 늘(haneul@pel.sejong.ac.kr)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

목차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

확률변수의 변수변환

- 변수변환(Transformation)
  - 확률변수 X의 확률분포를 이용하여 확률변수 Y의 확률분포를 얻기 위해 사용

- 이산형 확률변수의 변수변환
  - X와 Y가 1 대 1 대응하는 경우

정리 7.1

X는 확률분포가 $f(x)$인 **이산형** 확률변수이고, X와 Y사이에는 $Y = u(x)$라는 1대 1 대응관계가 성립하여 관계식 $y = u(x)$ 를 x에 대하여 풀면 유일하게 $x = w(y)$로 될 때, Y 의 확률분포는

$$g(y) = f[w(y)]$$

가 된다.

확률변수의 변수변환

• 예제 7.1

X의 확률분포가 $f(x) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{x-1}, x = 1, 2, 3, \cdots$ 인 기하분포를 따를 때, $Y = X^2$의 확률분포를 구하라

- 성공 확률: $\frac{3}{4}$, 실패 확률: $\frac{1}{4}$
- X가 가질 수 있는 값은 모두 양수이므로 x값과 y값 사이에는 1 대 1 대응 관계가 성립
- 따라서, $y = x^2$을 x에 대해 풀면 $x = \sqrt{y}$ 가 됨에 따라 다음의 확률분포를 구할 수 있다.

$$g(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y}) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{\sqrt{y}-1}, & y = 1, 4, 9, \cdots \\ 0, & Otherwise \end{cases}$$

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환
  - (x_1, x_2)와 (y_1, y_2)가 1 대 1 대응하는 경우

정리 7.2

X_1과 X_2는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$인 **이산형** 확률변수이고,(x_1, x_2)와 (y_1, y_2)는 서로 1대 1로 대응하여 식 $y_1 = u_1(x_1, x_2)$와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ 를 x_1과 x_2에 대하여 풀면 유일하게 $x_1 = w_1(y_1, y_2)$와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$로 될 때, $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$와 $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$라고 정의되는 새로운 확률변수 Y_1과 Y_2의 결합확률분포는

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]$$

가 된다.

• 예제 7.2 (1/2)

X_1과 X_2는 각각 μ_1, μ_2의 모수를 가지는 포아송 분포를 따르는 확률변수로서 서로 독립일 때, 새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$의 확률분포를 구하라.

- X_1과 X_2가 서로 독립이므로,

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2) = \frac{e^{-\mu_1}{\mu_1}^{x_1}}{x_1!}\frac{e^{-\mu_2}{\mu_2}^{x_2}}{x_2!} = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1}^{x_1}{\mu_2}^{x_2}}{x_1!\,x_2!}$$

단, $x_1 = 0,1,2,\dots, x_2 = 0,1,2,\dots$

- 두 번째의 확률변수를 $Y_2 = X_2$라 하자. Y_1과 Y_2를 역변환하면 $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_2$가 되므로 정리 7.2를 이용하여 Y_1과 Y_2의 결합확률분포를 구하면 다음의 식이 된다.

$$g(y_1, y_2) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}{\mu_1}^{y_1-y_2}{\mu_2}^{y_2}}{(y_1 - y_2)!\,y_2!}$$

단, $\mathrm{y}_1 = 0,1,2,\dots, \mathrm{y}_2 = 0,1,2,\dots, \mathrm{y}_1$

확률변수의 변수변환

• 예제 7.2 (2/2)

X_1과 X_2는 각각 μ_1, μ_2의 모수를 가지는 포아송 분포를 따르는 확률변수로서 서로 독립일 때, 새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$의 확률분포를 구하라.

- $x_1 > 0$이므로 $x_1 - y_1 - x_2$로부터 x_2, 즉 y_2는 y_1보다 작거나 같게 된다. 따라서, Y_1에 대한 주변확률분포를 구하면

$$h(y_1) = \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{{\mu_1}^{y_1-y_2}{\mu_2}^{y_2}}{(y_1-y_2)!\, y_2!}$$

$$= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1}{(y_1-y_2)!\, y_2!} {\mu_1}^{y_1-y_2}{\mu_2}^{y_2}$$

$$= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} {\mu_1}^{y_1-y_2}{\mu_2}^{y_2}$$

- 합의 값은 $(\mu_1+\mu_2)^{y_1}$의 이항전개와 같으므로, 결과식은 다음과 같다.

$$h(y_1) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}(\mu_1+\mu_2)^{y_1}}{y_1!}, \qquad y_1 = 0,1,2, \ldots$$

- 즉, 모수가 μ_1과 μ_2인 포아송 분포를 따르는 서로 독립인 두 확률변수의 합은 $(\mu_1+\mu_2)$의 모수를 가지는 포아송 분포를 따른다.

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환
  - X와 Y가 1 대 1 대응하는 경우

정리 7.3

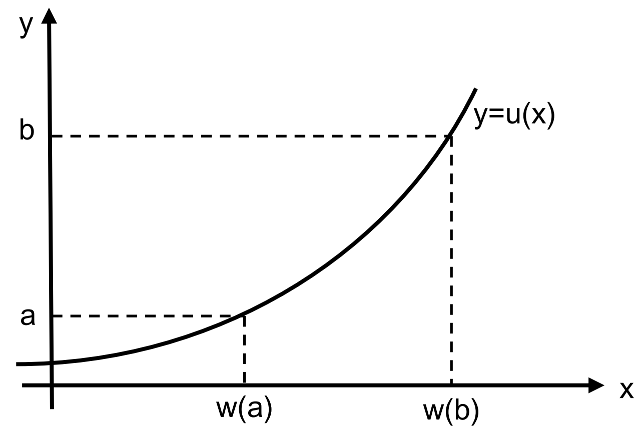
X는 확률분포가 $f(x)$인 **연속형** 확률변수이고, X와 Y사이에는 $Y = u(x)$라는 1대 1 대응관계가 성립하여 관계식 $y = u(x)$를 x에 대하여 풀면 유일하게 $x = w(y)$로 될 때, Y의 확률분포는

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

가 된다. 여기서 $J = \frac{dx}{dy} = w'(y)$이며, 이를 **야코비안(Jacobian)**이라고 부른다.

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환



증명

$y = u(x)$가 증가함수라면, Y가 a와 b 사이에 올 때, 확률변수 X는 $w(a)$와 $w(b)$ 사이에 와야 하므로, Y가 a와 b 사이에 속할 확률

$$P(a < Y < b) = P[w(a) < X < w(b)] = \int_{w(\mathrm{a})}^{w(b)} f(x)\, dx$$

적분변수 x를 y로 변환시키려면 $x = w(y)$의 관계로부터 $dx = w'(y)\, dy$를 얻게 되고, 이를 적분식에 대입하면

$$P(a < Y < b) = \int_{a}^{b} f[w(y)]w'(y)\, dy$$

적분값은 y의 범위 안에서 $a < b$ 인 각각의 경우의 구하고자 하는 확률 값이 되므로, 따라서 Y의 확률분포 $g(y)$는

$$g(y) = f[w(y)]w'(y) = f[w(y)]J$$

확률변수의 변수변환

- 예제 7.3

X가 연속형 확률변수이고 확률분포 $f(x)$가 다음과 같을 때, 확률변수 $Y = 2X - 3$의 확률분포를 구하라

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{12}, & 1 < X < 5 \\ 0, & Otherwise \end{cases}$$

- $y = 2x - 3$을 x에 대해 풀면 $x = \frac{(y+3)}{2}$가 되고, $J = w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$이 된다.
- 따라서, 정리 7.3을 이용하면 다음의 확률분포가 된다.

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{(y+3)/2}{12}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{y+3}{48}, & -1 < y < 7 \\ 0, & Otherwise \end{cases}$$

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환
  - (x_1, x_2)와 (y_1, y_2)가 1 대 1 대응하는 경우

정리 7.4

X_1과 X_2는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$인 **연속형** 확률변수이고,(x_1, x_2)와 (y_1, y_2)는 서로 1대 1로 대응하여 식 $y_1 = u_1(x_1, x_2)$와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ 를 x_1과 x_2에 대하여 풀면 유일하게 $x_1 = w_1(y_1, y_2)$와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$로 될 때, Y_1과 Y_2의 결합확률분포는

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]|J|$$

가 된다. 여기서 J는 2×2 행렬식으로서

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

이다.

- 예제 7.4 (1/2)

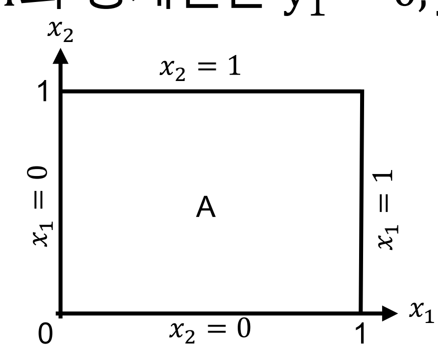
X_1과 X_2는 연속형 확률변수이고 결합확률분포가 다음과 같을 때, $Y_1 = {X_1}^2$과 $Y_2 = X_1X_2$의 결합확률분포를 구하라

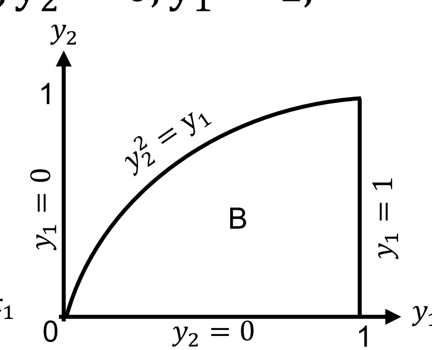
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0, & Otherwise \end{cases}$$

- $y_1 = {x_1}^2$과 $y_2 = x_1x_2$를 각각 x_1, x_2에 대해 풀면 $x_1 = \sqrt{y_1}$과 $x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1}}$되고,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ -\frac{y_2}{2{y_1}^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{y_1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1}$$

- x_1x_2평면에서 정의된 점의 집합 A와 대응된 y_1y_2평면에서 정의된 점의 집합 B를 구하기 위해, $x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1$로 놓으면, 집합 A의 경계선은 $y_1 = 0, y_2 = 0, y_1 = 1$, $y_2 = \sqrt{y_1}$ 또는 $y_2^2 = y_1$ 이므로, 1 대 1 대응이 된다.
  - $A = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$
  - $B = \{(y_1, y_2) | y_2^2 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1\}$





확률변수의 변수변환

• 예제 7.4 (2/2)

X_1과 X_2는 연속형 확률변수이고 결합확률분포가 다음과 같을 때, $Y_1 = {X_1}^2$과 $Y_2 = X_1X_2$의 결합확률분포를 구하라

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0, & Otherwise \end{cases}$$

- 따라서, 정리 7.4에 의해 Y_1 과 Y_2 의 결합확률분포는 다음과 같다.

$$g(y_1, y_2) = 4(\sqrt{y_1})\frac{\mathrm{y}_2}{\sqrt{y_1}}\frac{1}{2\mathrm{y}_1} = \begin{cases} \dfrac{2\mathrm{y}_2}{\mathrm{y}_1}, & y_2^2 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환
  - X와 Y가 1 대 1 대응관계가 아닌 경우

정리 7.5

X는 확률분포가 $f(x)$를 가지는 **연속형** 확률변수이고, $Y = u(x)$로 변수변환을 하려고 할 때 X와 Y가 1대 1 대응관계를 만족하지 못한다고 하자. 이 경우 만일 $Y = u(x)$와 k개의 역함수 $x_1 = w_1(y), x_2 = w_2(y), \cdots, x_k = w_k(y)$가 각각 1대 1 대응관계를 가지도록 X의 영역을 k개의 서로 배반인 영역으로 분할시킬 수 있다면, Y의 확률분포는

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f[w_i(y)]\,|J_i|$$

가 된다. 단, $J_i = w'_i(y), i = 1, 2, \cdots, k$이다.

• 예제 7.5 (1/2)

X가 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따를 때, $Y = (X-\mu)^2/\sigma^2$은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름을 증명하라.

- $Z = (X-\mu)/\sigma$라 놓으면, Z는 표준정규분포를 따르게 되므로 아래의 식이 된다.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \qquad -\infty < z < \infty$$

- $Y = (X-\mu)^2/\sigma^2$이 되므로 $y = z^2$을 z에 대해 풀면 $z = \pm\sqrt{y}$가 된다.
- 만일 z_1과 z_2를 각각 $z_1 = -\sqrt{y}, z_2 = \sqrt{y}$라 하면, $J_1 = -1/2\sqrt{y}$ 가 되고, $J_2 = 1/2\sqrt{y}$ 가 됨에 따라 정리 7.5를 이용하면 다음과 같은 식이 된다.

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}}, \qquad y > 0$$

확률변수의 변수변환

• 예제 7.5 (2/2)

X가 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따를 때, $Y = (X-\mu)^2/\sigma^2$은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름을 증명하라.

- $g(y)$는 확률밀도함수이므로 아래의 식이 된다.

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2}-1}e^{\frac{-y}{2}}dy = \frac{\tau(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}e^{\frac{-y}{2}}}{\sqrt{2}\tau(\frac{1}{2})}dy = \frac{\tau(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

- 적분값은 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$인 감마분포의 면적이 된다. 또한 $\sqrt{\pi} = \tau(\frac{1}{2})$ 이므로 확률분포는 자유도 1인 카이제곱분포를 따른다.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{y^{\frac{1}{2}-1}e^{\frac{-y}{2}}}{\sqrt{2}\tau(\frac{1}{2})}, & y > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

목차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수(Moment Generating Function)
  - 적률(Moment)을 구하기 위한 함수

정의 7.1

확률변수 X의 원점에 대한 r차 적률 μ'_r은

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x), & X\text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\, dx, & X\text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

이다.

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수(Moment Generating Function)

정의 7.2

확률변수 X의 적률생성함수 $E(e^{tx})$를 $M_x(t)$로 표기하면,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x), & X\text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx, & X\text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

이다.

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수(Moment Generating Function)

정리 7.6

확률변수 X의 적률생성함수를 $M_x(t)$라 하면,

$$\left.\frac{d^r M_x(t)}{dt^r}\right|_{t\,=\,0} = \mu'_r$$

이 된다.

증명

$M_x(t)$를 이산형인 경우와 연속형인 경우 각각 t에 대해 r번 미분하면

$$\frac{d^r M_x(t)}{dt^r} = \begin{cases} \sum_x x^r e^{tx} f(x), & X\text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x)\,dx, & X\text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

가 된다. 여기서 $t = 0$을 대입하면 두 경우 모두 $E(X^r) = \mu'_r$이 된다.

확률변수의 변수변환

• 예제 7.6 (1/2)

확률변수 X가 이항분포를 따를 때, X의 적률생성함수를 구하고, 이를 이용하여 $\mu = np, \sigma^2 = npq$가 됨을 증명하라.

- 정의 7.2로부터 다음의 식이 된다.

$$Mx(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x}$$

- 이항전개식 $(pe^t + q)^n$ 을 이용하면

$$Mx(t) = (pe^t + q)^n$$

- 따라서

$$\frac{dM_x(t)}{dt} = n(pe^t + q)^{n-1} pe^t$$

- 그리고

$$\frac{d^2M_x(t)}{dt^2} = \mathrm{np}[e^t(\mathrm{n} - 1)(pe^t + q)^{n-2} pe^t + (pe^t + q)^{n-1} e^t]$$

확률변수의 변수변환

- 예제 7.6 (2/2)

확률변수 X가 이항분포를 따를 때, X의 적률생성함수를 구하고, 이를 이용하여 $\mu = np, \sigma^2 = npq$가 됨을 증명하라.

- 미분된 두 식에 $t = 0$을 대입하면

$$\mu_1' = np, \mu_2' = np[(n-1)p + 1]$$

이 되므로,

$$\mu = \mu_1' = np$$
$$\sigma^2 = \mu_2' - \mu^2 = np(1-p) = npq$$

- 따라서, $\mu = np, \sigma^2 = npq$가 된다.

확률변수의 변수변환

- 예제 7.7 (1/2)

확률변수 X가 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따를 때, X의 적률생성함수는 $Mx(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$이 됨을 유도하라.

- 정의 7.2로부터

$$Mx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left[-\frac{x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

- 이제 $x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2 = [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$ 으로 놓으면,

$$Mx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left[-\frac{[x-(\mu+t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right] dx$$
$$= exp\left(\frac{2\mu t + \sigma^2 t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{[x-(\mu+t\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

확률변수의 변수변환

- 예제 7.7 (2/2)

확률변수 X가 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따를 때, X의 적률생성함수는 $Mx(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$이 됨을 유도하라.

- 여기서 $w = [x - (\mu + t\sigma^2)]/\sigma$로 치환하면, $dx = \sigma dw$이므로

$$Mx(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}\, dw$$

- 이 식의 적분부분은 표준정규분포의 면적으로서 1이 되므로, 다음과 같은 식이 된다.

$$Mx(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수(Moment Generating Function)

정리 7.7

(유일성 정리): 두 확률변수 X와 Y의 적률생성함수가 각각 $M_x(t), M_y(t)$일 때, 모든 t 값에 대해 $M_x(t) = M_y(t)$이면 X와 Y는 같은 확률분포를 가진다.

정리 7.8

$$M_{x+a}(t) = e^{at}M_X(t)$$

증명

$$M_{x+a}(t) = E\left[e^{t(X+a)}\right] = e^{at}E(e^{tX}) = e^{at}M_x(t)$$

정리 7.9

$$M_{aX}(t) = M_X(at)$$

증명

$$M_{aX}(t) = E\left[e^{t(aX)}\right] = E[e^{(at)X}] = M_x(at)$$

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수(Moment Generating Function)

정리 7.10

확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 서로 독립이면서 각각의 적률생성함수가 $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \cdots, M_{X_n}(t)$ 이고 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 이면, Y 의 적률생성함수는 $M_Y(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$가 된다.

증명

연속형인 경우에 대해서

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E\left[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

확률변수들은 서로 독립적이므로

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

이다. 따라서,

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_1} f_1(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_2} f_2(x_2)\, dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_n} f_n(x_n)\, dx_n$$
$$= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

Thanks!

이 하 늘(haneul@pel.sejong.ac.kr)