

확률 및 통계학

-7장 확률변수의 함수-

이 하 늘(haneul@pel.sejong.ac.kr)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

목차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

확률변수의 변수변환

- 변수변환(Transformation)

- 확률변수 X 의 확률분포를 이용하여 확률변수 Y 의 확률분포를 얻기 위해 사용하는 개념

- 필요성

- 복잡한 분포를 단순한 형태로 변환하는 데 사용

- e.g., X 를 평균과 표준편차로 표준화 시키는 경우($Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$)

- 실험 데이터를 변환하여 이론적인 모델과 비교하는 데 사용

- e.g., 패킷 전송 시간 데이터를 변환하여 정규분포에 가깝게 만들어 이론 모델과 비교

- 시스템의 정확도를 높이는 데에 사용

- e.g., 보안 이벤트 데이터를 변환하여 이상 행위 패턴을 정확하게 분석함

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환
 - X 와 Y 가 1 대 1 대응하는 경우

정리 7.1

X 는 확률분포가 $f(x)$ 인 이산형 확률변수이고, X 와 Y 사이에는 $Y = u(x)$ 라는 1대 1 대응관계가 성립하여 관계식 $y = u(x)$ 를 x 에 대하여 풀면 유일하게 $x = w(y)$ 로 될 때, Y 의 확률분포는

$$g(y) = f[w(y)]$$

가 된다.

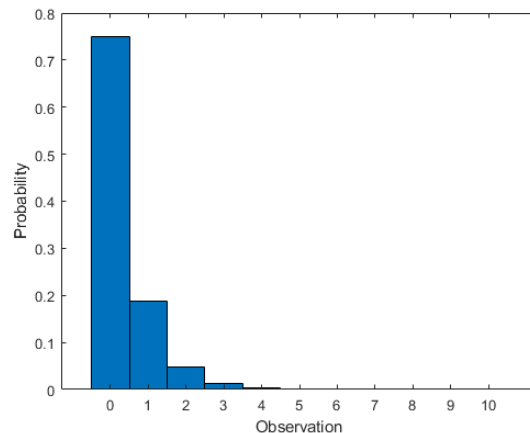
확률변수의 변수변환

• 예제 7.1

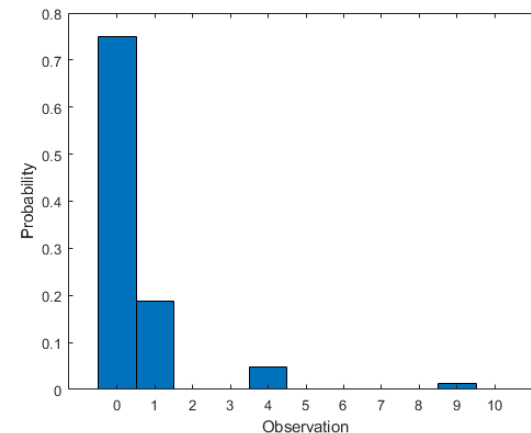
X 의 확률분포가 $f(x) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}, x = 1, 2, 3, \dots$ 인 기하분포를 따를 때, $Y = X^2$ 의 확률분포를 구하라

- 성공 확률: $\frac{3}{4}$, 실패 확률: $\frac{1}{4}$
- X 가 가질 수 있는 값은 모두 양수이므로 x 값과 y 값 사이에는 1 대 1 대응 관계가 성립
- 따라서, $y = x^2$ 을 x 에 대해 풀면 $x = \sqrt{y}$ 가 됨에 따라 다음의 확률분포를 구할 수 있다.

$$g(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y}) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{y}-1}, & y = 1, 4, 9, \dots \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$



<그림 1-1> 변환 전 기하분포



<그림 1-2> 변환 후 기하분포

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환
 - (x_1, x_2) 와 (y_1, y_2) 가 1 대 1 대응하는 경우

정리 7.2

X_1 과 X_2 는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$ 인 이산형 확률변수이고, (x_1, x_2) 와 (y_1, y_2) 는 서로 1대 1로 대응하여 식 $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ 와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ 를 x_1 과 x_2 에 대하여 풀면 유일하게 $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ 와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$ 로 될 때, $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ 와 $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ 라고 정의되는 새로운 확률변수 Y_1 과 Y_2 의 결합확률분포는

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]$$

가 된다.

확률변수의 변수변환

• 예제 7.2 (1/2)

X_1 과 X_2 는 각각 μ_1, μ_2 의 모수를 가지는 포아송 분포를 따르는 확률변수로서 서로 독립일 때, 새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$ 의 확률분포를 구하라.

- X_1 과 X_2 가 서로 독립이므로,

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2) = \frac{e^{-\mu_1}\mu_1^{x_1}}{x_1!} \frac{e^{-\mu_2}\mu_2^{x_2}}{x_2!} = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}\mu_1^{x_1}\mu_2^{x_2}}{x_1!x_2!}$$

단, $x_1 = 0, 1, 2, \dots, x_2 = 0, 1, 2, \dots$

- 두 번째의 확률변수를 $Y_2 = X_2$ 라 하자. Y_1 과 Y_2 를 역변환하면 $x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_2$ 가 되므로 정리 7.2를 이용하여 Y_1 과 Y_2 의 결합확률분포를 구하면 다음의 식이 된다.

$$g(y_1, y_2) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}}{(y_1 - y_2)!y_2!}$$

단, $y_1 = 0, 1, 2, \dots, y_2 = 0, 1, 2, \dots, y_1$

확률변수의 변수변환

• 예제 7.2 (2/2)

X_1 과 X_2 는 각각 μ_1, μ_2 의 모수를 가지는 포아송 분포를 따르는 확률변수로서 서로 독립일 때, 새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$ 의 확률분포를 구하라.

- 따라서, Y_1 에 대한 주변확률분포를 구하면

$$\begin{aligned} h(y_1) &= \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{\mu_1^{y_1-y_2} \mu_2^{y_2}}{(y_1-y_2)! y_2!} \\ &= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{(y_1-y_2)! y_2!} \mu_1^{y_1-y_2} \mu_2^{y_2} \\ &= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} \mu_1^{y_1-y_2} \mu_2^{y_2} \end{aligned}$$

- 합의 값은 $(\mu_1+\mu_2)^{y_1}$ 의 이항전개와 같으므로, 결과식은 다음과 같다.

$$h(y_1) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)} (\mu_1+\mu_2)^{y_1}}{y_1!}, \quad y_1 = 0, 1, 2, \dots$$

- 즉, 모수가 μ_1 과 μ_2 인 포아송 분포를 따르는 서로 독립인 두 확률변수의 합은 $(\mu_1+\mu_2)$ 의 모수를 가지는 포아송 분포를 따른다.

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환
 - X 와 Y 가 1 대 1 대응하는 경우

정리 7.3

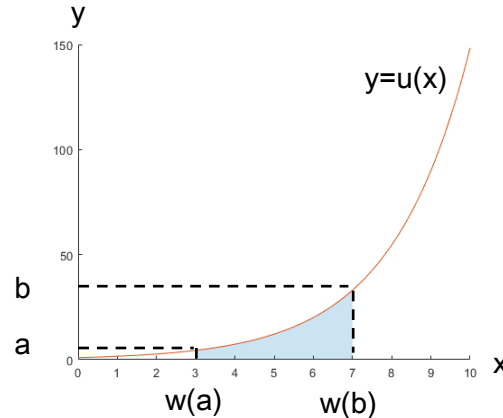
X 는 확률분포가 $f(x)$ 인 연속형 확률변수이고, X 와 Y 사이에는 $Y = u(x)$ 라는 1대 1 대응관계가 성립하여 관계식 $y = u(x)$ 를 x 에 대하여 풀면 유일하게 $x = w(y)$ 로 될 때, Y 의 확률분포는

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

가 된다. 여기서 $J = \frac{dx}{dy} = w'(y)$ 이며, 이를 야코비안(Jacobian)이라고 부른다.

확률변수의 변수변환

• 연속형 확률변수의 변수변환



<그림 2-1> 증가함수 적분 예시

증명

$y = u(x)$ 가 증가함수라면, Y 가 a 와 b 사이에 올 때, 확률변수 X 는 $w(a)$ 와 $w(b)$ 사이에 와야 하므로, Y 가 a 와 b 사이에 속할 확률

$$P(a < Y < b) = P[w(a) < X < w(b)] = \int_{w(a)}^{w(b)} f(x) dx$$

적분변수 x 를 y 로 변환시키려면 $x = w(y)$ 의 관계로부터 $dx = w'(y) dy$ 를 얻게 되고, 이를 적분식에 대입하면

$$P(a < Y < b) = \int_a^b f[w(y)]w'(y) dy$$

적분값은 y 의 범위 안에서 $a < b$ 인 각각의 경우의 구하고자 하는 확률 값이 되므로, 따라서 Y 의 확률분포 $g(y)$ 는

$$g(y) = f[w(y)]w'(y) = f[w(y)]J$$

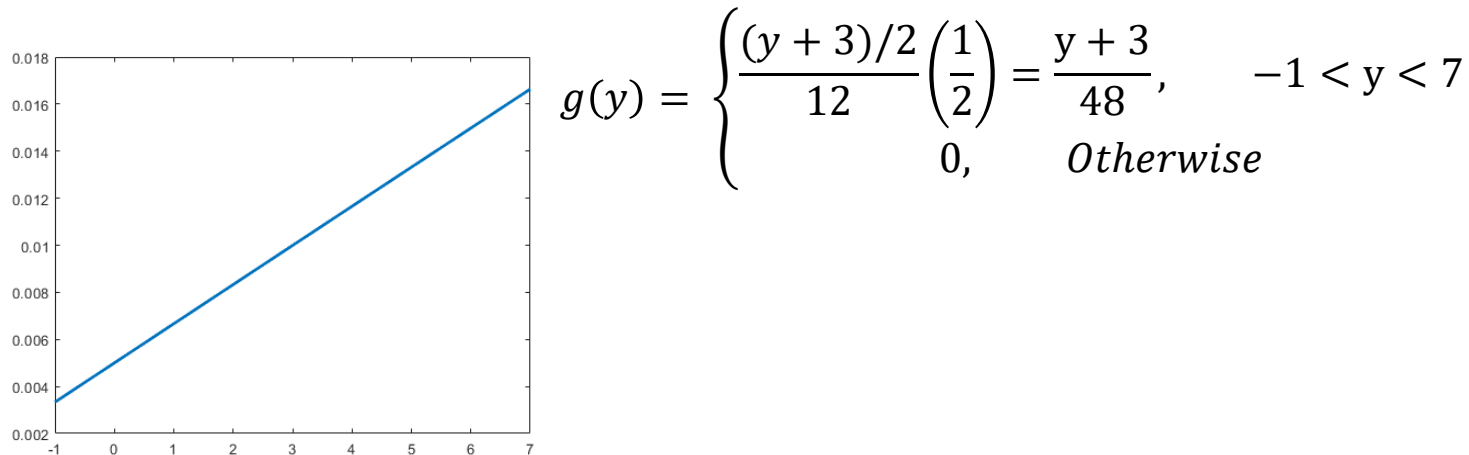
확률변수의 변수변환

• 예제 7.3

X 가 연속형 확률변수이고 확률분포 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, 확률변수 $Y = 2X - 3$ 의 확률분포를 구하라

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12}, & 1 < X < 5 \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

- $y = 2x - 3$ 을 x 에 대해 풀면 $x = \frac{(y+3)}{2}$ 가 되고, $J = w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$ 이 된다.
- 따라서, 정리 7.3을 이용하면 다음의 확률분포가 된다.



<그림 3-1> $Y = 2X - 3$ 의 확률분포

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환
 - (x_1, x_2) 와 (y_1, y_2) 가 1 대 1 대응하는 경우

정리 7.4

X_1 과 X_2 는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$ 인 연속형 확률변수이고, (x_1, x_2) 와 (y_1, y_2) 는 서로 1대 1로 대응하여 식 $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ 와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ 를 x_1 과 x_2 에 대하여 풀면 유일하게 $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ 와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$ 로 될 때, Y_1 과 Y_2 의 결합확률분포는

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]|J|$$

가 된다. 여기서 J 는 2×2 행렬식으로서

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

이다.

확률변수의 변수변환

• 예제 7.4 (1/2)

X_1 과 X_2 는 연속형 확률변수이고 결합확률분포가 다음과 같을 때, $Y_1 = X_1^2$ 과 $Y_2 = X_1X_2$ 의 결합확률분포를 구하라

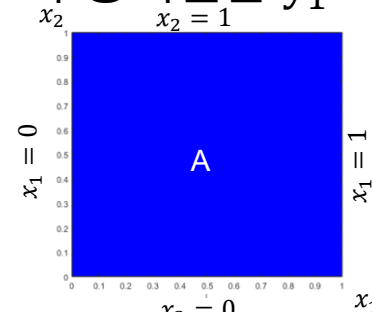
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

- $y_1 = x_1^2$ 과 $y_2 = x_1x_2$ 를 각각 x_1, x_2 에 대해 풀면 $x_1 = \sqrt{y_1}$ 과 $x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1}}$ 되고,

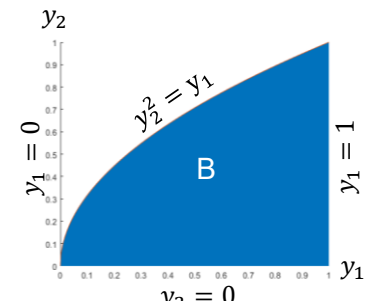
$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ -\frac{y_2}{2y_1^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{y_1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1}$$

- x_1x_2 평면에서 정의된 점의 집합 A 와 대응된 y_1y_2 평면에서 정의된 점의 집합 B 를 구하기 위해, $x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1$ 로 놓으면, 집합 A 의 경계선은 $y_1 = 0, y_2 = 0, y_1 = 1, y_2 = \sqrt{y_1}$ 또는 $y_2^2 = y_1$ 이므로, 1 대 1 대응이 된다.

- $A = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$
- $B = \{(y_1, y_2) | y_2^2 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1\}$



<그림 4-1> A 평면



<그림 4-2> B 평면

확률변수의 변수변환

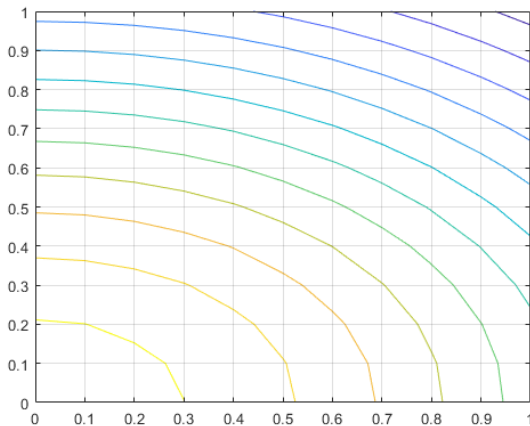
• 예제 7.4 (2/2)

X_1 과 X_2 는 연속형 확률변수이고 결합확률분포가 다음과 같을 때, $Y_1 = X_1^2$ 과 $Y_2 = X_1X_2$ 의 결합확률분포를 구하라

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases}$$

- 따라서, 정리 7.4에 의해 Y_1 과 Y_2 의 결합확률분포는 다음과 같다.

$$g(y_1, y_2) = 4(\sqrt{y_1}) \frac{y_2}{\sqrt{y_1}} \frac{1}{2y_1} = \begin{cases} \frac{2y_2}{y_1}, & y_2^2 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



<그림 4-3> Y_1 과 Y_2 의 결합확률분포

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환
 - X 와 Y 가 1 대 1 대응관계가 아닌 경우

정리 7.5

X 는 확률분포가 $f(x)$ 를 가지는 연속형 확률변수이고, $Y = u(x)$ 로 변수변환을 하려고 할 때 X 와 Y 가 1대 1 대응관계를 만족하지 못한다고 하자. 이 경우 만일 $Y = u(x)$ 와 k 개의 역함수 $x_1 = w_1(y), x_2 = w_2(y), \dots, x_k = w_k(y)$ 가 각각 1대 1 대응관계를 가지도록 X 의 영역을 k 개의 서로 배반인 영역으로 분할시킬 수 있다면, Y 의 확률분포는

$$g(y) = \sum_{i=1}^k f[w_i(y)] |J_i|$$

가 된다. 단, $J_i = w'_i(y), i = 1, 2, \dots, k$ 이다.

확률변수의 변수변환

• 예제 7.5 (1/2)

X 가 평균이 μ , 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때, $Y = (X - \mu)^2 / \sigma^2$ 은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름을 증명하라.

- $Z = (X - \mu) / \sigma$ 라 놓으면, Z 는 표준정규분포를 따르게 되므로 아래의 식이 된다.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad -\infty < z < \infty$$

- $Y = (X - \mu)^2 / \sigma^2$ 이 되므로 $y = z^2$ 을 z 에 대해 풀면 $z = \pm\sqrt{y}$ 가 된다.
- 만일 z_1 과 z_2 를 각각 $z_1 = -\sqrt{y}, z_2 = \sqrt{y}$ 라 하면, $J_1 = -1/2\sqrt{y}$ 가 되고, $J_2 = 1/2\sqrt{y}$ 가 됨에 따라 정리 7.5를 이용하면 다음과 같은 식이 된다.

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \left| \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0$$

확률변수의 변수변환

• 예제 7.5 (2/2)

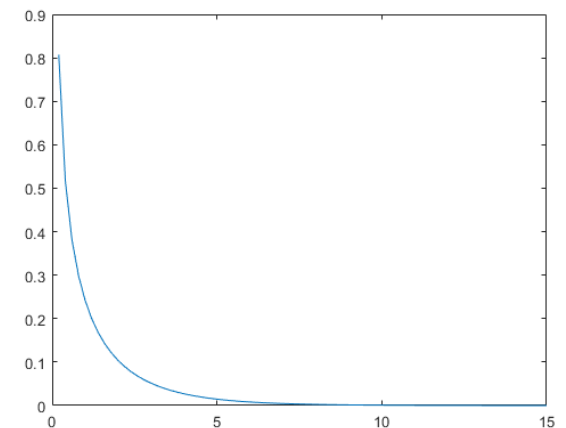
X 가 평균이 μ , 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때, $Y = (X - \mu)^2 / \sigma^2$ 은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름을 증명하라.

- $g(y)$ 는 확률밀도함수이므로 아래의 식이 된다.

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}} dy = \frac{\tau(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}}}{\sqrt{2}\tau(\frac{1}{2})} dy = \frac{\tau(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

- 적분값은 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 2$ 인 감마분포의 면적이 된다. 또한 $\sqrt{\pi} = \tau(\frac{1}{2})$ 이므로 확률분포는 자유도 1인 카이제곱분포를 따른다.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{y^{\frac{1}{2}-1} e^{\frac{-y}{2}}}{\sqrt{2}\tau(\frac{1}{2})}, & y > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



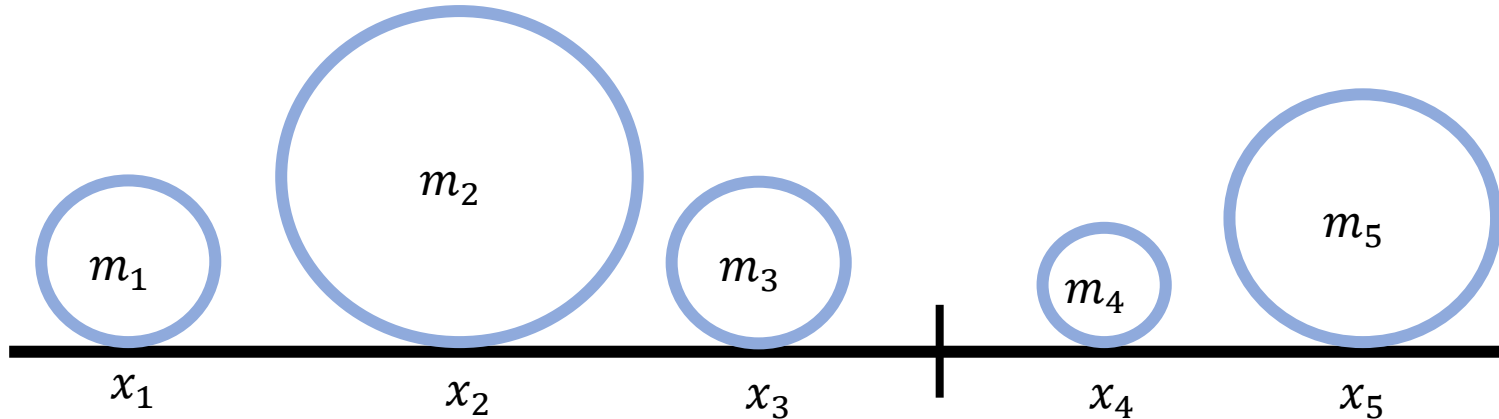
<그림 5-1> $Y = (X - \mu)^2 / \sigma^2$ 그래프

목차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

적률과 적률 생성함수

- 적률(Moment)
- 물리학적 정의
 - 어떤 축을 중심으로 회전하려고 하는 힘(돌림힘)



지렛대 위에 질량이 '분포'해 있다고 가정할 때, 질량을 '확률'로 생각하면, 위의 그림은 이산확률분포가 됨

- 수학적 정의
 - 확률변수의 특징을 이해하기 위한 값

적률과 적률생성함수

• 적률(Moment)

정의 7.1

확률변수 X 의 원점에 대한 r 차 적률 μ'_r 은

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x), & X \text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx, & X \text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

이다.

- 1차 적률 = 평균 = $\mu' = \mu = E(X)$
- 2차 중심적률 = 분산 = $\mu_2 = E[(X - \mu)^2] = Var(X)$
- 3차 표준화적률 = 왜도 = $\mu_3 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \gamma_1$
- 4차 표준화적률 = 첨도 = $\mu_4 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = Kurt(X)$

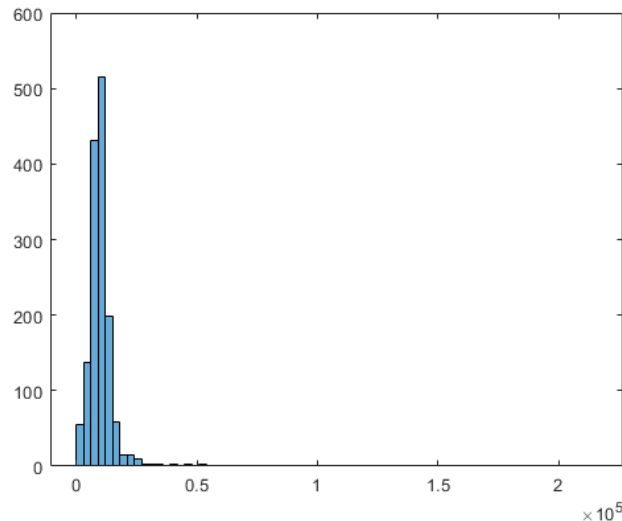
적률과 적률생성함수

- 적률(Moment)

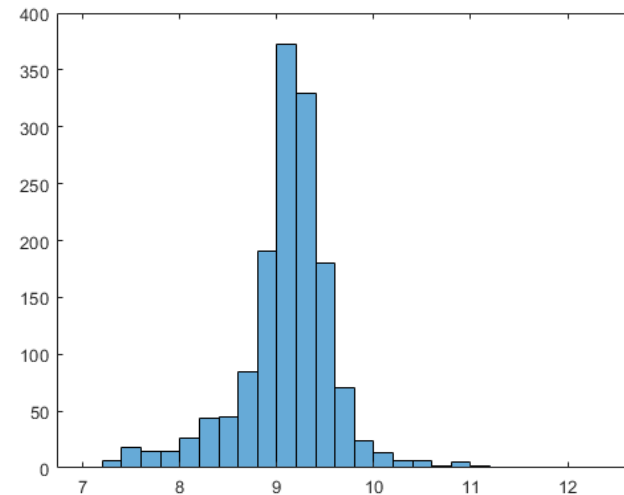
- 왜도(Skewness): 평균을 중심으로 데이터의 비대칭 정도를 나타내는 지표

- 변수변환을 통한 왜도 제거

- 변환 전 왜도: 12.1951
- 변환 후 왜도: -0.1379



<그림 6-1> 왜도 제거 전 확률분포



<그림 6-2> 왜도 제거 후 확률분포

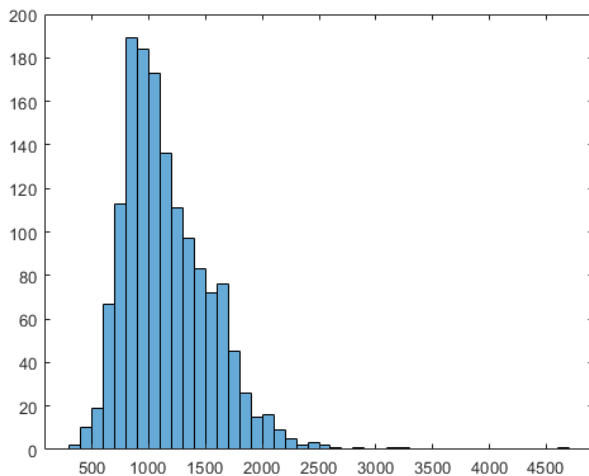
적률과 적률 생성함수

- 적률(Moment)

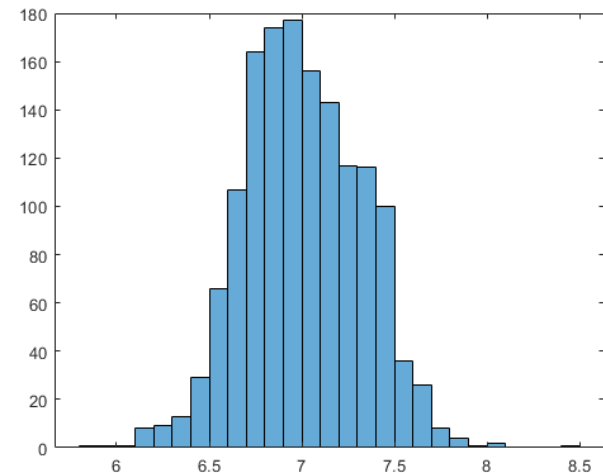
- 첨도(Kurtosis): 데이터의 몰려 있는 정도(뽕족한 정도)를 나타내는 지표

- 변수변환을 통한 첨도 제거

- 변환 전 첨도: 8.7221
- 변환 후 첨도: 3.1462



<그림 7-1> 첨도 제거 전 확률분포



<그림 7-2> 첨도 제거 후 확률분포

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수(MGF, Moment Generating Function)

정의 7.2

확률변수 X 의 적률생성함수 $E(e^{tx})$ 를 $M_X(t)$ 로 표기하면,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x), & X \text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & X \text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

이다.

- 적률생성함수를 생성했을 때, 적분 가능한 함수인 경우에만 사용 가능
- 필요성
 - 확률분포의 특성(평균, 분산, 왜도, 첨도)을 쉽게 파악 가능
 - 결합확률분포를 쉽게 파악 가능

적률과 적률 생성함수

• 적률 생성함수(MGF, Moment Generating Function)

정리 7.6

확률변수 X 의 적률 생성함수를 $M_x(t)$ 라 하면,

$$\left. \frac{d^r M_x(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = \mu'_r$$

이 된다.

증명

$M_x(t)$ 를 이산형인 경우와 연속형인 경우 각각 t 에 대해 r 번 미분하면

$$\frac{d^r M_x(t)}{dt^r} = \begin{cases} \sum_x x^r e^{tx} f(x), & X \text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x) dx, & X \text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

가 된다. 여기서 $t = 0$ 을 대입하면 두 경우 모두 $E(X^r) = \mu'_r$ 이 된다.

적률과 적률생성함수

• 예제 7.6 (1/2)

확률변수 X 가 이항분포를 따를 때, X 의 적률생성함수를 구하고, 이를 이용하여 $\mu = np, \sigma^2 = npq$ 가 됨을 증명하라.

- 정의 7.2로부터 다음의 식이 된다.

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x}$$

- 이항전개식 $(pe^t + q)^n$ 을 이용하면

$$M_X(t) = (pe^t + q)^n$$

- 따라서

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = n(pe^t + q)^{n-1} pe^t$$

- 그리고

$$\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} = np[e^t(n-1)(pe^t + q)^{n-2} pe^t + (pe^t + q)^{n-1} e^t]$$

적률과 적률생성함수

• 예제 7.6 (2/2)

확률변수 X 가 이항분포를 따를 때, X 의 적률생성함수를 구하고, 이를 이용하여 $\mu = np, \sigma^2 = npq$ 가 됨을 증명하라.

- 미분된 두 식에 $t = 0$ 을 대입하면

$$\mu'_1 = np, \mu'_2 = np[(n-1)p + 1]$$

이 되므로,

$$\begin{aligned}\mu &= \mu'_1 = np \\ \sigma^2 &= \mu'_2 - \mu^2 = np(1-p) = npq\end{aligned}$$

- 따라서, $\mu = np, \sigma^2 = npq$ 가 된다.

적률과 적률생성함수

• 예제 7.7 (1/2)

확률변수 X 가 평균이 μ , 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때, X 의 적률생성함수는 $Mx(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$ 이 됨을 유도하라.

• 정의 7.2로부터

$$\begin{aligned} Mx(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right] dx \end{aligned}$$

• 이제 $x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2 = [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$ 으로 놓으면,

$$\begin{aligned} Mx(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{[x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right] dx \\ &= \exp\left(\frac{2\mu t + \sigma^2 t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - (\mu + t\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\} dx \end{aligned}$$

적률과 적률 생성함수

• 예제 7.7 (2/2)

확률변수 X 가 평균이 μ , 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때, X 의 적률생성함수는 $Mx(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$ 이 됨을 유도하라.

- 여기서 $w = [x - (\mu + t\sigma^2)]/\sigma$ 로 치환하면, $dx = \sigma dw$ 이므로

$$Mx(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2} dw$$

- 이 식의 적분부분은 표준정규분포의 면적으로서 1이 되므로, 다음과 같은 식이 된다.

$$Mx(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

적률과 적률 생성함수

• 적률 생성함수(Moment Generating Function)

정리 7.7

(유일성 정리): 두 확률변수 X 와 Y 의 적률생성함수가 각각 $M_x(t), M_y(t)$ 일 때, 모든 t 값에 대해 $M_x(t) = M_y(t)$ 이면 X 와 Y 는 같은 확률분포를 가진다.

정리 7.8

$$M_{x+a}(t) = e^{at} M_X(t)$$

증명

$$M_{x+a}(t) = E[e^{t(X+a)}] = e^{at} E(e^{tX}) = e^{at} M_X(t)$$

정리 7.9

$$M_{aX}(t) = M_X(at)$$

증명

$$M_{aX}(t) = E[e^{t(aX)}] = E[e^{(at)X}] = M_X(at)$$

적률과 적률 생성함수

• 적률 생성함수(Moment Generating Function)

정리 7.10

확률 변수 X_1, X_2, \dots, X_n 이 서로 독립 이면서 각각의 적률 생성함수가 $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots, M_{X_n}(t)$ 이고 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 이면, Y 의 적률 생성함수는 $M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$ 가 된다.

증명

연속형인 경우에 대해서

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E[e^{tY}] = E[e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned}$$

확률변수들은 서로 독립적이므로

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_1} f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_2} f_2(x_2) dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_n} f_n(x_n) dx_n \\ &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t) \end{aligned}$$

Thanks!

이 하 늘(haneul@pel.sejong.ac.kr)

부록 #1

• 그림 1-1

```
x = 0:10;  
y = geopdf(x,0.75);  
  
figure  
bar(x,y,1)  
xlabel('Observation')  
ylabel('Probability')
```

• 그림 1-2

```
x = 0:10;  
y = geopdf(sqrt(x),0.75);  
  
figure  
bar(x,y,1)  
xlabel('Observation')  
ylabel('Probability')
```

부록 #2

• 그림 2-1

```
x = 0:1:10;  
xs=x(x>=3&x<=7);  
  
figure;  
hold on;  
a=area(xs,exp(xs/2));  
a.FaceAlpha=0.2;  
  
p=plot(x,exp(x/2));
```

• 그림 3-1

```
pd = makedist('Weibull','A',5,'B',2);  
  
x = -1:1:7;  
pdf_normal = pdf(pd,(x+3)/48);  
  
plot(x,pdf_normal,'LineWidth',2);
```

부록 #3

• 그림 4-1

```
x1=[0 1 1 0];  
x2=[0 0 1 1];  
fill(x1,x2, 'b');
```

• 그림 4-2

```
y1=linspace(0, 1, 500);  
y2=sqrt(y1);  
  
xs=y1(y1 >=0&y1 <=1);  
  
figure;  
hold on;  
a=area(xs,y2);  
p=plot(y1,y2);
```

부록 #4

• 예제 4-3

```
sigma_y1 = (0.5)^2;  
sigma_y2 = 0.2;  
  
y2 = 0:0.1:1;  
y1 = y2.^2:0.1:1;  
  
[y1, y2] = meshgrid(y1,y2);  
pdf_y1 = (1/sqrt(2*pi)/sigma_i)*exp(-y1.^2/(2*sigma_i^2));  
pdf_y2 = (1/sqrt(2*pi)/sigma_q)*exp(-y2.^2/(2*sigma_q^2));  
  
joint = pdf_y1.*pdf_y2;  
  
figure();  
contour(y1,y2,joint);  
grid("on");
```

부록 #5

• 예제 5-1

```
x = 0:0.2:15;  
y = chi2pdf(x,1);  
  
figure;  
plot(x,y)
```

• 예제 6-1

```
x=readtable('train.csv');  
col1=x{:, 5};  
  
%왜도 확인:12.1951  
check=skewness(col1);  
  
figure;  
histogram(col1);
```

부록 #6

• 예제 6-2

```
x=readtable('train.csv');  
col1=x{:, 5};  
tr=log(col1);
```

```
%왜도 확인:-0.1379  
check=skewness(tr);
```

```
figure;  
histogram(tr);
```

• 예제 7-1

```
x=readtable('train.csv');  
col1=x{:, 44};
```

```
%첨도 확인:8.7221  
check=kurtosis(col1);
```

```
figure;  
histogram(col1);
```

부록 #7

• 예제 7-2

```
x=readtable('train.csv');  
col1=x{:, 44};  
tr=log(col1);
```

```
%첨도 확인:3.1462  
check=kurtosis(tr);
```

```
figure;  
histogram(tr);
```