2025/01/21, 확률모형 세미나

의사결정을 위한 확률모형

- 3장 마코프 체인 -

박 재 형 (jaehyoung@pel.sejong.ac.kr)

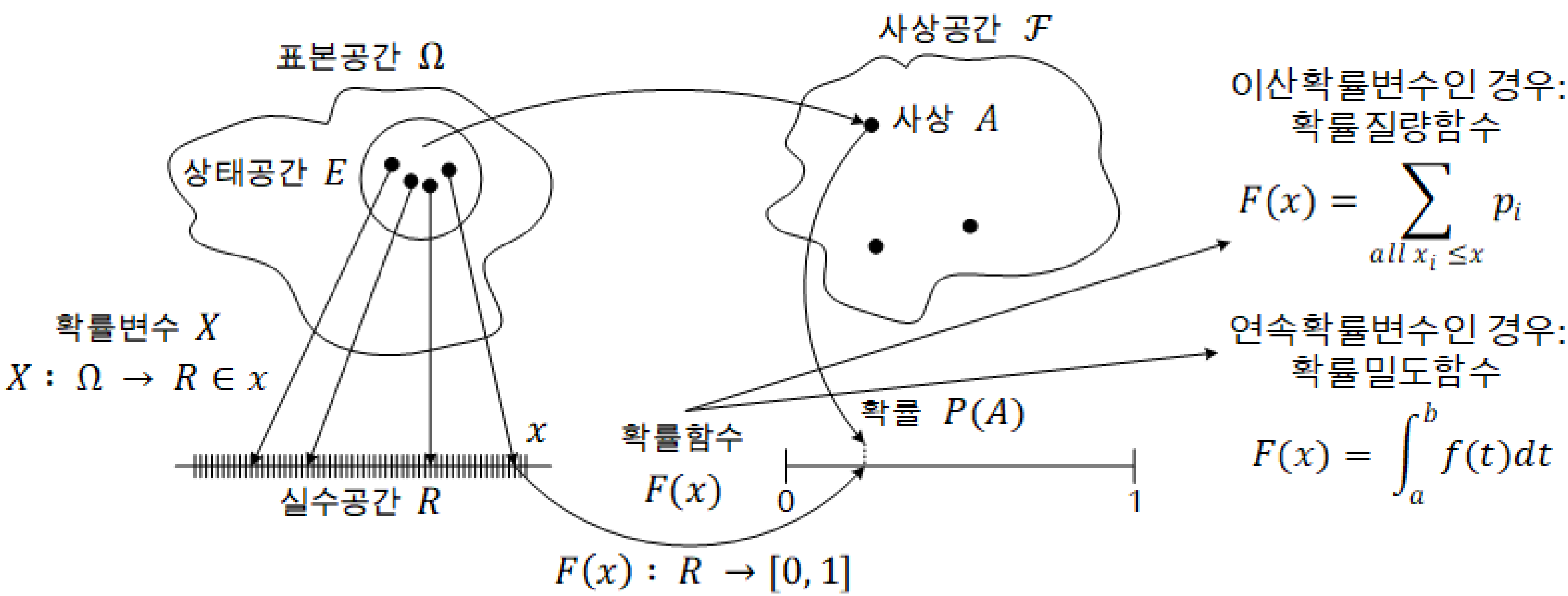
세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 개요
- 마코프 체인
- 기약 마코프 체인
- 가약 마코프 체인
- 마코프 체인 응용

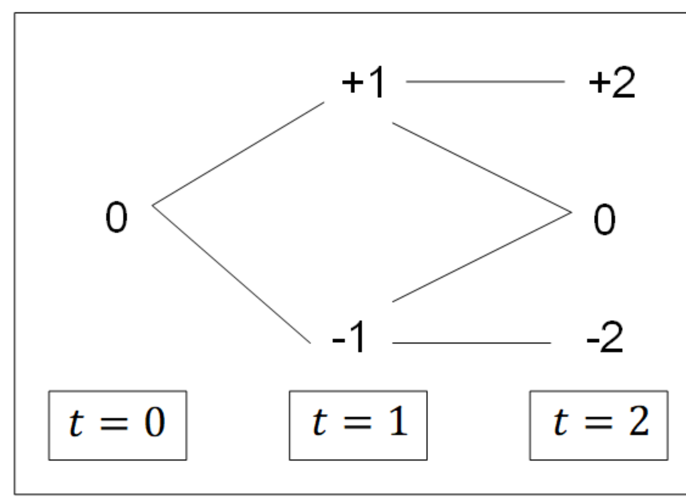
개 요

- 확률론 요소들의 연관성
  - 표본공간과 사상공간
  - 상태공간과 실수공간
  - 확률변수와 확률함수



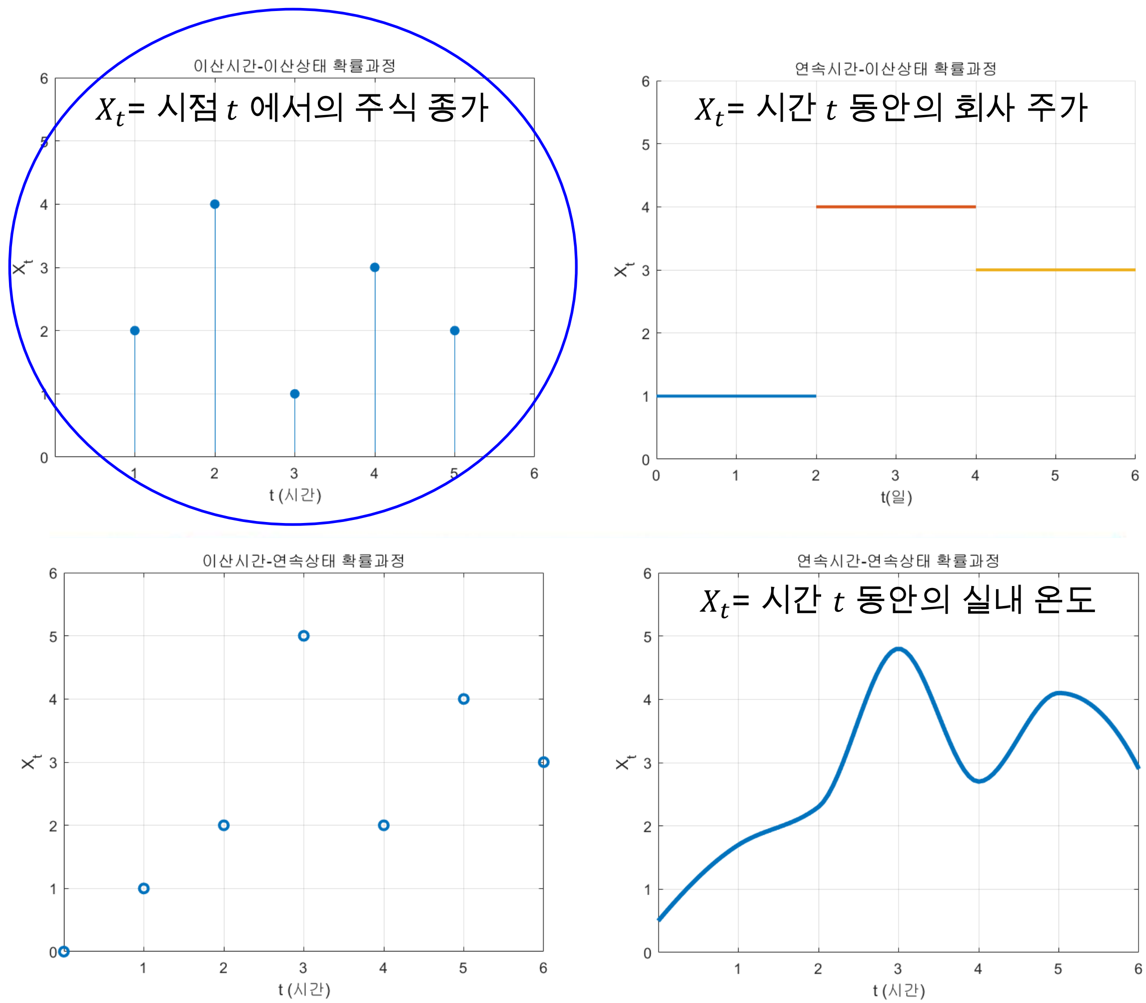
개 요

- 확률 과정(Stochastic Process)
  - 시간에 따라 어떤 사건이 발생할 확률 값이 변화하는 과정
  - 표기법
    - 확률변수의 집합: $\{X_t : t \in T\}$
      - 시간 공간(Time Space) T: 관찰 시점(t)들의 집합
      - 상태 공간(State Space) E: 확률 과정을 따르는 확률 변수 X_t가 가질 수 있는 모든 값
  - 예시
    - 확률 변수 X_t
      - t번째 동전을 던졌을 때의 누적 점수(앞: +1, 뒤: -1)
    - 시간 공간 $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$
    - 상태 공간 $E = \{e,\ e \in (-\infty, \infty)\}$



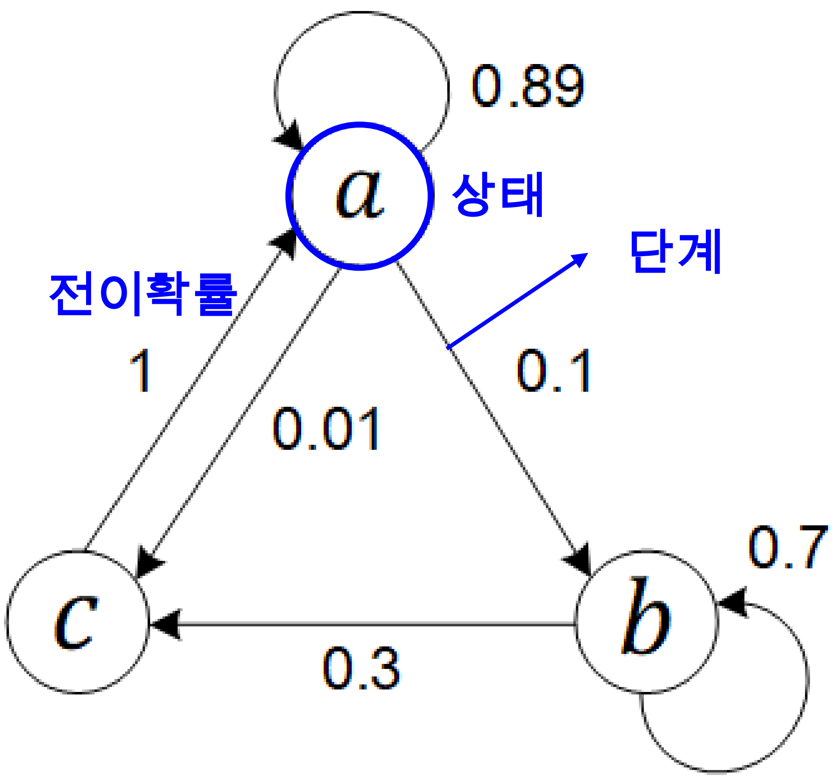
개 요

- 확률 과정(Stochastic Process)
  - 시간에 따라 어떤 사건이 발생할 확률 값이 변화하는 과정
  - 4가지 분류
    - 이산시간-이산상태
    - 연속시간-이산상태
    - 이산시간-연속상태
    - 연속시간-연속상태



마코프 체인

- 용어
  - 상태 및 단계
  - 전이확률
  - 전이확률 행렬



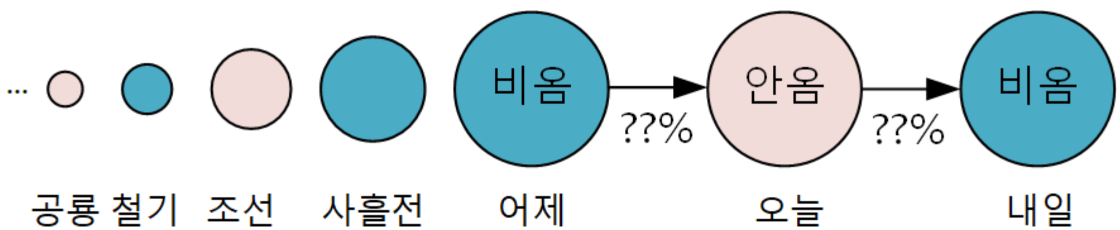
전이확률 행렬

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

마코프 체인

정의

확률과정 $\{X_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$의 상태공간 E가 이산형일 때, 모든 $j,\ i_n,\ i_{n-1}, \cdots, i_1, i_0 \in E$에 대하여, $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n,\ X_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$을 만족하는 확률과정



각 상태가 체인으로 연결되어 있는 형태
특정 상태가 일어난 확률을 알아야 다음 상태 확률을 구할 수 있음
확률과정은 이전 상태의 영향을 받게 됨

확률과정 $\{X_n : n = \cdots$, 공룡, … , 철기, … , 조선, … , 사흘전, … , 어제, 오늘, 내일, …$\}$
상태공간 $E = \{$비옴, 안옴$\}$

$$P\left(X_{\text{내일}} = j_{\text{내일}} \,\middle|\, X_{\text{오늘}} = i_{\text{오늘}},\ X_{\text{어제}} = i_{\text{어제}}, \dots, X_{\text{사흘전}} = i_{\text{사흘전}},\ X_{\text{조선}} = i_{\text{조선}}, \dots\right)$$

내일 비올 확률

$$P\left(X_{\text{내일}} = \text{비옴} \,\middle|\, X_{\text{오늘}} = \text{안옴},\ X_{\text{어제}} = \text{비옴}, \dots, X_{\text{사흘전}} = \text{비옴}, X_{\text{조선}} = \text{안옴}, X_{\text{철기}} = \text{비옴} \dots\right)$$

불가능

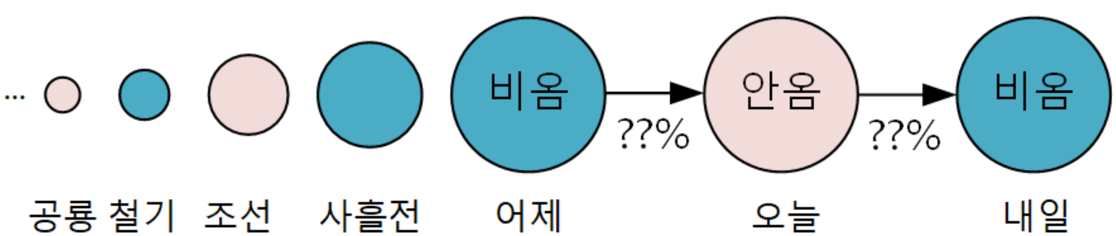
마코프 체인

정의

확률과정 $\{X_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$의 상태공간 E가 이산형일 때, 모든 $j,\ i_n,\ i_{n-1}, \cdots, i_1,$ $i_0 \in E$에 대하여, $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n,\ X_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$을 만족하는 확률과정

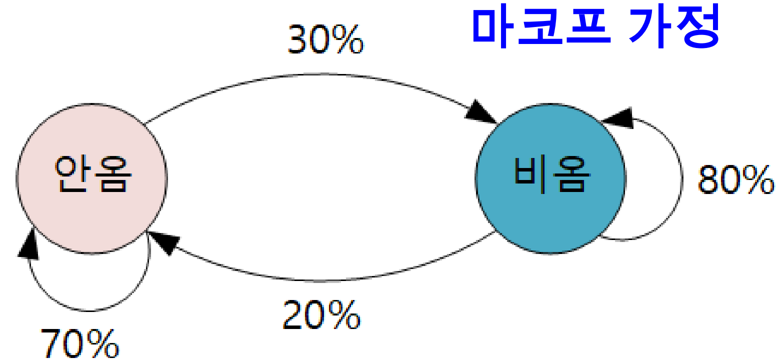
- 마코프 가정(Markov Assumption)
  - 미래 시점의 상태확률은 오직 현재 상태에만 의존하며, 과거의 상태에는 영향을 받지 않음 (조건부 독립)
  - $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$이 성립하게 함

불가능



$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n,\ X_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0)$

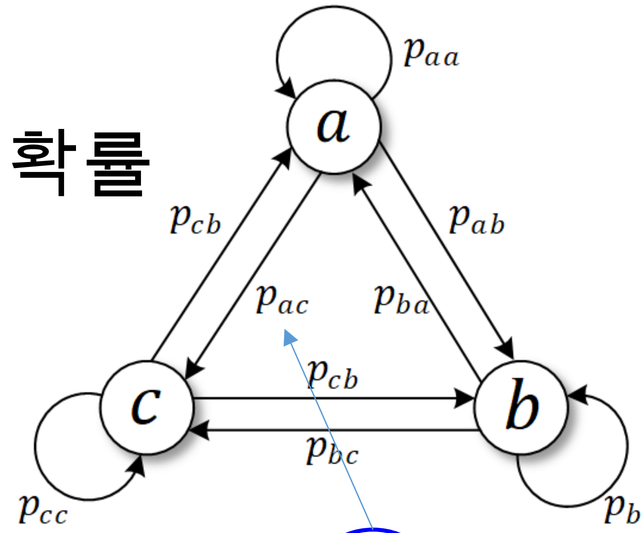
마코프 가정



$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n)$

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 현재 상태 i에서 다음 상태 j로 변화할 확률
  - 1단계 전이확률
    - $P(i \rightarrow j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$
    - $p_{ij}\ (0 \leq p_{ij} \leq 1)$
    - 행렬 표현 (= 마코프 행렬)



$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix}$$

상태 c의 전이확률 합은 1

$$\sum_{j \in E} P(X_{n+1} = j \mid X_n = c) = \sum_{j \in E} p_{cj} = 1$$

- $P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0j} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix}$

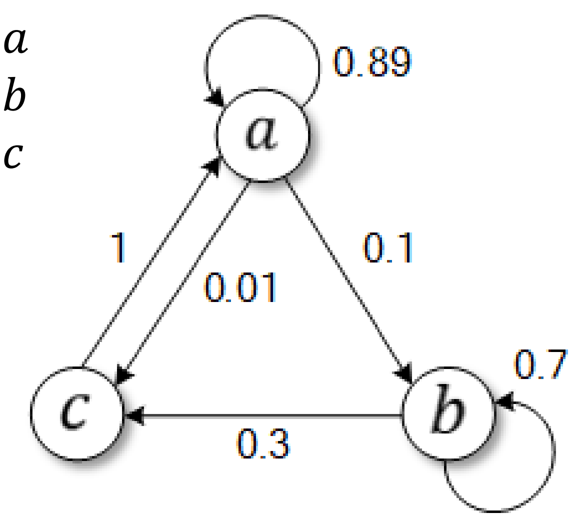
- p_{ij}는 확률이므로 $0 \leq p_{ij} \leq 1$이며, 모든 $i \in E$에 대해 $\sum_{j \in E} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = 1$

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 1단계 전이확률: 예제 3.1

정상 작동 / 일부 고장 / 완전 고장의 상태를 가지는 기계장치가 있다. 현재 정상으로 작동하고 있고 그 다음날도 정상일 확률이 0.89, 일부 고장 난 상태로 변할 확률은 0.1, 완전히 고장 난 확률은 0.01이다. 오늘 일부 고장 난 상태로 작동중인 기계장치는 내일도 고장 난 상태로 머물 가능성이 0.7이고, 완전히 고장 난 확률은 0.3이다. 한편, 오늘 고장 난 기계장치는 하루에 걸려서 수리를 마치고 내일은 정상적인 작동을 하게 된다. $X_0, X_1, \cdots$를 매일의 기계 장치의 상태라고 하고, $X_n = a$는 단계 n에서 정상적으로 가동 중, $X_n = b$는 일부 고장, $X_n = c$는 고장 상태라고 하자. 이때의 1단계 전이확률 행렬은?

- 단계 n에서 정상 작동 $= X_n = a$
- 단계 n에서 일부 고장 $= X_n = b$
- 단계 n에서 완전 고장 $= X_n = c$
- 정상 작동 → 정상 작동: 0.89
- 정상 작동 → 일부 고장: 0.1
- 정상 작동 → 완전 고장: 0.01
- 일부 고장 → 일부 고장: 0.7
- 일부 고장 → 완전 고장: 0.3
- 완전 고장 → 정상 작동: 1.0
- 확률과정 $\{X_0,\ X_1, \cdots\}$은 상태공간 $E = \{a, b, c\}$인 마코프 체인이다.



$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix}$$

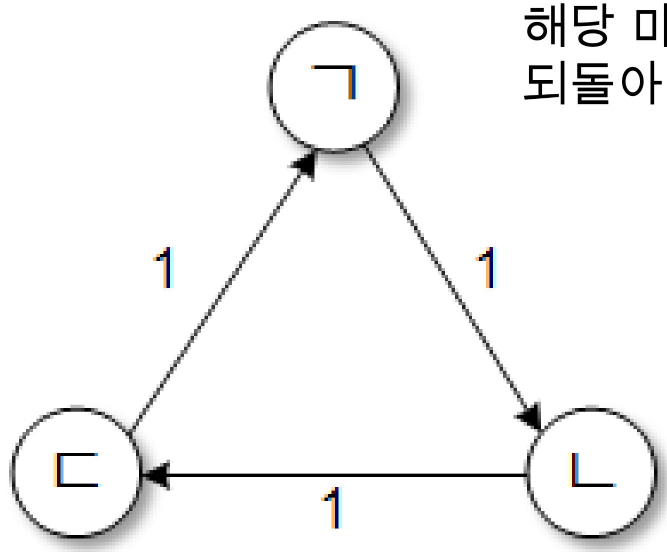
$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 1단계 전이확률: 예제 3.2

세 도시 {ㄱ, ㄴ, ㄷ}를 다니며 판매하는 사원이 있는데, 그는 항상 ㄱ → ㄴ → ㄷ → ㄱ의 순서로 다닌다.
이 경우의 마코프 체인 다이어그램과 전이확률 행렬은?

- 도시 ㄱ → 도시 ㄴ: 1
- 도시 ㄴ → 도시 ㄷ: 1
- 도시 ㄷ → 도시 ㄱ: 1



해당 마코프 체인은 어느 한 상태를 출발하고 나서 그 상태로 되돌아오는 데에는 3의 배수만큼의 단계가 필요하다.

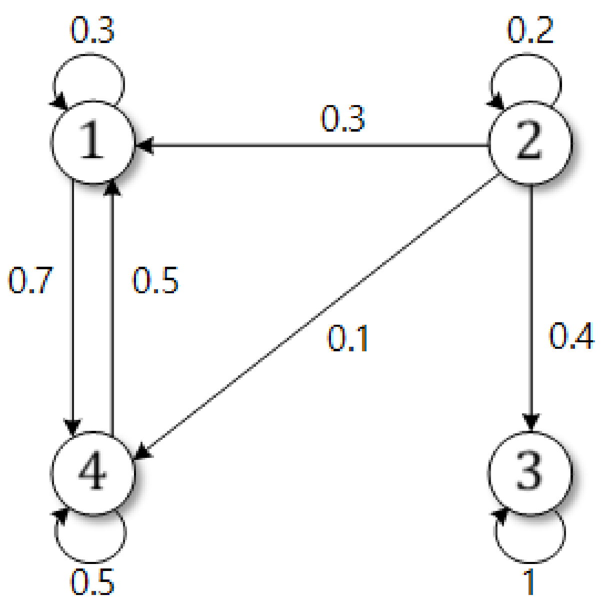
$$P = \begin{array}{c} ㄱ \\ ㄴ \\ ㄷ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 1단계 전이확률: 예제 3.3

상태공간이 $\{1, 2,3,4\}$이며, 아래의 전이확률 행렬을 가지는 마코프 체인 다이어그램은?

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$



해당 마코프 체인은 상태 2에서 출발해서 다음 단계에 2로 다시 돌아오지 않는다면 영원히 상태 2로 돌아오지 않는다.

상태 1과 상태 4는 서로 왕래하며, 언젠가 상태 3으로 도달하면 영원히 상태 3에 머물게 된다.

상태 3은 상태 1과 상태 4와 왕래하지 않는다.

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 1단계 전이확률: 예제 3.4

어떤 기계장치의 수명을 확률변수 Z라고하고 확률분포가 $P(Z=k)=q_k, k=1,2,3,\ldots$라고하자. 기계의 수명이 다하면 즉시 동일한 기계로 바꾸고, 확률변수 X_n를 시점 n에서 기계장치의 잔여수명이라고 하면 확률변수 X_{n+1}는 아래와 같다. (단, 기계장치의 수명은 -1씩 감소한다.)

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n-1, & if\ X_n \geq 1, \\ Z-1, & if\ X_n=0 \end{cases}$$

1) 확률과정 $\{X_n,\ n=0,1,2,\ldots\}$은 마코프 체인인가?
2) 확률변수 X_n의 전이확률 행렬은?
3) 확률변수 X_n의 다이어그램은?

정의

확률과정 $\{X_n: n=0,1,2,\cdots\}$의 상태공간 E가 이산형일 때, 모든 $j,\ i_n,\ i_{n-1},\cdots,i_1,$ $i_0 \in E$에 대하여, $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n,\ X_{n-1},\cdots,X_0=i_0)=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n)$을 만족하는 확률과정

1) X_n은 수명이 -1씩 감소하는 기계장치의 잔여수명이므로, 상태공간 $E=\{\ldots,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0\}$는 이산형이다.
   현재 시점 n에서 기계장치의 잔여수명이 남아있는 경우($X_n \geq 1$), 다음 단계 $n+1$에서 기계장치 수명이 -1 감소: X_n-1
   현재 시점 n에서 기계장치의 잔여수명이 없는 경우($X_n=0$), 다음 단계 $n+1$에서 새로운 기계로 교체: $Z-1$ → **시점 n에서 잔여수명이 다해 새로운 기계로 교체하면 Z이지만, 확률변수 X_{n+1}은 다음 단계이므로 수명이 -1**

   따라서, X_{n+1}은 X_n의 조건에 의해 정해지므로 조건부 독립 $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i_n)$

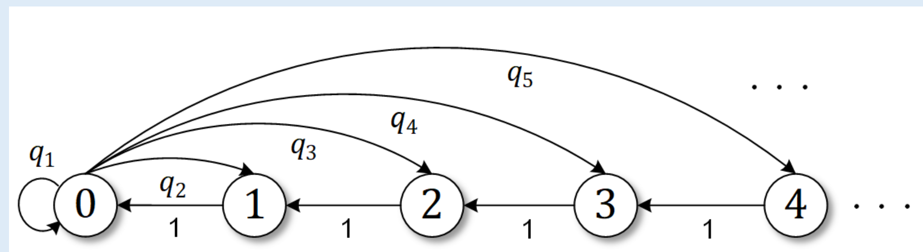
마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 1단계 전이확률: 예제 3.4

어떤 기계장치의 수명을 확률변수 Z라고하고 확률분포가 $P(Z=k)=q_k, k=1,2,3,\ldots$라고하자. 기계의 수명이 다하면 즉시 동일한 기계로 바꾸고, 확률변수 X_n를 시점 n에서 기계장치의 잔여수명이라고 하면 확률변수 X_{n+1}는 아래와 같다. (단, 기계장치의 수명은 -1씩 감소한다.)

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n-1, & if\ X_n\geq 1, \\ Z-1, & if\ X_n=0 \end{cases}$$

1) 확률과정 $\{X_n,\ n=0,1,2,\ldots\}$은 마코프 체인인가?
2) 확률변수 X_n의 전이확률 행렬은?
3) 확률변수 X_n의 다이어그램은?



2) 전이확률 구하기

$$i\geq 0\text{일 때}, p_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(X_n-1=j|X_n=i)=\begin{cases} 1, & if\ \ j=i-1 \\ 0, & if\ \ j\neq i-1 \end{cases}$$

$$p_{43}=\begin{cases} 1, & if\ \ 3=4-1 \\ 0, & if\ \ 3\neq 4-1 \end{cases}, p_{00}=\begin{cases} 1, & if\ \ 0=0-1 \\ 0, & if\ \ 0\neq 0-1 \end{cases}$$

잔여수명 X_n은 -1 감소하는 경우만 있음

$$i=0\text{일 때}, p_{0j}=P(X_{n+1}=j|X_n=0)=P(Z-1=j|X_n=0)=P(Z=j+1)=q_{j+1}$$

기계장치의 수명이 다했을 때

$P(Z=k)=q_k, k=1,2,3,\ldots$ 조건 활용

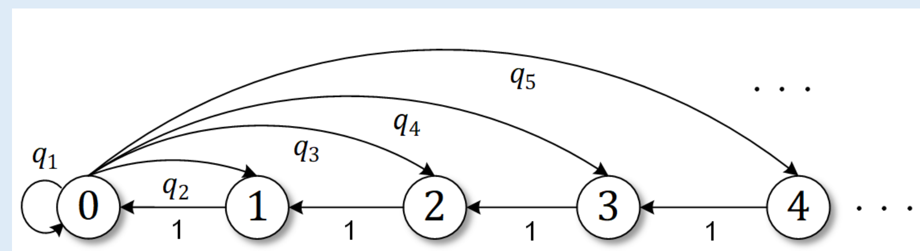
마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 1단계 전이확률: 예제 3.4

어떤 기계장치의 수명을 확률변수 Z라고하고 확률분포가 $P(Z=k)=q_k, k=1,2,3,\ldots$라고하자. 기계의 수명이 다하면 즉시 동일한 기계로 바꾸고, 확률변수 X_n를 시점 n에서 기계장치의 잔여수명이라고 하면 확률변수 X_{n+1}는 아래와 같다. (단, 기계장치의 수명은 -1씩 감소한다.)

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n-1, & if\ X_n\geq 1, \\ Z-1, & if\ X_n=0 \end{cases}$$

1) 확률과정 $\{X_n,\ n=0,1,2,\ldots\}$은 마코프 체인인가?
2) 확률변수 X_n의 전이확률 행렬은?
3) 확률변수 X_n의 다이어그램은?



2) 전이확률 구하기

$$i\geq 0\text{일 때, } p_{ij}=P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(X_n-1=j|X_n=i)=\begin{cases} 1, & if\ \ j=i-1 \\ 0, & if\ \ j\neq i-1 \end{cases}$$

$$i=0\text{일 때, } p_{0j}=P(X_{n+1}=j|X_n=0)=P(Z-1=j|X_n=0)=P(Z=j+1)=q_{j+1}$$

$$\text{전이확률 } P=\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 1단계 전이확률: 예제 3.5

$n = 1,2,3,\ldots$에 대하여 $X_n \geq 1$일 때에 $X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1, & \text{확률 } p \\ X_n - 1, & \text{확률 } q \equiv 1 - p \end{cases}$ 이고, $X_n = 0$이면 $X_{n+1} = 1$이다.
이때, 확률과정 $\{X_n,\ n = 1,2,3,\ldots\}$는 상태공간 $E = \{0,1,2,\ldots\}$인 마코프 체인이다. 해당 마코프 체인의 다이어그램은?

상태공간은 $E = \{0,1,2,\ldots\}$ 이므로 음수는 될 수 없음
전이 조건 해석

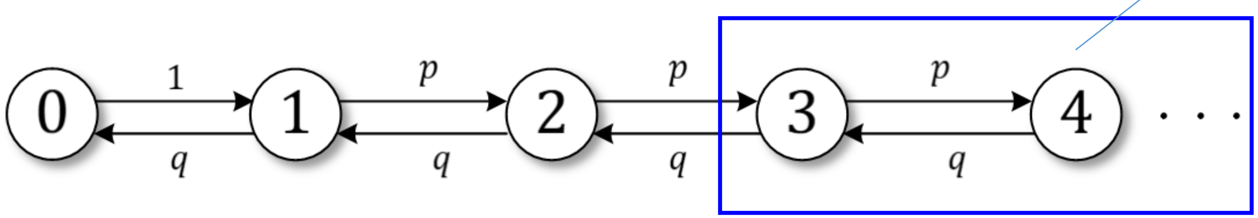
$X_n \geq 1$일 때, $X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1, & \text{확률 } p \\ X_n - 1, & \text{확률 } q \equiv 1 - p \end{cases}$

$X_n = 0$ 일 때, $X_{n+1} = 1$

현재 상태 X_n이 0이면, 무조건 다음 단계 X_{n+1}은 1

현재 상태 X_n이 1이상일 경우, 다음 단계 X_{n+1}은
현재 상태 X_n에 +1하거나, -1할 수 있음
이때, $X_n + 1$일 확률은 P / $X_n - 1$일 확률은 q

$$\boldsymbol{X_4 = \begin{cases} X_3 + 1, & p \\ X_3 - 1, & q \end{cases}}$$

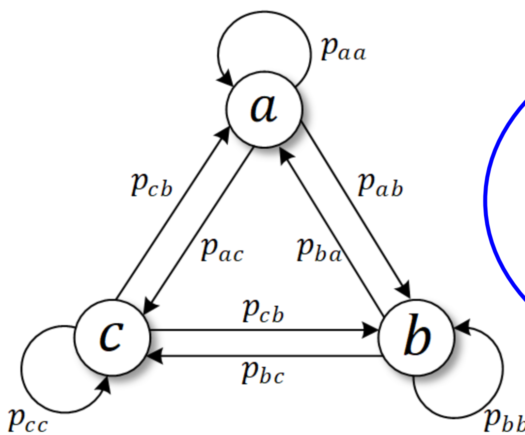


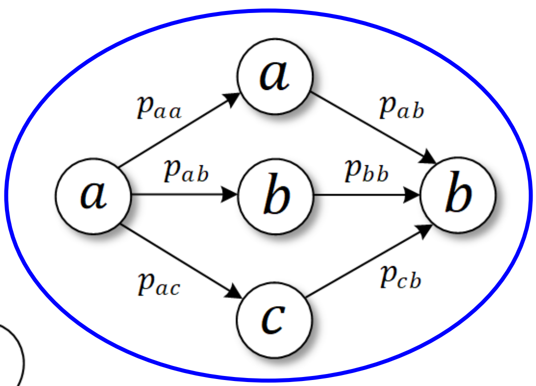
해당 마코프 체인 다이어그램은 상태공간 $0,1,2,\ldots$를 증가 또는 감소하는 방향으로 보행하므로, 랜덤보행(Random Walks)이다.

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 다단계 전이확률
    - 현재 상태 i에서 n 단계 이후 다음 상태 j로 변화할 확률
    - $p_{ij}^{(n)}$ $(0 \le p_{ij} \le 1)$

      e.g., 1단계 전이확률: $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$





  - 2단계 전이확률의 일반화
    - $p_{ij}^{(2)} \equiv P(X_{n+2} = j \mid X_n = i)$
      $= \sum_{k \in E} P(X_{n+2} = j \mid X_{n+1} = k,\ X_n = i)\, P(X_{n+1} = k \mid X_n = i)$
      $= \sum_{k \in E} P(X_{n+2} = j \mid X_{n+1} = k)\, P(X_{n+1} = k \mid X_n = i)$
      $= \sum_{k \in E} p_{kj} p_{ik} = \sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj}$

  - 2단계 전이확률 행렬 표현: $P^{(2)} = P \times P = P^2$
  - 다단계 전이확률 행렬 일반화: $P^{(m)} = P^m,\ m = 1, 2, \cdots$

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 다단계 전이확률
    - 현재 상태 i에서 n 단계 이후 다음 상태 j로 변화할 확률
    - $p_{ij}^{(n)}$ $(0 \leq p_{ij} \leq 1)$ 2단계 전이확률: $\boldsymbol{p_{ij}^{(2)}} = \sum_{k \in E} \boldsymbol{p_{ik} p_{kj}}$
    - 2단계 전이확률 행렬 표현: $P^{(2)} = P \times P = P^2$
      - $P_{ij}^{(2)} = P(X_{n+1} = k \mid X_n = i) P(X_{n+2} = j \mid X_{n+1} = k) = P_{ik} P_{kj}$

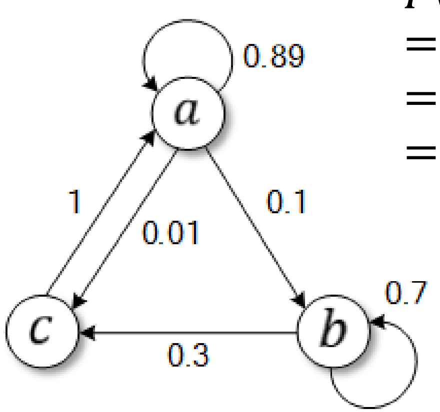
$$\sum_{k \in E} p_{ik} = P_{ik} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0k} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ik} \end{bmatrix} \qquad \sum_{k \in E} p_{kj} = P_{kj} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0j} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k0} & p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kj} \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj} = P_{ik} \cdot P_{kj} = (P \cdot P)_{ij} =$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p_{00}p_{00} + p_{01}p_{10} + \cdots + p_{0k}p_{k0}} & \boldsymbol{p_{00}p_{01} + p_{01}p_{11} + \cdots + p_{0k}p_{k1}} & \cdots & \cdots & \ldots + \boldsymbol{p_{0k}p_{kj}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{p_{i0}p_{k0} + p_{i1}p_{k0} + \cdots + p_{ik}p_{k0}} & \boldsymbol{p_{i0}p_{k1} + p_{i1}p_{k1} + \cdots + p_{ik}p_{k1}} & \cdots & \cdots & \ldots + \boldsymbol{p_{ik}p_{kj}} \end{bmatrix} = P_{ij}^{(2)}$$

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 다단계 전이확률
    - 현재 상태 i에서 n 단계 이후 다음 상태 j로 변화할 확률
    - $p_{ij}^{(n)}$ $(0 \le p_{ij} \le 1)$
    - 2단계 전이확률 예시: 상태 a에서 2단계 후 상태 b일 확률
      - 2단계 전이확률: $P(X_{n+1} = b \mid X_{n-1} = a)$
      - 1단계 전이확률: $P(X_{n+1} = b \mid X_n = a) = 0.1$
      - 1단계 전이확률을 이용하여 2단계 전이확률을 구함
        - $P(X_{n+1} = b \mid X_{n-1} = a)$
$= \sum_{j=a,b,c} P\,(X_{n+1} = b \mid X_n = j,\ X_{n-1} = a) P(X_n = j \mid X_{n-1} = a)$
$= \sum_{j=a,b,c} P\,(X_{n+1} = b \mid X_n = j) P(X_n = j \mid X_{n-1} = a)$
$= \sum_{j=a,b,c} p_{jb} p_{aj} = 0.89 \times 0.1 + 0.1 \times 0.7 + 0.01 \times 0 = 0.159$



$$P = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

마코프 체인

- 전이확률(Transition Probability)
  - 다단계 전이확률
    - 체프만-콜모고로프 방정식(Chapman-Kolmogorov's Equation)
      - 마코프체인에서 다단계 전이확률을 계산하는데 사용되는 방정식
      - n 단계 전이확률을 a 단계 전이확률과 b 단계 전이확률의 곱으로 표현함
        - $p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(a)} \cdot p_{kj}^{(b)}$ **2단계 전이확률: $\boldsymbol{p_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in E} p_{ik} p_{kj}}$**
          - $p_{ij}^{(k)}$: 상태 i에서 상태 j로 k 단계 이후에 도달할 확률
          - $p_{is}^{(m)}$: 상태 i에서 중간 상태 s로 m 단계 이후에 도달할 확률
          - $p_{sj}^{(n)}$: 중간 상태 s에서 상태 j로 n 단계 이후에 도달할 확률
        - $P^{(a+b)} = P^{a+b} = P^a \times P^b = P^{(a)} \times P^{(b)}$

마코프 체인

- 상태확률(State Probability)
  - n 단계에서 특정 상태 j에 있을 확률
  - $P(X_n = j)$
  - 표기법
    - 2단계에서의 상태확률
      - $P(X_2 = j)$
    - 1단계 및 2단계에서의 상태확률
      - $P(X_1 = i_1,\ X_2 = i_2)$
    - 1,000 단계에서의 상태확률
      - $P(X_{1000} = i)$

마코프 체인

- 상태확률(State Probability)
  - n 단계에서 특정 상태 j에 있을 확률
  - $P(X_n = j)$

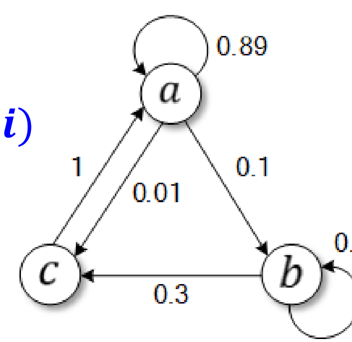
* 특정 시점 이후의 어떤 상태에 있을지 예측하기 위해 초기 상태확률이 필요함

  - 1단계 상태확률 $P(X_1 = j)$
    - 상태공간 $E = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$으로 가정
    - 초기 상태확률 정의: $\alpha_j \equiv P(X_0 = j),\ \ j \in E$
    - 초기 상태확률 벡터: $\tilde{\alpha} = [\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2, \cdots \alpha_n]$
    - $P(X_1 = j) = \sum_{i \in E} P(X_1 = j \mid X_0 = i)\, P(X_0 = i)$ $= \sum_{i \in E} p_{ij} \alpha_i\ ,\ j \in E$

초기 상태확률 벡터 예시

- 상태공간 $S = \{a\ b, c\}$
- 초기 상태확률 α_j
  - α_a: 초기에 상태 a에 있을 확률 = 50%
  - α_b: 초기에 상태 b에 있을 확률 = 30%
  - α_c: 초기에 상태 c에 있을 확률 = 20%
- 초기 상태확률 벡터 $\tilde{a}$
  - $\tilde{a} = [0.5,\ 0.3,\ 0.2]$

$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \boldsymbol{P(X_1 = a) = \textstyle\sum_{i \in E} P(X_1 = a \mid X_0 = i) P(X_0 = i)} \\ \boldsymbol{= p_{aa} \times \alpha_a + p_{ba} \times \alpha_b + p_{ca} \times \alpha_c} \\ \boldsymbol{= 0.89 \times 0.5 + 0 \times 0.3 + 1 \times 0.2 = 0.645} \end{aligned}$$

  - 벡터 표현
    - $\tilde{p}^{(1)} = [P(X_1 = 0),\ P(X_1 = 1),\ P(X_2 = 2), \cdots] = \tilde{\alpha} P$

마코프 체인

- 상태확률(State Probability)
  - n 단계에서 특정 상태 j에 있을 확률
  - $P(X_n = j)$

벡터

- 크기와 방향을 가짐
- 행벡터: $\tilde{v} = [v_1,\ v_2, \dots, v_n]$ $(1 \times n$ 크기$)$
- 열벡터: $\tilde{v} = [v_1,\ v_2, \dots, v_n]$ $(n \times 1$ 크기$)$

- 2단계 상태확률 $P(X_2 = j)$
  - $P(X_2 = j) = \sum_{k \in E} P(X_2 = j \mid X_1 = k) P(X_1 = k)$
    $= \sum_{k \in E} P(X_1 = k) \times p_{kj}$ → X_1값을 알고 있는 경우
  - $P(X_2 = j) = \sum_{i \in E} P(X_2 = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i)$
    $= \sum_{i \in E} P(X_0 = i) \times p_{kj}^{(2)} = \sum_{i \in E} \alpha_i \times p_{kj}^{(2)}$ → $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_i] \begin{bmatrix} p_{00}^{(2)} & p_{01}^{(2)} & p_{02}^{(2)} & \cdots & p_{0j}^{(2)} \\ p_{10}^{(2)} & p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} & \cdots & p_{1j}^{(2)} \\ p_{20}^{(2)} & p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & \cdots & p_{2j}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k0}^{(2)} & p_{k1}^{(2)} & p_{k2}^{(2)} & \cdots & p_{kj}^{(2)} \end{bmatrix}$
  - 벡터 표현
    - $\tilde{p}^{(2)} = \tilde{p}^{(1)} P = \tilde{\alpha} P^2$ → $\tilde{p}^{(m)} = \tilde{p}^{(m-1)} P = \tilde{\alpha} P^m$

1단계 상태확률 x 전이확률 $\tilde{p}^{(1)} = \tilde{\alpha} P$

마코프 체인

- 상태확률(State Probability)
  - 예제 3.6

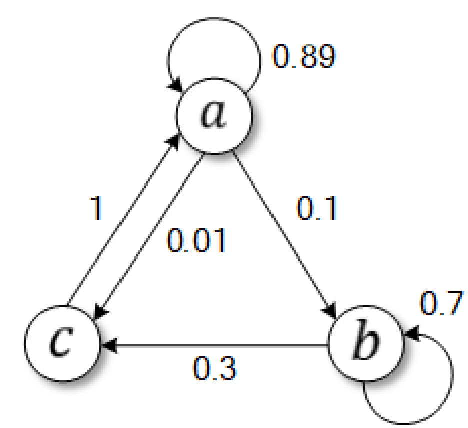
- 단계 n에서 정상 작동 $= X_n = a$
- 단계 n에서 일부 고장 $= X_n = b$
- 단계 n에서 완전 고장 $= X_n = c$

예제 3.1의 마코프 체인의 전이확률 행렬 $P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 를 고려하여 기계장치가 초기에 정상 상태일 확률은 0.4, 일부 고장 상태일 확률은 0.5, 고장난 상태일 확률은 0.1일 때,

1) 처음 설치할 당시에 기계장치가 어떤 상태인지 모르고 하루 후에 고장이 나 있을 확률은?
2) 이틀 후 기계장치의 상태가 정상일 확률은?
3) 처음 설치할 당시에 기계장치가 어떤 상태인지 모르고 하루 후에 고장나 있다면, 초기에 일부 고장 상태였을 확률은?

$$P^{(2)} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} 0.8021 & 0.1590 & 0.0389 \\ 0.3 & 0.49 & 0.21 \\ 0.89 & 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}$$

1) $P(X_1 = c) = \alpha_a \times p_{ac} + \alpha_b \times p_{bc} + \alpha_c \times p_{ac}$
$= 0.4 \times 0.01 + 0.5 \times 0.3 + 0.1 \times 0 = 0.154$



2) $P(X_2 = a) = \alpha_a \times p_{aa}^{(2)} + \alpha_b \times p_{ba}^{(2)} + \alpha_c \times p_{ca}^{(2)} = 0.4 \times 0.8021 + 0.5 \times 0.3 + 0.1 \times 0.89 = 0.5598$

마코프 체인

- 상태확률(State Probability)
  - 예제 3.6

- 단계 n에서 정상 작동 $= X_n = a$
- 단계 n에서 일부 고장 $= X_n = b$
- 단계 n에서 완전 고장 $= X_n = c$

예제 3.1의 마코프 체인의 전이확률 행렬 $P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$를 고려하여 기계장치가
초기에 정상 상태일 확률은 0.4, 일부 고장 상태일 확률은 0.5, 고장난 상태일 확률은 0.1일 때,

1) 처음 설치할 당시에 기계장치가 어떤 상태인지 모르고 하루 후에 고장이 나 있을 확률은?
2) 이틀 후 기계장치의 상태가 정상일 확률은?
3) 처음 설치할 당시에 기계장치가 어떤 상태인지 모르고 하루 후에 고장나 있다면, 초기에 일부 고장 상태였을 확률은?

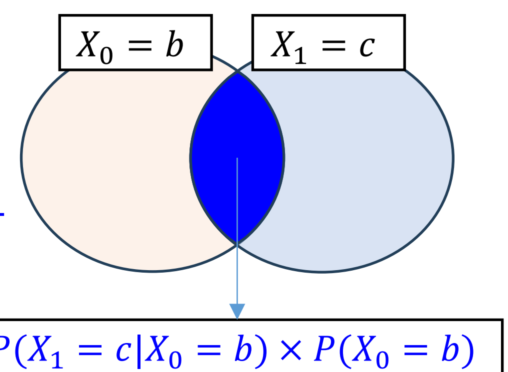
3) $P(X_0 = b|X_1 = c) = \frac{P(X_0=b \cap X_1=c)}{P(X_1=c)} = \frac{P(X_1=c|X_0=b)\times P(X_0=b)}{P(X_1=c)} = \frac{p_{bc}\times a_b}{0.154} = \frac{0.15}{0.154} = 0.974$

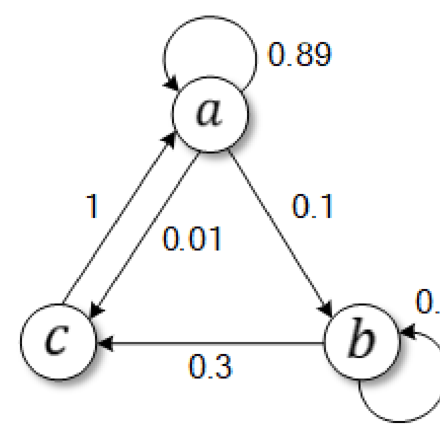
$\sum_{i\in E} p_{ij}\alpha_i\,,\ j \in E$

조건부 확률

- $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

독립사상의 교집합
$P(A \cap B) = AB$





마코프 체인

- 기대비용(Expected Cost)
  - 상태 i에서 다음 상태 j로 전이하는데 발생하는 비용
  - $C(j)$
  - 초기 상태가 i인 경우, 1단계 기대비용
    - $E[C(X_1) \mid X_0 = i]$

$$= \sum_{j \in E} C(j)\, P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{j \in E} C(j) p_{ij}$$

$$= \left(\tilde{C} P\right)_i$$

$$= \begin{bmatrix} p_{i0} & p_{i1} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i0} \\ c_{i1} \\ \vdots \\ c_{ij} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0j} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} \end{bmatrix}$$

마코프 체인

- 기대비용(Expected Cost)
  - 상태 i에서 다음 상태 j로 전이하는데 발생하는 비용
  - $C(j)$
  - 초기 상태가 i인 경우, m단계 기대비용
    - $E[C(X_m) \mid X_0 = i] = \left(\tilde{C}P^{(m)}\right)_i$

- 초기 상태가 i인 경우, 1단계 기대비용
  - $E[C(X_1) \mid X_0 = i]$
    $= \sum_{j \in E} C(j)\, P(X_1 = j \mid X_0 = i)$
    $= \sum_{j \in E} C(j) p_{ij}$
    $= \left(\tilde{C}P\right)_i$

  - 초기 상태가 주어지지 않은 경우, m단계 기대비용
    - $E[C(X_m)] = \sum_{j \in E} C(j)\, P(X_m = j)$
    - $= \sum_{j \in E} C(j) \sum_{i \in E} p_{ij}^{(m)} \alpha_i = \tilde{C} \cdot \tilde{\alpha} P^{(m)}$

초기상태 확률벡터 $\tilde{\alpha}$ 가 필요함

  - m단계까지 발생한 모든 기대비용의 합
    - $\tilde{\alpha}(I + P^{(1)} + P^{(2)} + \cdots + P^{(m)})\tilde{C}$

단위행렬
(0단계는 전이가 없기에 사용)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

마코프 체인

- 기대비용(Expected Cost)
  - 예제 3.7

- 단계 n에서 정상 작동 $= X_n = a$
- 단계 n에서 일부 고장 $= X_n = b$
- 단계 n에서 완전 고장 $= X_n = c$

예제 3.1의 마코프 체인에서 기계장치의 상태가 a, b, c일 때, 각각 -20, 10, 100의 비용(양수는 손해/음수는 이익)이 발생할 때,
1) 초기에 기계장치의 상태가 정상인 경우, 2일 후의 기대비용은?
2) 초기의 기계장치의 상태를 모를 경우, 2일까지의 평균 기대비용은? (단, $P^{(0)} = P^0 = I$)

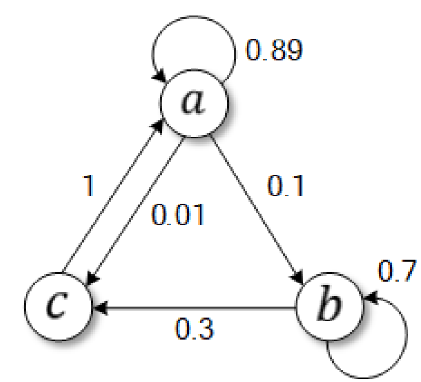
1) $E[C(X_2)|X_0 = a] = \left(P^{(2)}\tilde{C}\right)_{(a)}$이고, $\tilde{C} = [-20, 10, 100]$이므로,

$$E[C(X_2)|X_0 = a] = (0.8021, 0.159, 0.0389)\begin{bmatrix}-20\\10\\100\end{bmatrix}$$
$$= 0.8021 \times (-20) + 0.159 \times 10 + 0.0389 \times 100$$
$$= -16.042 + 1.59 + 3.89 = -10.562$$

$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

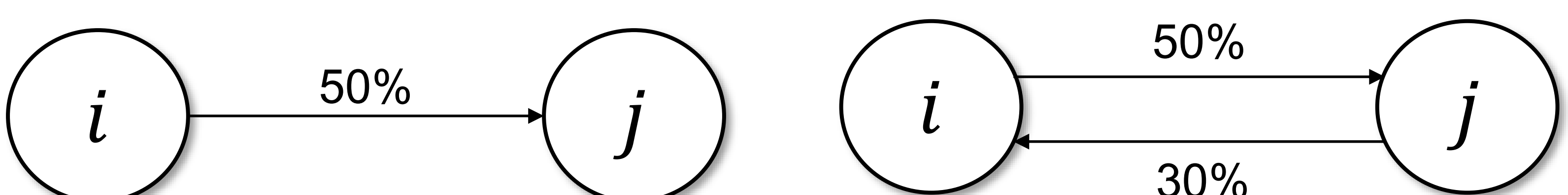
$$P^{(2)} = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\begin{bmatrix} 0.8021 & 0.1590 & 0.0389 \\ 0.3 & 0.49 & 0.21 \\ 0.89 & 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}$$

2) $$\frac{E[C(X_0)+C(X_1)+C(X_2)]}{3} = \frac{\tilde{a}P^{(0)}\tilde{C}+\tilde{a}P^{(1)}\tilde{C}+\tilde{a}P^{(2)}\tilde{C}}{3}$$
$$= \frac{\tilde{a}\left(I+P^{(1)}+P^{(2)}\right)\tilde{C}}{3},\ \tilde{a} = [0.4, 0.5, 0.1]$$인 경우, 7.11



마코프 체인

- 상태의 분류(Classification of States)
  - 도달 가능(Reachable) 상태
    - 단계에 상관 없이 상태 i에서 상태 j로 도달 가능한 상태
    - $i \rightarrow j$: i는 j로부터 도달 가능 (즉, $p_{ij}^{(k)} > 0$인 k가 존재)
  - 왕래(Communicate) 상태
    - 상태 i에서 상태 j로 도달 가능($i \rightarrow j$)하고, 상태 i에서 상태 j로 도달 가능($j \rightarrow i$)한 상태
    - $i \leftrightarrow j$

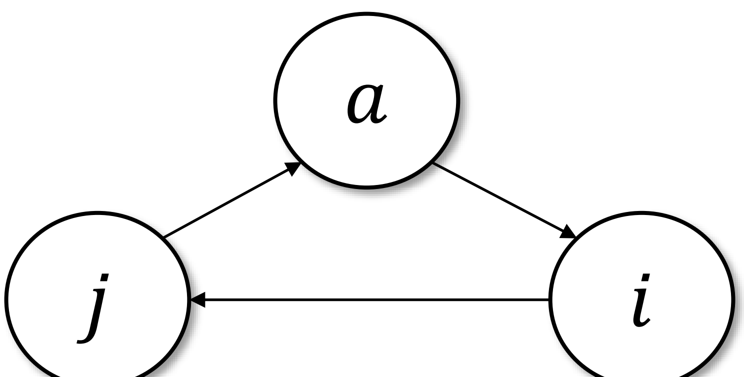


<도달 가능 상태 예시> <왕래 상태 예시>

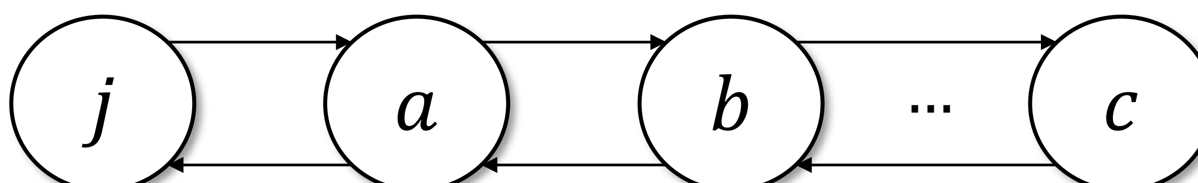
마코프 체인

- 상태의 분류(Classification of States)
  - 재귀(Recurrent) 상태
    - 단계에 상관 없이 상태 j를 출발하여 다시 상태 j로 돌아오는 상태 (즉, $p_{jj}^{(k)} > 0$인 k가 존재)
    - 양의 재귀(Null Recurrent) 상태
      - N_j의 기대 값 $E(N_j)$이 유한 값인 경우: $E(N_j) < \infty$
    - 영의 재귀 상태(Non-Null Recurrent)
      - N_j의 기대 값 $E(N_j)$이 무한 값인 경우: $E(N_j) = \infty$

* N_j: 재귀하는데 필요한 단계수



<양의 재귀 상태 예시>

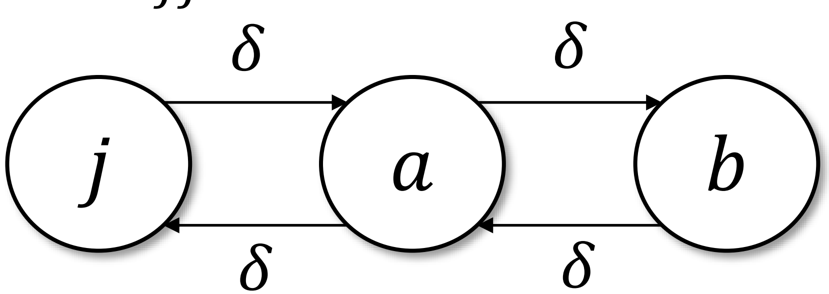


<영의 재귀 상태 예시>

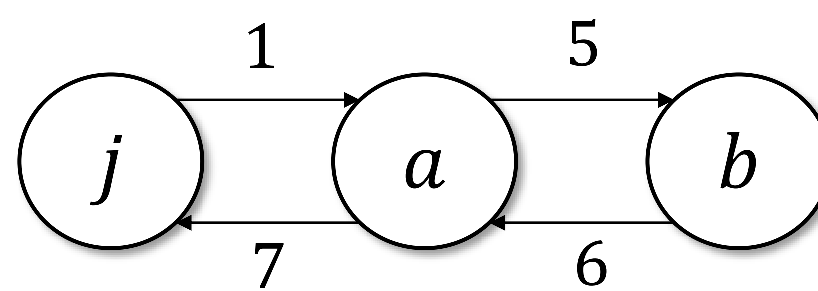
마코프 체인

*δ: 델타

- 상태의 분류(Classification of States)
  - 주기적(Periodic) 상태
    - 상태 j를 떠나 다시 상태 j로 돌아오는 데 걸리는 단계수가 $\delta, 2\delta, 3\delta, \cdots$ ($\delta \geq 2$인 자연수)인 상태
    - $p_{jj}^{(k)} > 0$ (단, $k = n\delta$ $(n = 1,2,3, \ldots)$)
  - 비주기적(Aperiodic) 상태
    - 상태 j를 떠나 다시 상태 j로 돌아오는 데 걸리는 단계수에 주기가 없는 상태
    - $p_{jj}^{(k)} > 0$ (단, $k = n\delta$ $(\delta = 1)$)



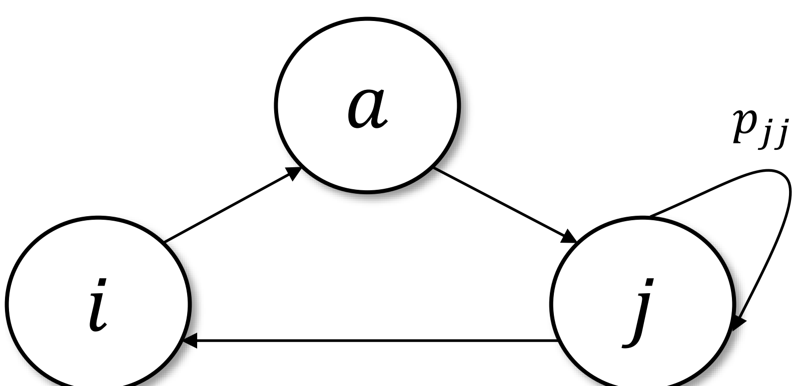
<주기적 상태 예시>



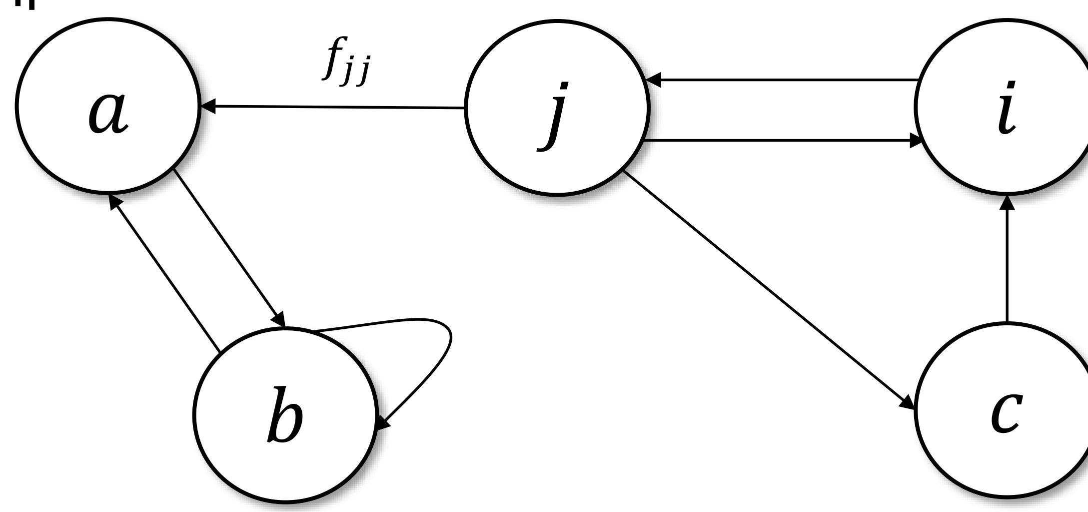
<비주기적 상태 예시>

마코프 체인

- 상태의 분류(Classification of States)
  - 흡수(Absorbing) 상태
    - 상태 j를 떠나 다시 상태 j에 머무는 상태
    - $p_{jj} = 1$
  - 일시적(Transient) 상태
    - 상태 j를 출발하여 상태 j로 다시 돌아오지 못할 확률 f_{jj}가 0보다 큰 상태
    - $f_{jj} > 0$



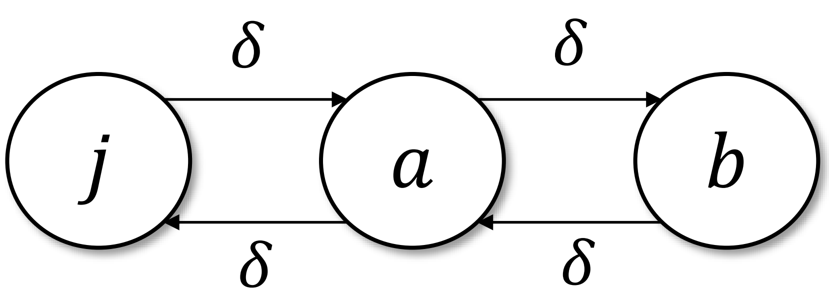
<흡수 상태 예시>



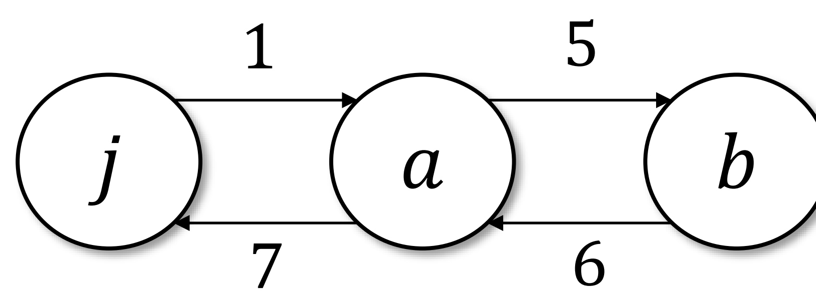
<일시적 상태 예시>

마코프 체인

- 상태의 분류(Classification of States)
  - 극한 확률
    - 상태 j가 주기적 상태이면 $P(X_n = j)$값이 n에 따라 진동하므로 극한확률 $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$은 존재하지 않음
    - 상태 j가 영의 재귀 상태이면 $j \rightarrow j$임에 따라, 확률 1값을 가지지만, 그에 걸리는 평균 단계수가 ∞이므로 $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0$



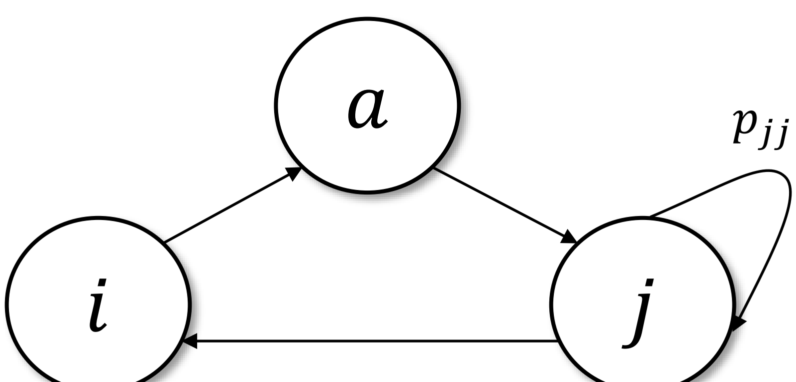
<주기적 상태 예시>



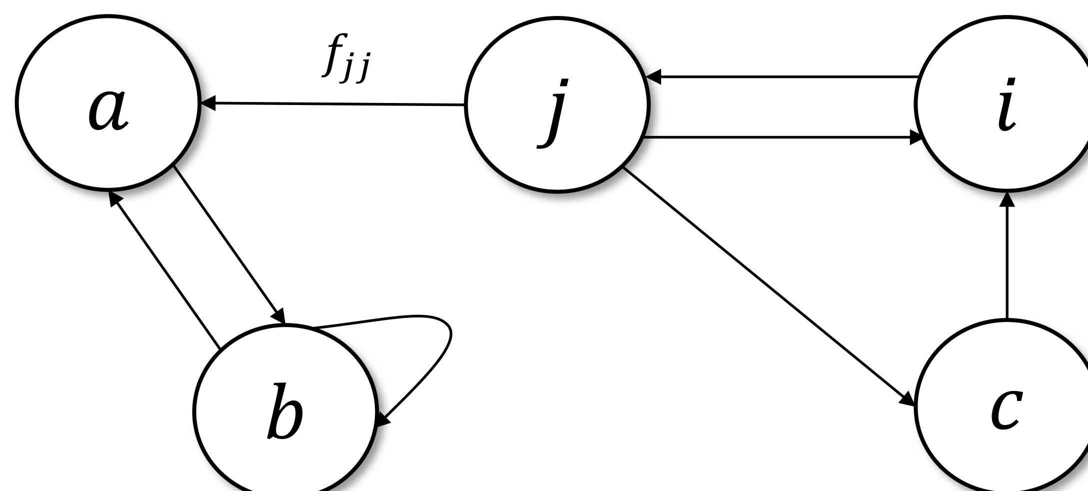
<비주기적 상태 예시>

마코프 체인

- 상태의 분류(Classification of States)
  - 극한 확률
    - 상태 j가 흡수 상태이면, $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = j) = 1$
    - 상태 j가 일시적 상태이면, 출발 상태가 어디인지 상관 없이 $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = 0$



<흡수 상태 예시>



<일시적 상태 예시>

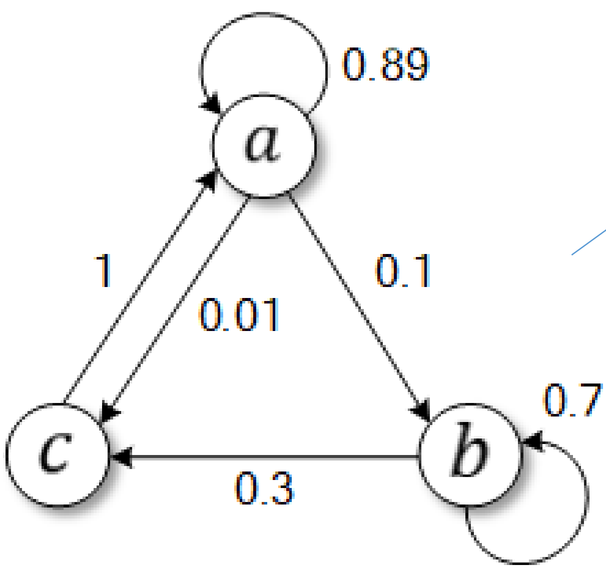
기약 마코프 체인

정의

모든 상태들이 비주기적이면서 서로 왕래하고, 상태공간 E가 <u>닫힌집합으로 내부에 다른 닫힌집합을 가지고 있지 않은</u> 확률과정 (즉, 상태공간 E 전체가 닫힌집합인 마코프 체인)

기약(irreducible)

- 닫힌집합(Closed Set)
  - 서로 왕래하는 상태들로 만 구성된 상태집합



<닫힌집합 예시>

에르고딕(Ergodic)한 상태
- 비주기적
- 양의 재귀
  - 상태 a, 상태 b, 상태 c 모두 양의 재귀

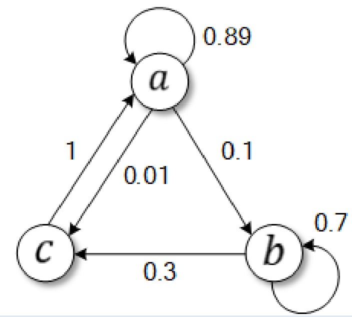
양의 재귀(Null Recurrent) 상태
N_j의 기대 값 $E(N_j)$이 유한 값인 경우: $E(N_j) < \infty$

영의 재귀 상태(Non-Null Recurrent)
N_j의 기대 값 $E(N_j)$이 무한 값인 경우: $E(N_j) = \infty$

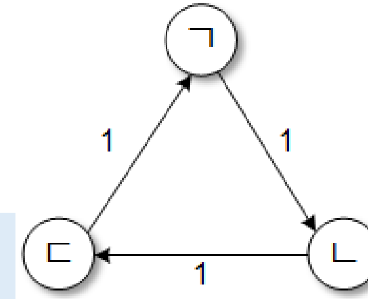
기약 마코프 체인

- 닫힌집합(Closed Set)
  - 예제 3.9

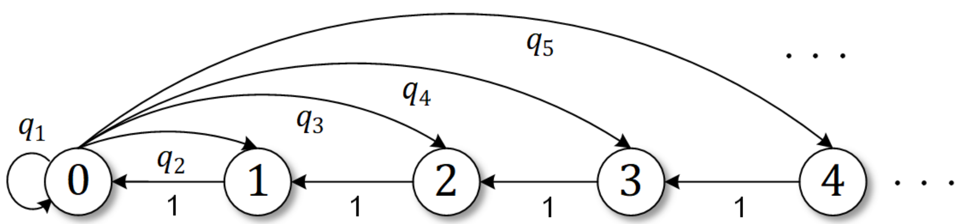
예제 3.1 ~ 3.5의 상태들에 대해 분류하라.



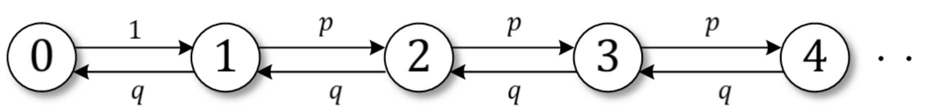
<예제 3.1>



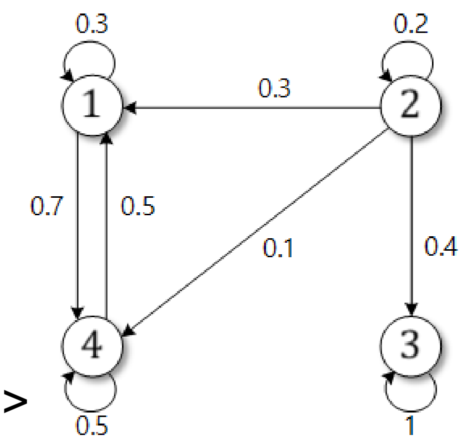
<예제 3.2>



<예제 3.4>



<예제 3.5>



<예제 3.3>

예제 3.1: 서로 왕래하는 닫힌집합 상태들로 만 구성된 에르고딕한 상태이다.

예제 3.2: 상태집합 {ㄱ, ㄴ, ㄷ}은 닫힌집합이며, 모두 주기가 3인 주기적 상태이다.
또한, 재귀 중에서도 양의 재귀 상태이다.

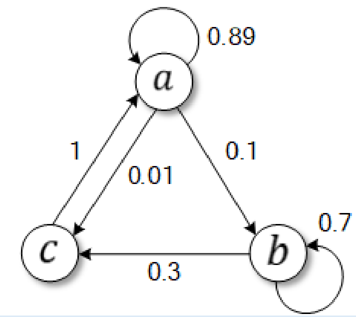
예제 3.3: 상태집합 $\{1, 4\}$은 양의 재귀 상태이다. 상태 3은 흡수 상태이고,
상태 2는일시적 상태이다.

기약 마코프 체인

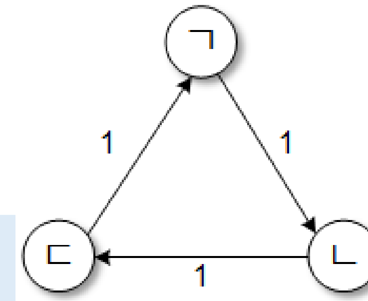
• 닫힌집합(Closed Set)

• 예제 3.9

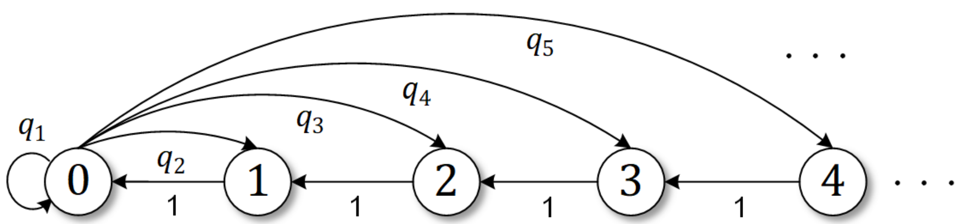
예제 3.1 ~ 3.5의 상태들에 대해 분류하라.



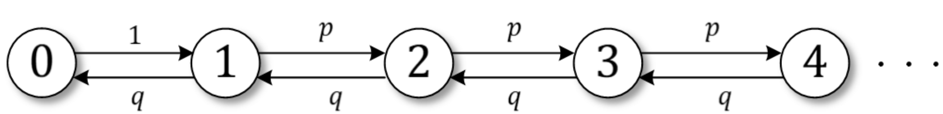
<예제 3.1>



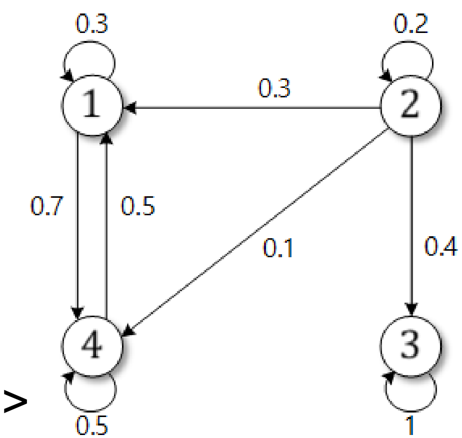
<예제 3.2>



<예제 3.4>



<예제 3.5>



<예제 3.3>

예제 3.4: 기약 마코프 체인이며, $M = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots < \infty$이면 모든 상태가 양의 재귀이지만, $M = \infty$이면 모든 상태가 영의 재귀이다.

양의 재귀(Null Recurrent) 상태
N_j의 기대 값 $E(N_j)$이 유한 값인 경우: $E(N_j) < \infty$

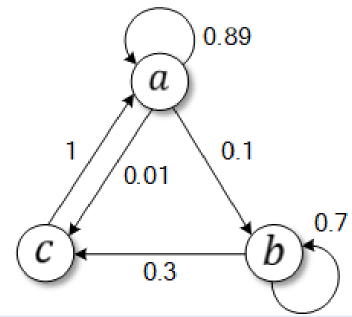
영의 재귀 상태(Non-Null Recurrent)
N_j의 기대 값 $E(N_j)$이 무한 값인 경우: $E(N_j) = \infty$

m단계까지 발생한 모든 기대비용의 합: $\tilde{\alpha}(I + P^{(1)} + P^{(2)} + \cdots + P^{(m)})\tilde{C}$

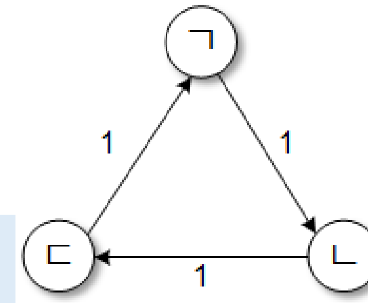
기약 마코프 체인

- 닫힌집합(Closed Set)
  - 예제 3.9

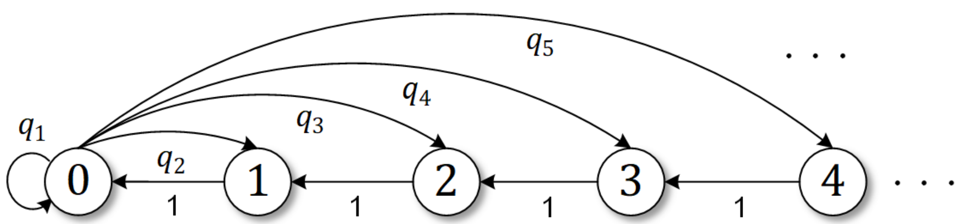
예제 3.1 ~ 3.5의 상태들에 대해 분류하라.



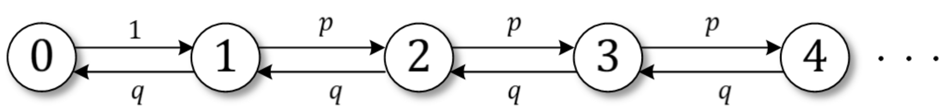
<예제 3.1>



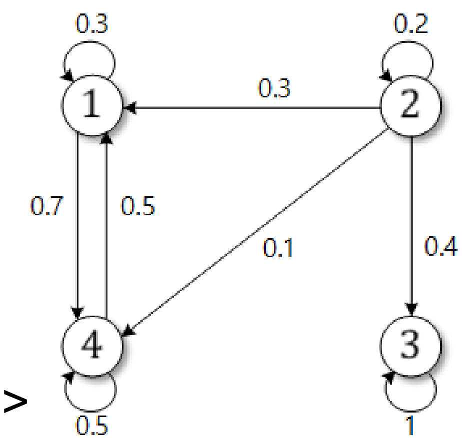
<예제 3.2>



<예제 3.4>



<예제 3.5>



<예제 3.3>

예제 3.5: 기약 마코프 체인이며, $p > q$이면 모든 상태가 양의 재귀, $p = q$이면 모든 상태가 영의 재귀, $p < q$이면 일시적 상태이다.

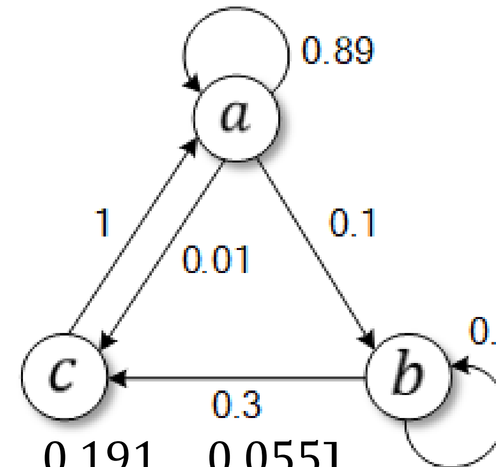
$p > q$인 경우, 상태가 무한히 오른쪽으로 전이할 확률 p가 더 높지만, 반대인 확률 q도 유한 함으로 언젠가는 재귀할 수 있음

$p = q$인 경우, 상태가 오른쪽과 왼쪽으로 전이할 확률 p, q가 동일하여 언젠가는 재귀하지만, 특정상태로 다시 돌아오는 시간이 무한함

$p < q$인 경우, 상태가 무한히 왼쪽으로 전이할 확률 q가 더 높아, 초기 상태 0으로 돌아가 일시적인 상태를 가질 수 있음

기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률
  - 초기 상태의 영향이 없어지고 n이 커져도 $p_{ij}^{(n)}$의 값의 변화가 없는 경우의 확률
    - e.g., 1단계 전이확률 행렬 P의 거듭제곱



$$P = \begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P^2 = \begin{bmatrix} 0.802 & 0.159 & 0.039 \\ 0.3 & 0.49 & 0.21 \\ 0.89 & 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}, P^3 = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.191 & 0.055 \\ 0.477 & 0.373 & 0.150 \\ 0.802 & 0.159 & 0.038 \end{bmatrix}, \dots$$

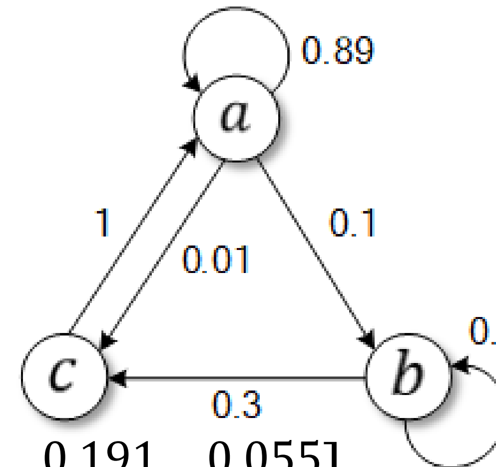
$$P^8 = \begin{bmatrix} 0.696 & 0.229 & 0.075 \\ 0.682 & 0.238 & 0.080 \\ 0.698 & 0.227 & 0.074 \end{bmatrix}, \dots, P^{12} = \begin{bmatrix} 0.693 & 0.231 & 0.076 \\ 0.692 & 0.232 & 0.077 \\ 0.693 & 0.231 & 0.076 \end{bmatrix}, \dots, P^{17} = \begin{bmatrix} 0.693 & 0.231 & 0.076 \\ 0.693 & 0.232 & 0.076 \\ 0.693 & 0.231 & 0.076 \end{bmatrix}$$

$$P^{18} = \dots$$

- 거듭제곱을 할 수록 3개의 행이 같아 짐
- 단계가 늘어날 수록 초기 출발 상태의 영향이 줄어듬 ($n \rightarrow \infty$이면 영향이 없어짐)

기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률
  - 초기 상태의 영향이 없어지고 n이 커져도 $p_{ij}^{(n)}$의 값의 변화가 없는 경우의 확률
    - e.g., 1단계 전이확률 행렬 P의 거듭제곱



$$P = \begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P^2 = \begin{bmatrix} 0.802 & 0.159 & 0.039 \\ 0.3 & 0.49 & 0.21 \\ 0.89 & 0.1 & 0.01 \end{bmatrix},\ P^3 = \begin{bmatrix} 0.752 & 0.191 & 0.055 \\ 0.477 & 0.373 & 0.150 \\ 0.802 & 0.159 & 0.038 \end{bmatrix}, \dots$$

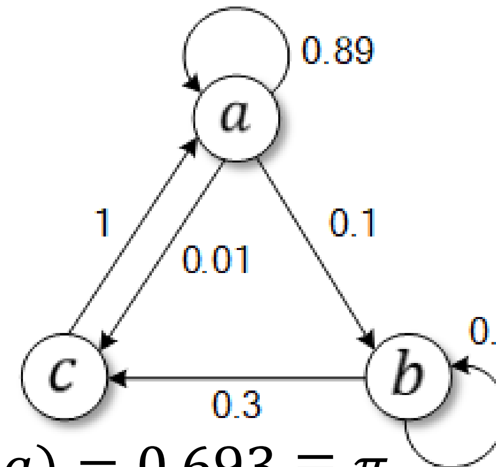
$$P^8 = \begin{bmatrix} 0.696 & 0.229 & 0.075 \\ 0.682 & 0.238 & 0.080 \\ 0.698 & 0.227 & 0.074 \end{bmatrix}, \dots, P^{12} = \begin{bmatrix} 0.693 & 0.231 & 0.076 \\ 0.692 & 0.232 & 0.077 \\ 0.693 & 0.231 & 0.076 \end{bmatrix}, \dots, P^{17} = \begin{bmatrix} 0.693 & 0.231 & 0.076 \\ 0.693 & 0.232 & 0.076 \\ 0.693 & 0.231 & 0.076 \end{bmatrix}$$

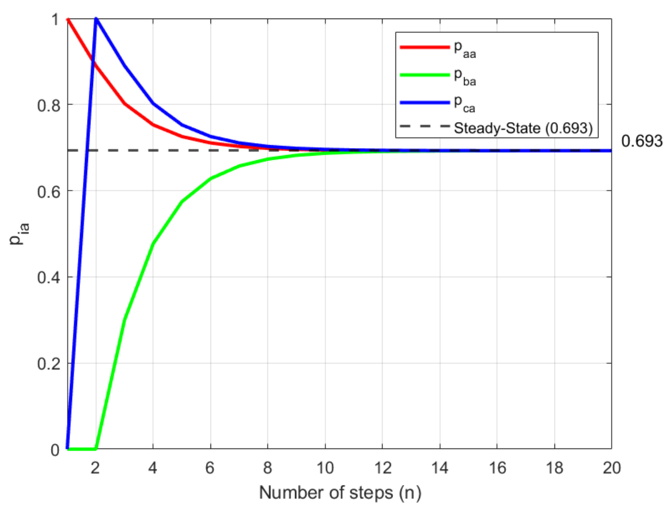
$P^{18} = \ \dots$ **극한확률값 $\pi_j (j = a, b, c)$는 안정상태확률**

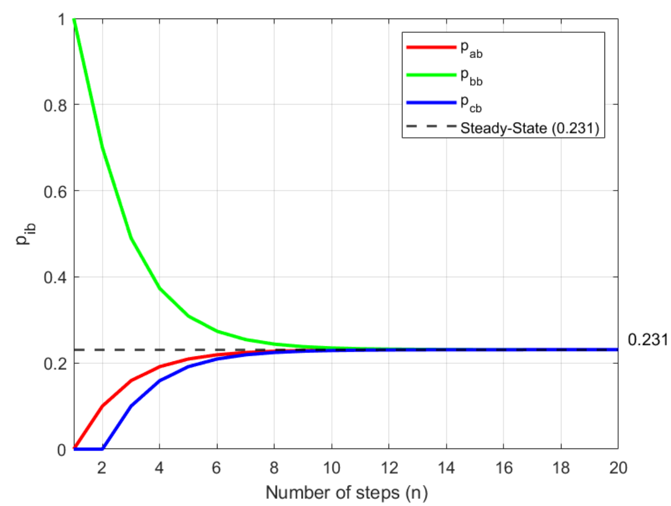
- $\lim_{n\to\infty} p_{aa}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ba}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ca}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = a) = 0.693 \equiv \pi_a$
- $\lim_{n\to\infty} p_{ab}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{bb}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{cb}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = b) = 0.231 \equiv \pi_b$
- $\lim_{n\to\infty} p_{ac}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{bc}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{cc}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = c) = 0.076 \equiv \pi_c$

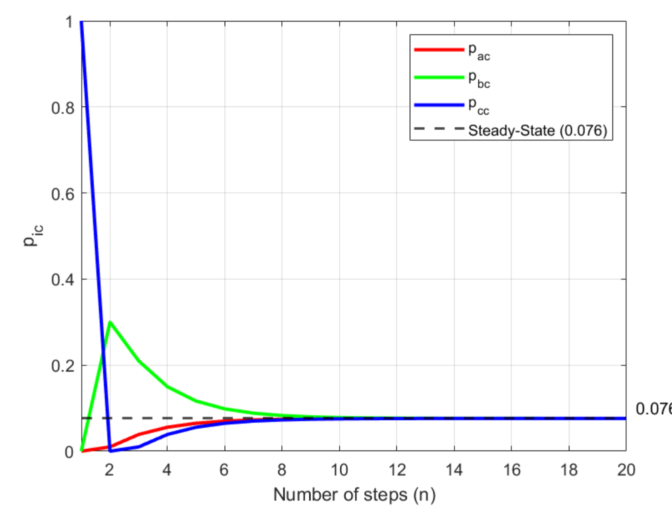
기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률
  - 초기 상태의 영향이 없어지고 n이 커져도 $p_{ij}^{(n)}$의 값의 변화가 없는 경우의 확률
    - e.g., 1단계 전이확률 행렬 P의 거듭제곱
      - $\lim_{n\to\infty} p_{aa}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ba}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ca}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = a) = 0.693 \equiv \pi_a$
      - $\lim_{n\to\infty} p_{ab}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{bb}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{cb}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = b) = 0.231 \equiv \pi_b$
      - $\lim_{n\to\infty} p_{ac}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{bc}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{cc}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = c) = 0.076 \equiv \pi_c$









기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률

정리

상태공간 $E = \{X_n,\ n = 0,1,2,\ldots\}$의 1단계 전이확률 행렬 P가 기약 마코프 체인이고, $\tilde{\pi} = [\pi_0, \pi_1,\ \pi_2,\ \ldots]$를 라고 할 때, 다음 연립방정식의 해 π_j는 유일하며, 양수인 안정산태 확률 $\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$이다.

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}P, \qquad \sum_{j\in E} \pi_j = 1$$

- 증명

다음 확률 이전 확률 다음 확률 이전 확률

- $P(X_{n+1} = j) = \sum_{i\in E} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)P(X_n = i) = \sum_{i\in E} p_{ij} P(X_n = i)$

양변에 극한
- $\lim_{n\to\infty} P(X_{n+1} = j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in E} p_{ij} P(X_n = i) = \sum_{i\in E} p_{ij} \lim_{n\to\infty} P(X_n = i)$

안정 상태 확률
- $\lim_{n\to\infty} P(X_{n+1} = j) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j$이므로, $\pi_j = \sum_{i\in E} p_{ij}\pi_i$ 이다.
- 따라서, $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}P$이며, π_j는 확률이므로, $\sum_{j\in E} \pi_j = 1$
- 모든 상태들이 양의 재귀이므로, $\pi_j > 0$

$\sum_{i\in E} p_{ij} = P$ $\quad \sum_{i\in E} \pi_i = \tilde{\pi}$

기약 마코프 체인

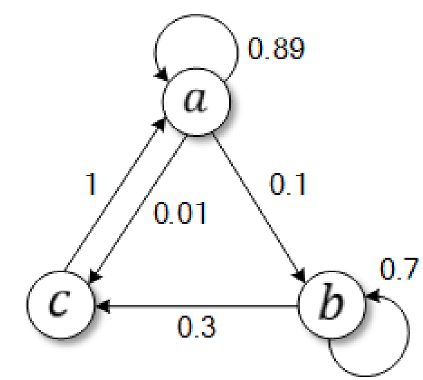
- 안정상태(Steady State)확률
  - 예제 3.10

- 단계 n에서 정상 작동 $= X_n = a$
- 단계 n에서 일부 고장 $= X_n = b$
- 단계 n에서 완전 고장 $= X_n = c$

예제 3.1의 마코프 체인이 에르고딕함을 보여라.

$$[\pi_a, \pi_b, \pi_c]\begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 이므로,

$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\pi_a = 0.89 \times \pi_a + 0 \times \pi_b + 1 \times \pi_c$$
$$\pi_b = 0.1 \times \pi_a + 0.7 \times \pi_b + 0 \times \pi_c$$
$$\pi_c = 0.01 \times \pi_a + 0.3 \times \pi_b + 0 \times \pi_c$$

$$\pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$$

$\sum_{j \in E} \pi_j = 1$

$$0.11\pi_a - 0\pi_b - \pi_c = 0$$
$$-0.1\pi_a + 0.3\pi_b - 0\pi_c = 0$$

좌변으로 이항

기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률
  - 예제 3.10

- 단계 n에서 정상 작동 $= X_n = a$
- 단계 n에서 일부 고장 $= X_n = b$
- 단계 n에서 완전 고장 $= X_n = c$

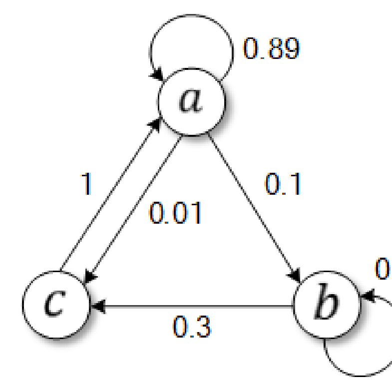
예제 3.1의 마코프 체인이 에르고딕함을 보여라.

$$0.11\pi_a - 0\pi_b - \pi_c = 0$$
$$-0.1\pi_a + 0.3\pi_b - 0\pi_c = 0$$
$$\pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0.11 & 0 & -1 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_a \\ \pi_b \\ \pi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi_c = 0.11\pi_a, \quad \pi_b = \frac{0.1\pi_a}{0.3} = \frac{\pi_a}{3}$$
$$\pi_a + \frac{\pi_a}{3} + 0.11\pi_a = 1, \quad 1.11\pi_a + \frac{\pi_a}{3} = 1, \quad \frac{4.33\pi_a}{3} = 1$$
$$\pi_a = \frac{3}{4.33} \approx 0.693$$

연립 방정식 계산



$\therefore \pi_a = 0.693, \pi_b = 0.231, \pi_c = 0.076$으로 P를 거듭제곱한 결과와 일치하여 에르고딕하다.

기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률
  - 예제 3.11

5개의 상태를 가지고 있는 마코프 체인의 1단계 전이확률 행렬이 다음과 같다.

$$P = \begin{array}{c} \boldsymbol{\pi_1} \\ \\ \\ \\ \boldsymbol{\pi_5} \end{array} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_1 \\ q_3 & q_4 & q_5 & q_1 & q_2 \\ q_4 & q_5 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_5 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}, \forall q_i > 0,\ \sum_{i=1}^{5} q_i = 1$$

이와 같은 행의 합 뿐만 아니라 열의 합도 1인 마코프 체인을 이중(Doubly) 마코프체인이라고 한다.

이때, 안전상태 확률이 $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \frac{1}{5}$임을 보여라.

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

$$\pi_1 = q_1\pi_1 + q_2\pi_2 + q_3\pi_3 + q_4\pi_4 + q_5\pi_5 \qquad (1 - q_1)\pi_1 - q_2\pi_2 - q_3\pi_3 - q_4\pi_4 - q_5\pi_5 = 0$$
$$\pi_2 = q_2\pi_1 + q_3\pi_2 + q_4\pi_3 + q_5\pi_4 + q_1\pi_5 \qquad -q_2\pi_1 + (1 - q_3)\pi_2 - q_4\pi_3 - q_5\pi_4 + q_1\pi_5 = 0$$
$$\pi_3 = q_3\pi_1 + q_4\pi_2 + q_5\pi_3 + q_1\pi_4 + q_2\pi_5 \qquad -q_3\pi_1 - q_4\pi_2 + (1 - q_5)\pi_3 - q_1\pi_4 - q_2\pi_5 = 0$$
$$\pi_4 = q_4\pi_1 + q_5\pi_2 + q_1\pi_3 + q_2\pi_4 + q_3\pi_5 \qquad -q_4\pi_1 - q_5\pi_2 - q_1\pi_3 + (1 - q_2)\pi_4 - q_3\pi_5 = 0$$
$$\pi_5 = q_5\pi_1 + q_1\pi_2 + q_2\pi_3 + q_3\pi_4 + q_4\pi_5 \qquad -q_5\pi_1 - q_1\pi_2 - q_2\pi_3 - q_3\pi_4 + (1 - q_4)\pi_5 = 0$$

기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률
  - 예제 3.11

5개의 상태를 가지고 있는 마코프 체인의 1단계 전이확률 행렬이 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_1 \\ q_3 & q_4 & q_5 & q_1 & q_2 \\ q_4 & q_5 & q_1 & q_2 & q_3 \\ q_5 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}, \forall q_i > 0,\ \sum_{i=1}^{5} q_i = 1$$

이와 같은 행의 합 뿐만 아니라 열의 합도 1인 마코프 체인을 이중(Doubly) 마코프체인이라고 한다.
이때, 안전상태 확률이 $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \frac{1}{5}$임을 보여라.

$$\begin{aligned}
&(1 - q_1)\pi_1 - q_2\pi_2 - q_3\pi_3 - q_4\pi_4 - q_5\pi_5 = 0 \\
&-q_2\pi_1 + (1 - q_3)\pi_2 - q_4\pi_3 - q_5\pi_4 + q_1\pi_5 = 0 \\
&-q_3\pi_1 - q_4\pi_2 + (1 - q_5)\pi_3 - q_1\pi_4 - q_2\pi_5 = 0 \\
&-q_4\pi_1 - q_5\pi_2 - q_1\pi_3 + (1 - q_2)\pi_4 - q_3\pi_5 = 0 \\
&-q_5\pi_1 - q_1\pi_2 - q_2\pi_3 - q_3\pi_4 + (1 - q_4)\pi_5 = 0 \\
&\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} (1-q_1) & -q_2 & -q_3 & -q_4 & -q_5 \\ -q_2 & (1-q_3) & -q_4 & -q_5 & -q_1 \\ -q_3 & -q_4 & (1-q_5) & -q_1 & -q_2 \\ -q_4 & -q_5 & -q_1 & (1-q_2) & -q_3 \\ -q_5 & -q_1 & -q_2 & -q_3 & (1-q)_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \pi_i = \frac{1}{5}, \forall i$는 $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}P, \sum_{j=1}^{5} \pi_i = 1$의 연립방정식을 만족하므로 안정상태 확률이다.

기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률
  - 예제 3.12

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array}\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

예제 3.4에서 $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}P$를 적용하고 이를 정리하면 다음과 같다.

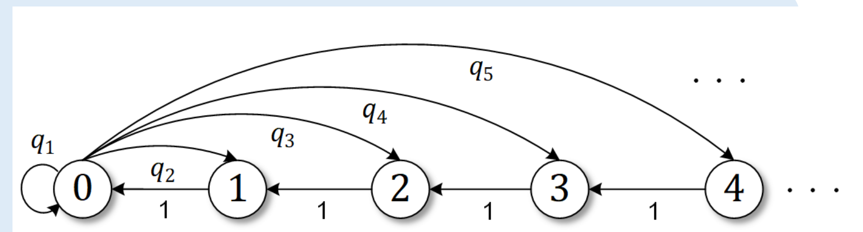
$\pi_0 = q_1\pi_0 + \pi_1 \qquad \pi_1 = (1-q_1)\pi_0,$

$\pi_1 = q_2\pi_0 + \pi_2 \qquad \pi_2 = (1-q_1-q_2)\pi_0,$

$\pi_2 = q_3\pi_0 + \pi_3 \qquad \pi_3 = (1-q_1-q_2-q_3)\pi_0,$

$\dots \qquad \dots$

$\boldsymbol{\pi_j = q_{j+1}\pi_0 + \pi_j} \qquad \boldsymbol{\pi_j = (1-q_1-q_2 \dots - q_j)\pi_0}$



상태전이 행렬 행의 합은 1

M

이제 π_0를 구하기 위해 $\sum \pi_i = 1$과 $\sum q_i = 1$를 적용하면 $\pi_0(q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots) = 1$이다.
이때, $M \equiv q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots$ 라고하자.
해당 마코프 체인이 양의 재귀인지 밝혀라.

m단계까지 발생한 모든 기대비용의 합
$\tilde{\alpha}(I + P^{(1)} + P^{(2)} + \cdots + P^{(m)})\tilde{C}$

$M < \infty$이면 $\pi_j = \frac{1-q_1-\cdots q_j}{M}, j = 1,2,\dots$이고 $\pi_0 = \frac{1}{M}$이다. 이러한 경우에는 모든 상태들은 양의 재귀다.

$M = \infty$이면 해가 존재하지 않는다. 여기서 $M \equiv q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots$ 은 기계장치 수명의 기댓값이며, 상태 0에서 출발하여 다시 상태 0으로 돌아오는데 걸리는 단계수의 평균 값이다.

$M = \infty$라면 상태 0은 영의 재귀이며, 기약 마코프 체인이기 때문에 극한확률 값은 모든 상태에서 0이다.

기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률 π_j의 해석
  - 앙상블 평균(Ensemble Average) 여러 개의 독립적인 실험 중 단계(시간)에 따른 평균
    - 안정상태의 임의의 시점에서 시스템이 상태 j에 있을 평균 횟수
      - 동일한 시스템을 N회(개) 가동했을 때, 시점 t에서 평균적으로 $N \times \pi_j$회의 시스템이 상태 j에 있다고 해석함
      - e.g., $\pi_j = 0.2$일 경우, 10회 시스템을 가동했을 때, 상태 j에 평균적으로 2회 도달함
  - 평균 재귀 간격
    - 안정상태의 임의시점에서 시스템이 상태 j에서 다시 상태 j로 재귀하는 평균 단계 수
      - $\frac{1}{\pi_j}$는 상태 j방문 후 다음 상태 j를 방문하는데 까지의 평균 단계 수로 해석함
      - e.g., $\pi_j = 0.2$일 경우, 상태 j를 방문하는데 평균적으로 5단계가 걸림

기약 마코프 체인

- 안정상태(Steady State)확률 π_j의 해석
  - 시간 평균(Time Average) 한번의 실험 중 단계(시간)에 따른 평균
    - 안정상태의 임의시점에서 시스템이 상태 j로 전이하는 평균 횟수
    - 마코프 체인이 총 N번의 전이할 때, 이 중 상태 j로의 전이 횟수는 평균 $N \times \pi_j$회라고 해석함 즉, N번 전이 중 상태 j에 머무르는 시간 비율

[참고] 특정 시점 n에서 상태 j에 있으면 1

지시확률변수를 $I_j(X_n) = \begin{cases} 1, if\ X_n = j \\ 0, if\ X_n \neq j \end{cases}$ 라고 정의하면 평균은 $E(I_j(X_n)|X_0 = j) = P(X_n = j|X_0 = j) = p_{jj}^{(n)}$이다.

이산확률변수 기댓값: $E[X] = \sum_x xf(x)$ $E[I_j(X_n)] = \sum_x xP\left(I_j(X_n)\right) = 1 \cdot P(I_j(X_n) = 1) + \cancel{0 \cdot P(I_j(X_n) = 0)}$

또한, $\sum_{n=0}^{m} I_j(X_n)$ 는 단계 m까지 상태 j를 방문한 총 횟수이고, 평균은 $E\left(\sum_{n=0}^{m} I_j(X_n)|X_0 = j\right)$
$= \sum_{n=0}^{m} E(I_j(X_n)|X_0 = j) = \sum_{n=0}^{m} p_{jj}^{(n)}$이다. $m \to \infty$로 하면, $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ 은 상태 j를 방문한 총 평균 횟수이다.

이는 시간 평균의 개념에 의해 다음과 같이 정리된다. 총 단계 수

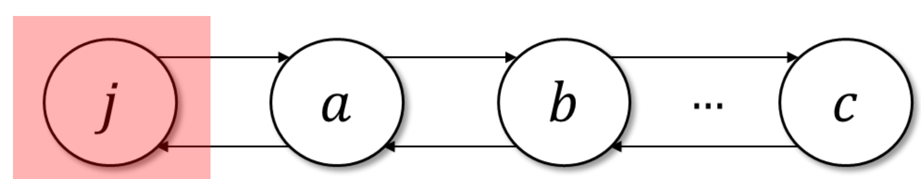
$$E\left(\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} I_j(X_n)|X_0 = j\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} E(I_j(X_n)|X_0 = j) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} p_{jj}^{(n)} = \pi_j$$

기약 마코프 체인

- 무한 상태공간의 기약 마코프 체인
  - 상태공간 E가 유한하다면 모든 상태들은 양의 재귀 또는 일시적 상태 중의 하나이며, 영의 재귀 상태는 존재하지 않음
  - 상태공간 E가 무한하다면 영의 재귀 상태가 존재할 수 있음
    - 영의 재귀 판단 방법
      - 무한 상태공간 E인 기약 마코프 체인의 전이확률 행렬 P에서 임의로 $j \in E$번째 행과 열을 삭제한 행렬을 Q로 정의
        - 상태 j에 의존하지 않는 나머지 상태들의 전이확률을 알 수 있음
      - $\tilde{h} = Q\tilde{h}$이고 모든 h_j에 대해 $0 \leq h_j \leq 1$인 연립방정식의 해를 구함
        - 상태 j를 제외한 나머지 상태들의 재귀성 판단

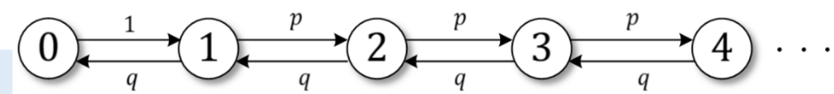
h_a라면, 상태 a에서 시작해서 특정 상태로 돌아올 확률 = 0

      - 유일한 해가 $\tilde{h} = \tilde{0}$이라면 모든 상태들은 영의 재귀 상태 그렇지 않으면 일시적 상태



기약 마코프 체인

- 무한 상태공간의 기약 마코프 체인
  - 예제 3.13



예제 3.5의 랜덤보행을 살펴보면 $0 < p < 1$이고 $q \equiv 1 - p$이다.
해당 마코프 체인은 닫힌집합이므로 모든 상태들은 모두 양의 재귀거나 영의 재귀거나 모두 일시적 상태이다. 여기서 각 상태일 조건을 구해라.

안정상태 확률을 구하기 위한 연립방정식 $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}P$을 적용하면

$$\pi_0 = q\pi_1,$$
$$\pi_1 = \pi_0 + q\pi_2,$$
$$\pi_2 = p\pi_1 + q\pi_3,$$
$$\pi_3 = p\pi_2 + q\pi_4,$$
$$\ldots$$

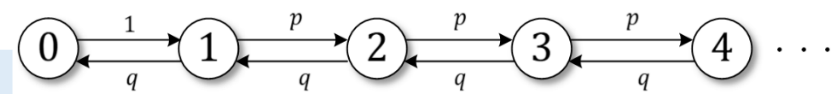
연립방정식 계산

$$\pi_1 = \left(\frac{1}{q}\right)\pi_0,\ \pi_2 = \left(\frac{p}{q^2}\right)\pi_0,\ \pi_3 = \left(\frac{p^2}{q^3}\right)\pi_0,\ \ldots$$

$\pi_j = \left(\frac{p^{j-1}}{q^j}\right)\pi_0, j = 1,2,3,\ldots$ 이다.

기약 마코프 체인

- 무한 상태공간의 기약 마코프 체인
  - 예제 3.13



예제 3.5의 랜덤보행을 살펴보면 $0 < p < 1$이고 $p = 1 - p$이다.
해당 마코프 체인은 닫힌집합이므로 모든 상태들은 모두 양의 재귀거나 영의 재귀거나 모두 일시적 상태이다. 여기서 각 상태일 조건을 구해라.

$$\pi_1 = \left(\frac{1}{q}\right)\pi_0,\ \pi_2 = \left(\frac{p}{q^2}\right)\pi_0,\ \pi_3 = \left(\frac{p^2}{q^3}\right)\pi_0,\ \ldots$$

$$\pi_j = \left(\frac{p^{j-1}}{q^j}\right)\pi_0$$

$\pi_j = \left(\frac{p^{j-1}}{q^j}\right)\pi_0, j = 1,2,3, \ldots$ 이다.

1) $p < q$인 경우:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j = \left(1 + \left(\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\right)\pi_0 = \left(1 + \left(\frac{1}{q}\right)\frac{1}{1-\frac{p}{q}}\right)\pi_0 = \frac{2q}{q-p}\pi_0$$

$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j = 1$이여야 하므로 $\pi_0 = \frac{q-p}{2q}$이고 따라서,

등비급수의 합 공식: $\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r}$

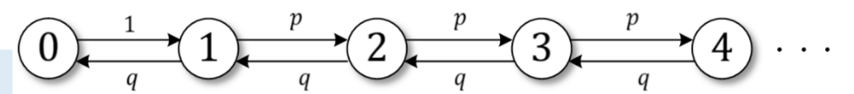
$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{q}\right), & j = 0 \\ \frac{1}{2q}\left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}, & j \geq 1 \end{cases}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

안정상태 확률 π_j가 존재하므로 모든 상태들은 양의 재귀다.

기약 마코프 체인

- 무한 상태공간의 기약 마코프 체인
  - 예제 3.13



예제 3.5의 랜덤보행을 살펴보면 $0 < p < 1$이고 $q = 1 - p$이다.
해당 마코프 체인은 닫힌집합이므로 모든 상태들은 모두 양의 재귀거나 영의 재귀거나 모두 일시적 상태이다. 여기서 각 상태일 조건을 구해라.

$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = \left(1 + \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}\right) \pi_0$ $p \geq q$일 때, $\frac{p}{q} \geq 1$이므로 ∞로 발산

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

2) $p \geq q$인 경우:
무한등비급수의 값이 존재하지 않는다. 따라서, 전이확률 행렬에서 첫 행과 첫 열을 제거하고 다음의 행렬을 고려한다.

$Q = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$, 연립방정식 $\tilde{h} = Q\tilde{h}$을 풀면, $\begin{aligned} h_1 &= ph_2 \\ h_2 &= qh_1 + ph_3 \\ h_3 &= qh_2 + ph_4 \\ &\cdots \end{aligned}$

선형 결합 형태

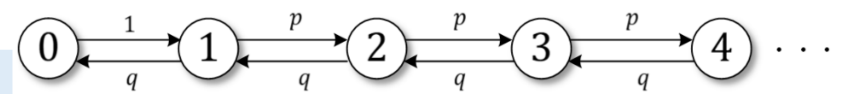
따라서, $h_i = qh_{i-1} + ph_{i+1}$이고 이는 $p(h_{i+1} - h_i) = q(h_i - h_{i-1}), i = 2,3,4, \ldots$이다.

$h_i - h_i = qh_{i-1} + ph_{i+1} - h_i$

$0 = qh_{i-1} + ph_{i+1} - h_i = qh_{i-1} + ph_{i+1} - (1 \times h) = qh_{i-1} + ph_{i+1} - \{(p+q)h\}$

기약 마코프 체인

- 무한 상태공간의 기약 마코프 체인
  - 예제 3.13



예제 3.5의 랜덤보행을 살펴보면 $0 < p < 1$이고 $q = 1 - p$이다.
해당 마코프 체인은 닫힌집합이므로 모든 상태들은 모두 양의 재귀거나 영의 재귀거나 모두 일시적 상태이다. 여기서 각 상태일 조건을 구해라.

2) $p \geq q$인 경우:
$h_i = qh_{i-1} + ph_{i+1}$이고 이는 $p(h_{i+1} - h_i) = q(h_i - h_{i-1}), i = 2,3,4, \ldots$이다.
$p(h_2 - h_1) = qh_1$이므로, $h_{i+1} - h_i = \left(\frac{q}{p}\right)^{(i-1)}(h_2 - h_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i} h_1, i = 1,2, \ldots$임에 따라 모든 $i \geq 1$에 대하여 다음의 식을 얻을 수 있음

$$h_i = (h_i - h_{i-1}) + (h_{i-1} - h_{i-2}) + \cdots + (h_2 - h_1) + h_1 = \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-2} + \cdots + \frac{q}{p}\right) h_1$$

따라서, $p = q$이면 $h_i = (i-1)h_1$이며 모든 h_i에 대하여 $0 \leq h_i \leq 1$이기 위해 $h_i = 0$일 수 밖에 없다. 이러한 경우는 모든 상태가 영의 재귀다.

만약, $p > q$이면 $h_1 = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)$로 둠으로써 $h_i = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, i \geq 1$이 성립한다. 따라서, 모든 상태는 일시적 상태이다.

기약 마코프 체인

- 무한 상태공간에서의 기대비용
  - m 단계를 무한대로 확장한 기간 동안의 기대비용
    - 총 기대 할인비용
      - 기간 m을 무한 단계로 확장하면 총 기대비용의 값은 ∞
      - 하지만, 매 단계마다 이자율(Interest Rate) $i(0 \le i < 1)$를 고려하면, 무한 단계까지의 총 기대비용의 합은 유한 값이 됨
        - 현재 1원은 m 단계 후에 $(1+i)^m$원이 됨
        - m단계 후에서 1원은 $(1+i)^{-m}$원이 됨
        - 이때, $\beta \equiv (1+i)^{-1}$은 할인율(Discount Rate)이라고 함
      - 출발 상태가 i일 때, 할인율을 고려한 총 기대 할인비용 $v_i, i \in E$
        - $v_i \equiv E[\sum_m^\infty \beta^m C(X_m) \mid X_0 = i] = \sum_m^\infty \beta^m E[C(X_m) | X_0 = i]$

$$= \sum_{m=0}^\infty \beta^m \left(P^m \tilde{C}\right)_i = \sum_{m=0}^\infty \left((\beta P)^m \tilde{C}\right)_i = \left(\sum_m^\infty (\beta P)^m \tilde{C}\right)_i$$

$$= \left((I - \beta P)^{-1} \tilde{C}\right)_i$$

$$\sum_m^\infty (\beta P)^m = I + \beta P + (\beta P)^2 + \cdots = (I - \beta P)^{-1}$$

등비급수의 합 공식: $\sum_{j=0}^\infty r^j = \frac{1}{1-r}$

$\therefore\ \tilde{v} = (v_i), i \in E$에 대하여 $\tilde{v} = (I - \beta P)^{-1} \tilde{C}$

기약 마코프 체인

- 무한 상태공간에서의 기대비용

*ψ: 프사이

  - m 단계를 무한대로 확장한 기간 동안의 기대비용
    - 단위기간 당 기대 평균비용
      - 할인율을 고려하지 않는 경우($i = 0, \beta = 1$)에는 m단계까지의 단계당 기대 평균비용을 구하고 $m \to \infty$을 취함
      - 무한기간 동안의 단계당 기대 평균비용을 구할 수 있음
        - 초기상태가 i일 경우, 단위시간당 기대 평균비용은 ψ_i
        - $\psi_i = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} E[\sum_{n=0}^{m} C(X_n) | X_0 = i]$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} E[C(X_n) | X_0 = i]$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{j\in E} \sum_{n=0}^{m} E[C(X_n) | X_0 = i, X_n = j] p_{ij}^{(n)}$$

$$= \sum_{j\in E} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} C(j) p_{ij}^{(n)}$$

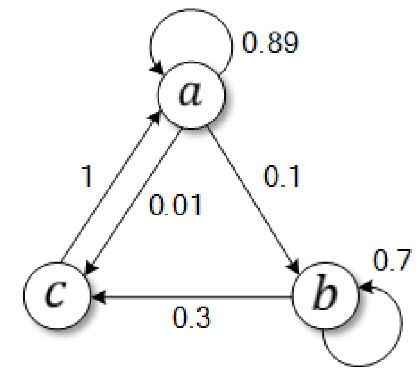
$$= \sum_{j\in E} \left(\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} p_{ij}^{(n)} \right) C(j) = \sum_{j\in E} \pi_j C(j)$$

시간 평균 개념 활용

$$\therefore\ \psi_i = \tilde{\pi}\tilde{C}, i \in E$$

기약 마코프 체인

- 무한 상태공간에서의 기대비용



- 예제 3.14

예제 3.1의 마코프 체인을 $C(a) = -20, C(b) = 10, C(c) = 100$이고 이자율이 $i = 0.05$일 때, 총 기대 할인비용을 구하라.

전이확률 행렬 $P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta = (1 + 0.05)^{-1} = 0.9524$이므로,

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.9524 \times \begin{bmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -122.56 \\ 15.74 \\ -16.64 \end{bmatrix}$$

- 예제 3.15

$\tilde{v} = (I - \beta P)^{-1}\tilde{C}$

예제 3.1의 마코프 체인에 대해 단위시간당 기대 평균비용을 구하라.

예제 3.10의 계산 결과로 $\pi_a = 0.693, \pi_b = 0.231, \pi_c = 0.076$ 이므로,

$$\psi = \tilde{\pi}\tilde{C} = [0.693 \quad 0.231 \quad 0.076]\,[-20 \quad 10 \quad 100]^T = [0.693 \quad 0.231 \quad 0.076] \begin{bmatrix} -20 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= 0.693 \times (-20) + 0.231 \times 10 + 0.076 \times 100 = -13.86 + 2.31 + 7.6 = -3.95$$

기약 마코프 체인

- 활용
  - 어떤 기계를 오랫동안 사용한 후 특정 시점에서 정상/일부고장/고장 상태일 확률을 알고자 할 경우
    - 안정상태 확률
      - 모든 $j \in E$에 대해 상태확률의 극한값 $\pi_j \equiv \lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$이 존재할 조건과 π_j를 구해야 함
  - 어떤 기계는 평균 며칠에 한 번 꼴로 고장이 나서 수리 상태에 들어가는지 알고자 할 경우
    - 평균 재귀 간격
      - 특정한 상태 j의 평균 재귀 간격을 π_j를 통해 구해야 함($\frac{1}{\pi_j}$)

기약 마코프 체인

- 활용
  - 어떤 기계장치를 오랫동안 사용하여 기계장치가 정상으로 가동했던 날이 평균 얼마나 되는지 알고자 할 경우
    - 앙상블 평균
      - 무한급수의 존재 조건과 $I + P + P^2 + \cdots$를 구해야 함
  - 어떤 기계 장치의 상태가 고장/일부고장/정상이고, 각각 $C(a), C(b), C(c)$의 비용이 발생한다고 할 때, 해당 기계를 설치하여 사용하면 하루당 얼마의 비용이 드는지 알고자 할 경우
    - 기대 평균비용
      - $E\left(\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left(C(X_1) + C(X_2) + \cdots + C(X_N)\right)\right)$를 구해야 함

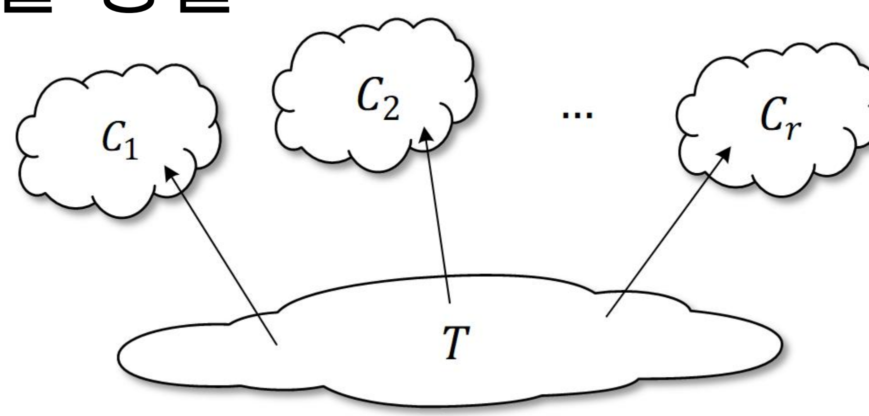
가약 마코프 체인

정의

서로 왕래하지 않는 상태들이 존재하며, 여러 개의 독립적인 닫힌 집합과 일시적 상태들로 이루어진 확률 과정으로, 일시적 상태는 닫힌 집합에 도달한 이후 다시 방문되지 않으며, 닫힌 집합으로 흡수되는 과정을 포함한다.

- 다이어그램
  - T: 일시적 상태들의 집합
  - $C_1, C_2, C_3, \dots, C_r$: 기약인 닫힌집합
  - P_k: C_r로 만들어진 마코프 체인의1단계 전이확률 행렬
  - Q: 일시적 상태에 머무는 전이확률 행렬
  - $\tilde{0}$: 모든 항의 값이 0인 부분 행렬

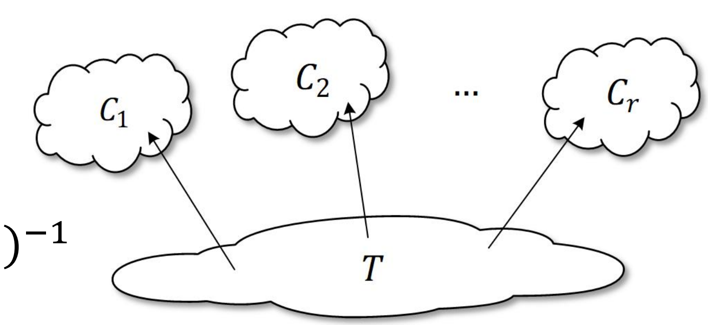
$$P = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_r \\ T \end{array} \begin{bmatrix} P_1 & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & P_2 & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & P_r & \tilde{0} \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_r & Q \end{bmatrix}$$



가약 마코프 체인

- 전이확률 행렬
  - 각 닫힌집합 $C_i, i = 1, 2, \dots, r$에 있는 상태들을 하나의 상태로 합침
    - $P = \begin{array}{c} C \\ \cdots \\ T \end{array} \begin{bmatrix} I & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ T & \vdots & Q \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $P = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_r \\ T \end{array} \begin{bmatrix} P_1 & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & P_2 & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & P_r & \tilde{0} \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_r & Q \end{bmatrix}$
      - I: $r \times r$크기의 단위 행렬
      - T: $(|E| - r)$ 크기의 일시적 상태에서 닫힌집합으로 도달하는 전이확률 행렬
      - Q: $(|E| - r) \times (|E| - r)$ 크기의 일시적 상태에 머무는 전이확률 행렬
  - P의 거듭 제곱
    - $\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{bmatrix} I & \tilde{0} \\ (I + Q + Q^2 + \cdots)T & \lim_{n \to \infty} Q^n \end{bmatrix}$

    기본행렬(Fundamental Matrix): $I + Q + Q^2 + \cdots = (I - Q)^{-1}$



가약 마코프 체인

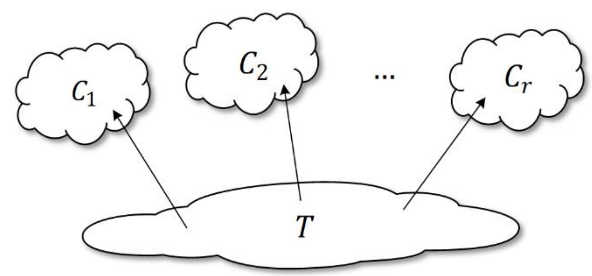
- 전이확률 행렬
  - 예제 3.16

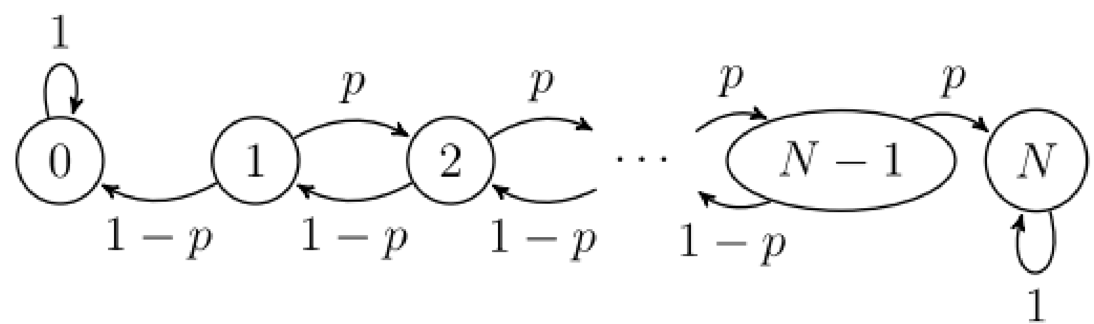
총액이 N인 도박판에서 두 사람 A, B가 도박을 한다. A가 매 판 이길 확률은 p이며 이길 때마다 금액 1 만큼 버는데, 총액 N을 다 따거나 다 잃으면 도박이 끝난다. A가 금액 $i(1 \le i \le N-1)$을 가지고 도박을 시작할 때, 돈을 다 따서 끝날 확률을 구하여라.

A가 도박에서 이기기 위한 확률과정 $\{X_n,\ n = 0,1,2,\dots\}$는 상태공간 $E = \{0,1,2,\dots N\}$인 가약 마코프 체인이며 1단계 전이확률이 $p_{i,i+1} = p,\ p_{i,i-1} = q \equiv 1-p,\ p_{00} = 1$이고 $p_{NN} = 1$이다. 따라서, 상태 0과 N은 흡수상태이며 나머지 상태들 $1,2,3,\dots N-1$은 일시적 상태이다.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-2 \\ N-1 \\ N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & N-2 & N-1 & N \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_r \\ T \end{array} \begin{bmatrix} P_1 & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & P_2 & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & P_r & \tilde{0} \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_r & Q \end{bmatrix}$$





가약 마코프 체인

- 전이확률 행렬
  - 예제 3.16

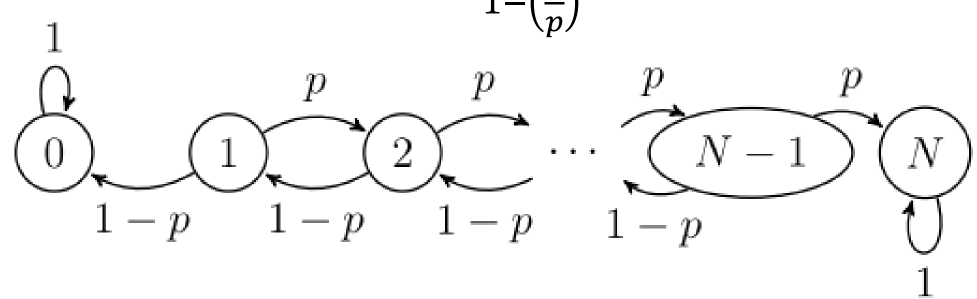
총액이 N인 도박판에서 두 사람 A, B가 도박을 한다. A가 매 판 이길 확률은 p이며 이길 때마다 금액 1 만큼 버는데, 총액 N을 다 따거나 다 잃으면 도박이 끝난다. A가 금액 $i(1 \le i \le N-1)$을 가지고 도박을 시작할 때, 돈을 다 따서 끝날 확률을 구하여라.

구하고자 하는 확률은 상태 i에서 출발하여 궁극적으로 상태 N으로 흡수될 확률이므로 이를 a_i라고 하면 $a_i = pa_{i+1} + qa_{i-1},\ i = 1,2,\dots,N-1, a_0 = 0, a_N = 1$ 이다.

$p(a_{i+1} - a_i) = q(a_i - a_{i-1})$ 이므로, $a_2 - a_1 = \left(\frac{q}{p}\right)a_1,\ a_3 - a_2 = \left(\frac{q}{p}\right)(a_2 - a_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 a_1, \dots$

$a_i - a_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{(i-1)} a_1$, 따라서, $a_i = \left(1 + \left(\frac{q}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{(i-1)} a_1\right) = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right) a_1, i = 1,2,\dots N$

$a_N = 1$이므로, $a_1 = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$이다. 결론적으로 $a_i = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, i = 1,2,\dots,N$이다.



가약 마코프 체인

- 전이확률 행렬
  - 예제 3.17

예제 3.16에서 $N = 3$인 경우에 다음을 구하여라.
1) $i = 1,2$에서 출발하여 3으로 흡수(돈을 다 벌어서 끝날)될 확률
2) $i = 1,2$에서 출발하여 판이 끝날 때까지 소요되는 도박판의 평균 횟수

$N = 3$인 경우, 1단계 전이확률 행렬은 다음과 같다.

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p \\ 0 & p & q & 0 \end{bmatrix}, \text{ 따라서, } T = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \text{이고 } Q = \begin{bmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

T: 일시적 상태(돈을 따거나, 잃거나) 전이확률

Q: 흡수 상태(승리)로의 전이확률

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} I & \tilde{0} \\ (I + Q + Q^2 + \cdots)T & \lim_{n\to\infty} Q^n \end{bmatrix}$$

또한, $(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-pq}\begin{bmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \end{bmatrix},$

기본행렬(Fundamental Matrix): $I + Q + Q^2 + \cdots = (I - Q)^{-1}$

$$(I - Q)^{-1}T = \begin{bmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q}{1-pq} & \frac{p^2}{1-pq} \\ \frac{q^2}{1-pq} & \frac{p}{1-pq} \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

도박에서 이길 확률이 70%인 경우,

$$\frac{0.7^2}{(1 - 0.7 \times 0.3)} = \frac{0.49}{0.79} = 0.62, \quad \frac{0.7}{0.79} = 0.88$$

1) $i = 1,2$에서 출발하여 3으로 흡수될 확률은 각각 $\frac{p^2}{(1-pq)}$과 $\frac{p}{(1-pq)}$ 이다.

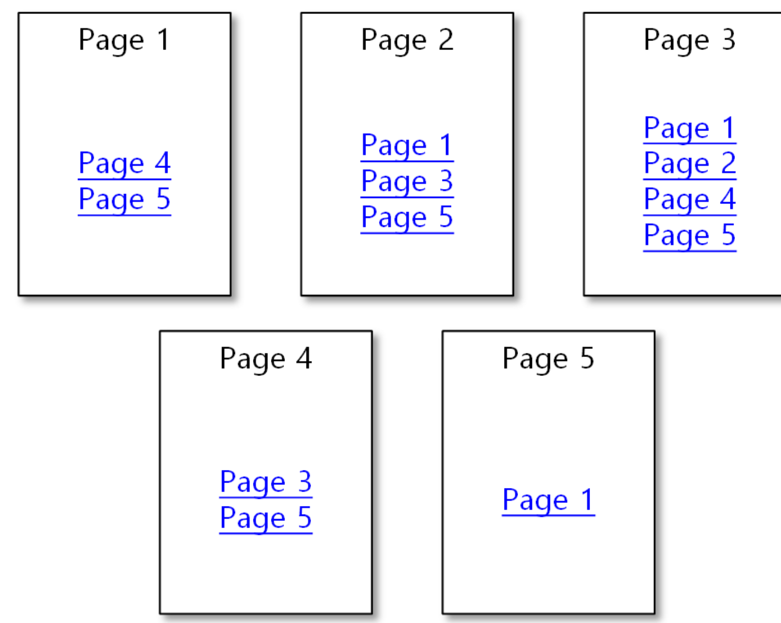
2) $(I - Q)^{-1}$의 각 행의 합을 의미하므로 각각 $\frac{1+p}{(1-pq)}$ 와 $\frac{1+q}{(1-pq)}$ 이다. $\frac{1.7}{0.79} = 2.15, \ \frac{0.3}{0.79} = 0.37$

가약 마코프 체인

- 활용
  - 일시적 상태 $i \in T$에서 출발하여 닫힌집합들 가운데 특정한 C_k로 흡수될 확률은?
    - 기본행렬 $(I-Q)^{-1}$의 (i,j)항 $\left((I-Q)^{-1}\right)_{ij} = (I+Q+Q^2+\cdots)_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} q_{ij}^{(k)}$ 이므로, 일시적 상태 i에서 출발하여 어딘가로 흡수되기 전까지 일시적 상태 j를 방문한 평균 단계
  - $i \in T$에서 출발하여 C_k로 흡수되었다면 소요된 단계 수는?
    - 기본행렬 $(I-Q)^{-1}$ 의 i번째 행의 합
    - 일시적 상태 i에서 출발하여 흡수되기 전까지 걸린 평균 단계
  - $i \in T$에서 출발하여 어디로든 흡수될 때까지 소요된 단계 수는?
    - $(I-Q)^{-1}T$의 (i,j) 항 $\left((I-Q)^{-1}T\right)_{ij}$
    - 일시적 상태 i에서 출발하여 닫힌집합 C_j로 흡수될 확률

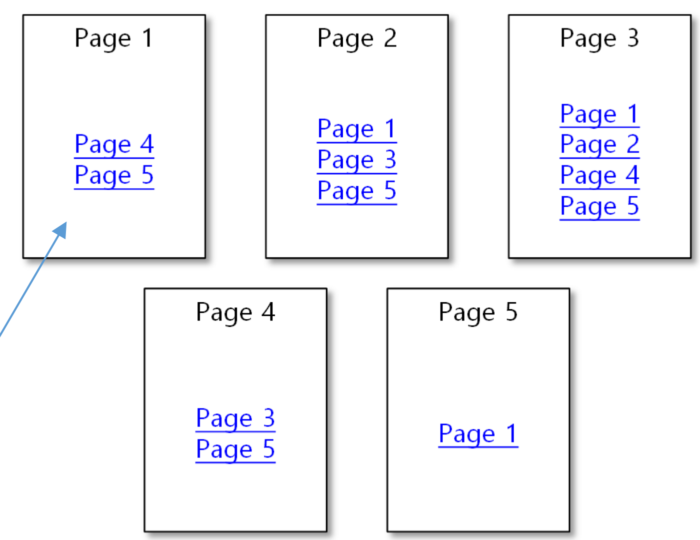
마코프 체인 응용

- 구글(Google)의 검색엔진
  - 페이지랭크(Page Rank)
    - 웹 페이지 간의 링크를 바탕으로 각 웹 페이지의 중요도를 결정하는 알고리즘
    - 웹 페이지들에 중요도를 매겨 사용자가 검색어를 입력하면 중요도가 높은 순서대로 검색 결과를 제시함
    - 각 웹 페이지에 중요도를 부여하는 방법은 마코프 체인의 안정상태 확률을 구하는 방법을 활용함



마코프 체인 응용

- 구글(Google)의 검색엔진
  - 페이지랭크(Page Rank)
    - 웹 사용자가 현재 페이지에서 다른 페이지로 옮겨갈 때 이전에 어떤 페이지들을 방문했는지는 상관 없이 각 링크를 선택할 확률이 동일하다고 가정
    - e.g., 웹 페이지를 X_n라고하고 상태공간 $E = \{1,2,3,4,5\}$라고함
      - 1단계 전이확률 행렬
        - $P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

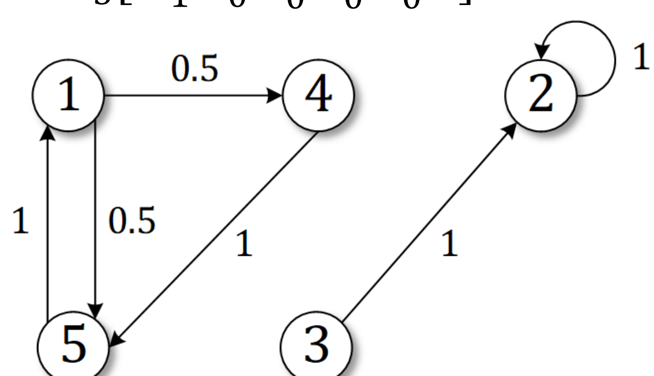


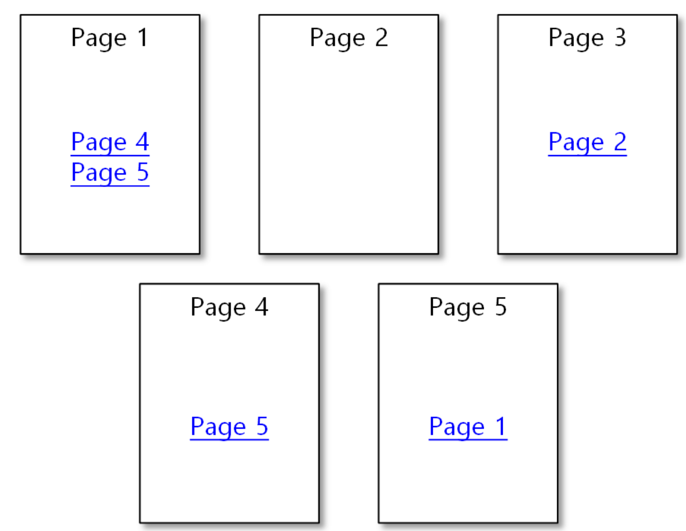
웹 페이지 1의 중요도

- 기약 마코프 체인이며, $\tilde{\pi} = (0.348,\ 0.028,\ 0.110,\ 0.202, 0.312)$

마코프 체인 응용

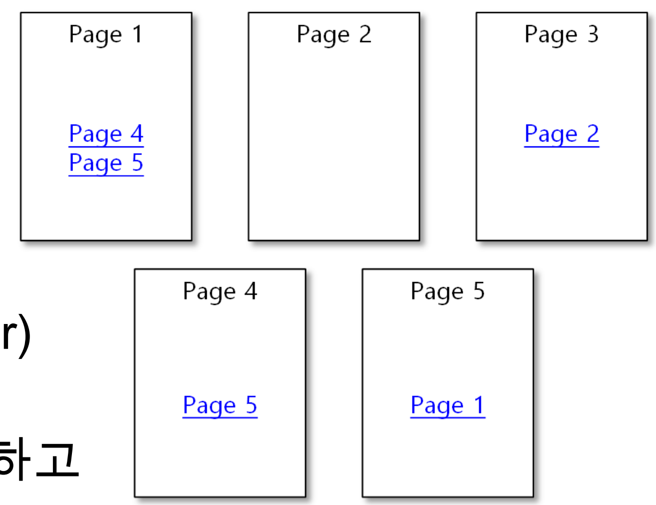
- 구글(Google)의 검색엔진
  - 페이지랭크(Page Rank)
    - 모든 페이지가 연결되어 있지 않고 링크를 가지고 있지 않은 페이지가 존재할 경우, 이는 가약 마코프 체인임
    - 페이지의 중요도를 정하기 위해 안정상태 확률 π_j을 기약 마코프 체인처럼 구할 수 없음
      - 1단계 전이확률 행렬
        - $\hat{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$





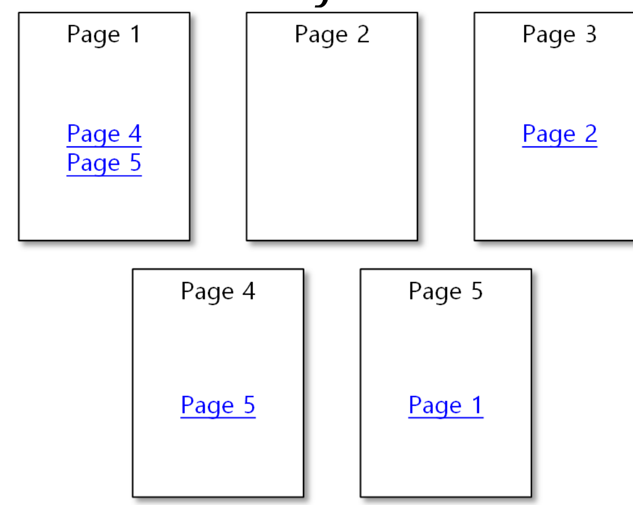
마코프 체인 응용

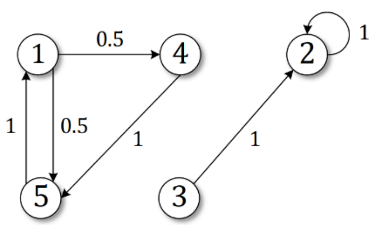
- 구글(Google)의 검색엔진
  - 페이지랭크(Page Rank)
    - 페이지의 중요도를 정하기 위해 안정상태 확률 π_j을 기약 마코프 체인처럼 구할 수 없음
      - 변형된 전이확률 행렬 활용
        - $M = (1-d)\hat{P} + dB,\ B = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$
          - N: 전체 웹페이지 수
          - $d(0 \le d \le 1)$: 댐핑계수(Damping Factor)
            - 랜덤하게 웹을 서핑하는 사용자가 현재의 웹 페이지에서 서핑을 중단하고 새로운 웹 페이지로 옮겨갈 확률
            - $d = 0$: 현재 웹 페이지만 무한정 서핑
            - $d = 1$: 매번 새로운 웹 페이지를 서핑



마코프 체인 응용

- 구글(Google)의 검색엔진
  - 페이지랭크(Page Rank)
    - 페이지의 중요도를 정하기 위해 안정상태 확률 π_j을 기약 마코프 체인처럼 구할 수 없음
      - 변형된 전이확률 행렬 활용
      - $M = (1-d)\hat{P} + dB, B = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$





- 새로운 웹 페이지를 방문할 확률은 동일 $\frac{1}{N}$
- 경험적으로 댐핑계수를 0.15로 사용

$$M = (1-0.15)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.15\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.455 & 0.455 \\ 0.03 & 0.88 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.88 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.88 \\ 0.88 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \end{bmatrix}$$

- $\tilde{\pi} = (0.223,\ 0.37,\ 0.03,\ 0.129, 0.238)$

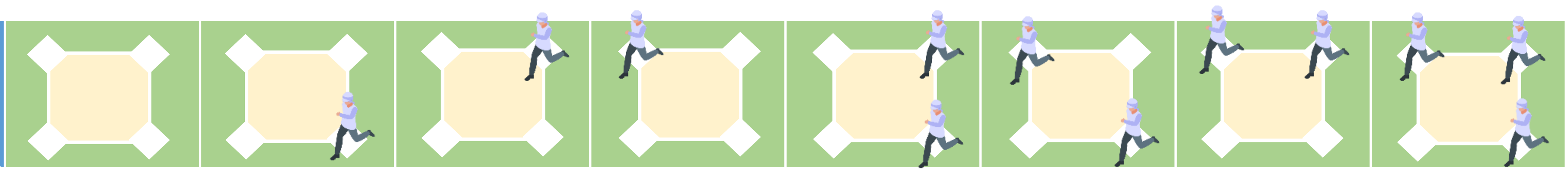
마코프 체인 응용

- 프로야구 타자들의 성과평가 모형
  - OERA(Offensive Earned-Run Average) 기법
    - 타자들의 성과를 정량적으로 측정 및 분석하는 데 활용
      - 타자가 타석에 들어섰을 때 결과로 나올 수 있는 경우를 사사구, 단타, 이루타, 삼루타, 홈런, 범타로 구분
      - 3아웃에 의한 공수교대 상황을 흡수상태로 하는 마코프 체인 형성
      - 타자의 실제 타격 성적으로 전이확률을 생성하고 이닝(3아웃) 당 득점을 계산한 후, 이를 9회로 연장시킨다면 몇 점을 얻을 수 있는지 계산
      - 9회까지 총 27아웃동안 모든 타순에 A라는 타자가 들어서서 경기를 치른다는 가정하에 기대득점을 구하여 선수의 성과에 대해 수치화 함

마코프 체인 응용

- 프로야구 타자들의 성과평가 모형
  - OERA(Offensive Earned-Run Average) 기법
    - 홈런을 친 경우: $p_{11} = p_4$
    - 단타 또는 사사구인 경우: $p_{12} = p_1 + p_B$, $p_{23} = p_1 + p_B$
    - 아웃 인 경우: Q_{12}(0 out → 1 out)

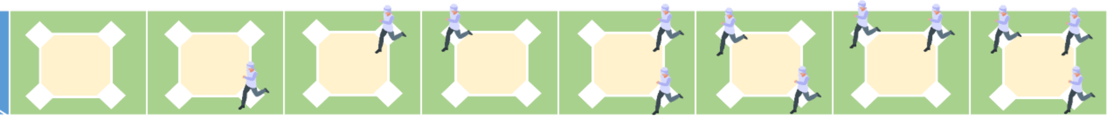
$$p_O = \frac{\text{아웃수}}{\text{타수+ 사사구 수}},\ p_B = \frac{\text{사사구 수}}{\text{타수+ 사사구 수}},\ p_i = \frac{i\text{루타 수}}{\text{타수+사사구 수}},\ p_4 = \frac{\text{홈런 수}}{\text{타수+사사구 수}}$$



주자위치 / out								
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	10	11	12	13	14	15	16
2	17	18	19	20	21	22	23	24
3	0(흡수 상태)							

마코프 체인 응용

- 프로야구 타자들의 성과평가 모형
  - OERA(Offensive Earned-Run Average) 기법

주자위치 / 아웃수								
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	10	11	12	13	14	15	16
2	17	18	19	20	21	22	23	24
3	0(흡수 상태)							

$$p_O = \frac{\text{아웃수}}{\text{타수} + \text{ 사사구 수}},$$
$$p_B = \frac{\text{사사구 수}}{\text{타수} + \text{ 사사구 수}},$$
$$p_i = \frac{i\text{ 루타 수}}{\text{타수} + \text{사사구 수}},$$
$$p_4 = \frac{\text{홈런 수}}{\text{타수+사사구 수}}$$

$$P\begin{bmatrix}1 & 0\\ T & Q\end{bmatrix},$$
야구 경기 중 발생할 수 있는
모든 상태 간의 전이확률 행렬

$$T = \begin{bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{bmatrix},$$
야구 경기가 종료되는
흡수상태로 전이확률 행렬

$$Q = \begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{13}\\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23}\\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33}\end{bmatrix}$$
야구 경기가 진행되는 동안의
일시적 상태 간 전이확률 행렬

$$T_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix}p_O\\p_O\\ \vdots\\ p_O\end{bmatrix}$$

$$Q_{11} = \begin{bmatrix}p_4 p_1 + p_B & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ p_4 & p_2 & p_3 & p_B & p_1 & 0 & 0\\ p_4 & p_2 & p_3 & p_B & 0 & 0 & 0\\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & p_B & 0 & 0\\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & p_1 & 0 & p_B\\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & p_1 & 0 & p_B\\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & p_B\\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & p_1 & 0 & p_B\end{bmatrix}, Q_{12} = \begin{bmatrix}p_O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & p_O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & p_O & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_O & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_O & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_O & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_O\end{bmatrix}, Q_{13} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

마코프 체인 응용

- 프로야구 타자들의 성과평가 모형
  - OERA(Offensive Earned-Run Average) 기법

$$p_O = \frac{\text{아웃수}}{\text{타수} + \text{ 사사구 수}},\quad p_B = \frac{\text{사사구 수}}{\text{타수} + \text{ 사사구 수}},\quad p_i = \frac{i \text{ 루타 수}}{\text{타수} + \text{사사구 수}},\quad p_4 = \frac{\text{홈런 수}}{\text{타수+사사구 수}}$$

주자위치 / 아웃수								
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	10	11	12	13	14	15	16
2	17	18	19	20	21	22	23	24
3	0(흡수 상태)							

$$Q_{11} = \begin{bmatrix} p_4p_1 + p_B & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_4 & p_2 & p_3 & p_B & p_1 & 0 & 0 \\ p_4 & p_2 & p_3 & p_B & 0 & 0 & 0 \\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & p_B & 0 & 0 \\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & p_1 & 0 & p_B \\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & p_1 & 0 & p_B \\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & p_B \\ p_4 & p_2 & p_3 & 0 & p_1 & 0 & p_B \end{bmatrix}, Q_{12} = \begin{bmatrix} p_O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_O & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_O & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_O & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_O & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_O \end{bmatrix}, Q_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_{13} = 0, Q_{12} = Q_{23},$$

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33},$$

$$Q_{13} = Q_{21} = Q_{31} = Q_{32}$$

행렬 Q는 일시적 상태 1~24 간의 전이확률 행렬로 $I + Q + Q^2 + \cdots = (I - Q)^{-1}$이고 기본행렬은 흡수상태로 가기 전까지 각 일시적 상태를 방문하는 평균횟수를 의미

마코프 체인 응용

- 프로야구 타자들의 성과평가 모형
  - OERA(Offensive Earned-Run Average) 기법

주자위치 / 아웃수								
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	10	11	12	13	14	15	16
2	17	18	19	20	21	22	23	24
3	0(흡수 상태)							

$$p_O = \frac{\text{아웃수}}{\text{타수} + \text{ 사사구 수}},$$
$$p_B = \frac{\text{사사구 수}}{\text{타수} + \text{ 사사구 수}},$$
$$p_i = \frac{i\text{ 루타 수}}{\text{타수} + \text{사사구 수}},$$
$$p_4 = \frac{\text{홈런 수}}{\text{타수+사사구 수}}$$

각 상태 1 ~ 24에서의 기대득점을 나타내는 벡터를 R이라고 하면

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} p_4 \\ 2p_4 + p_3 + p_2 \\ 2p_4 + p_3 + p_2 + p_1 \\ 2p_4 + p_3 + p_2 + p_1 \\ 3p_4 + 2p_3 + 2p_2 + p_1 \\ 3p_4 + 2p_3 + 2p_2 + p_1 \\ 3p_4 + 2p_3 + 2p_2 + 2p_1 \\ 4p_4 + 3p_3 + 3p_2 + 2p_1 + p_B \end{bmatrix} = R_2 = R_3$$

첫번째 행: 0아웃 / 주자없음(상태 1)에서의 기대 득점 (=홈런이 유일한 득점)

두번째 행: 0아웃 / 주자 1명 있음(상태2)에서의 기대 득점

- 홈런을 치면 주자+타자 득점 = 2점
- 3루타(p_3): 주자 1점
- 2루타(p_2): 주자가 2루에 있는 경우, 1점
- 1루타(p_1): 주자가 3루에있는 경우, 1점

R_1: 상태 1~8 (0 아웃)에서의 기대득점

R_2: 상태 9~16 (1 아웃)에서의 기대득점

R_3: 상태 17~24 (2 아웃)에서의 기대득점

한 이닝에서의 기대득점 $E = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k R = (I-Q)^{-1}R$

9회 이후 기대득점 $9 \times (E)_1$

마코프 체인 응용

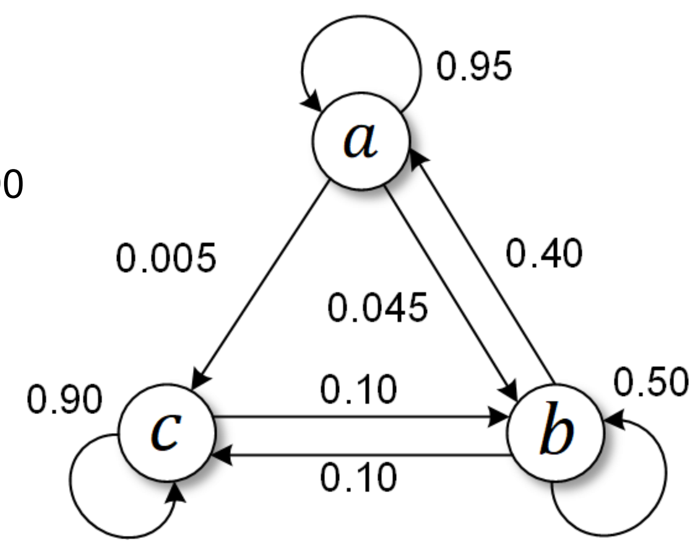
• 네트워크 안정성 평가

네트워크 노드는 아래의 3가지 상태 중에 하나에 있을 수 있다.
정상 작동: 95% 확률로 정상 상태 유지 | 4.5% 확률로 과부하 상태 전환 | 0.5% 확률로 고장 상태 전환.
과부하: 50% 확률로 정상 상태로 복귀 | 40% 확률로 과부하 상태 유지 | 10% 확률로 고장 상태 전환.
고장: 0% 확률로 정상 상태로 복구 | 0% 확률로 과부하 상태 전환 | 100% 확률로 고장 상태 유지.

확률변수 X_t를 매 초당 네트워크 노드의 상태라고 할 때,

1) 네트워크 노드의 안정상태 확률은?
2) 네트워크 노드가 과부하 상태에서 패킷 손실이 30%이고 고장 상태에서 패킷 손실이 100%라면 전체 네트워크에서 패킷 손실이 발생할 확률은?
3) 네트워크 노드의 정상 데이터 전송 시간이 5ms, 과부하 상태에서는 300ms, 고장 상태의 평균 지연이 5,000ms라고 가정하면 전체 네트워크에서 평균 지연 시간은?

- t에서 정상 작동 $= X_n = a$
- t에서 일부 고장 $= X_n = b$
- t에서 완전 고장 $= X_n = c$
- 정상 작동 → 정상 작동: 0.90
- 정상 작동 → 과부하: 0.045
- 정상 작동 → 고장: 0.005
- 과부하 → 정상 작동: 0.5
- 과부하 → 과부하: 0.4
- 과부하 → 고장: 0.10
- 고장 → 과부하: 0.10
- 고장 → 고장: 0.90



$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} 0.95 & 0.045 & 0.005 \\ 0.50 & 0.40 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 1 \end{bmatrix}$$

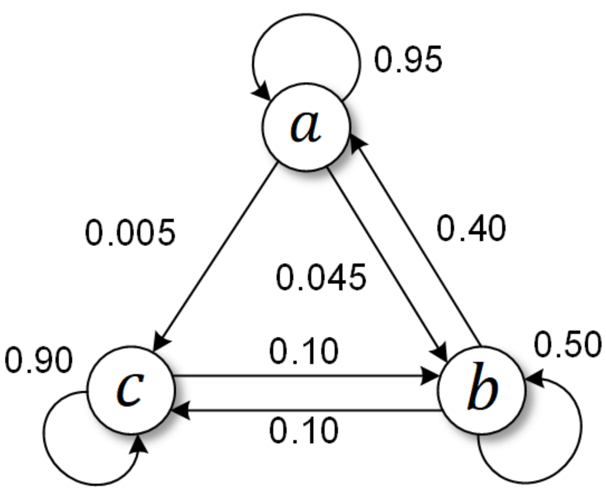
마코프 체인 응용

• 네트워크 안정성 평가

네트워크 노드는 아래의 3가지 상태 중에 하나에 있을 수 있다.
정상 작동: 95% 확률로 정상 상태 유지 | 4.5% 확률로 과부하 상태 전환 | 0.5% 확률로 고장 상태 전환.
과부하: 50% 확률로 정상 상태로 복귀 | 40% 확률로 과부하 상태 유지 | 10% 확률로 고장 상태 전환.
고장: 0% 확률로 정상 상태로 복구 | 0% 확률로 과부하 상태 전환 | 100% 확률로 고장 상태 유지.

확률변수 X_t를 매 초당 네트워크 노드의 상태라고 할 때,

1) 네트워크 노드의 안정상태 확률은?
2) 네트워크 노드가 과부하 상태에서 패킷 손실이 30%이고 고장 상태에서 패킷 손실이 100%라면 전체 네트워크에서 패킷 손실이 발생할 확률은?
3) 네트워크 노드의 정상 데이터 전송 시간이 5ms, 과부하 상태에서는 300ms, 고장 상태의 평균 지연이 5,000ms라고 가정하면 전체 네트워크에서 평균 지연 시간은?



$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \begin{bmatrix} 0.95 & 0.045 & 0.005 \\ 0.50 & 0.40 & 0.10 \\ 0 & 0.10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}P$$
$$\pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$$
$$0.95\pi_a + 0.50\pi_b + 0.00\pi_c = \pi_a$$
$$0.045\pi_a + 0.40\pi_b + 0.10\pi_c = \pi_b$$
$$0.005\pi_a + 0.10\pi_b + 0.90\pi_c = \pi_c$$

$$\pi_j = (0.7692, 0.2115, 0.0193)$$

마코프 체인 응용

• 네트워크 안정성 평가

네트워크 노드는 아래의 3가지 상태 중에 하나에 있을 수 있다.
정상 작동: 95% 확률로 정상 상태 유지 | 4.5% 확률로 과부하 상태 전환 | 0.5% 확률로 고장 상태 전환.
과부하: 50% 확률로 정상 상태로 복귀 | 40% 확률로 과부하 상태 유지 | 10% 확률로 고장 상태 전환.
고장: 0% 확률로 정상 상태로 복구 | 0% 확률로 과부하 상태 전환 | 100% 확률로 고장 상태 유지.

확률변수 X_t를 매 초당 네트워크 노드의 상태라고 할 때,

1) 네트워크 노드의 안정상태 확률은?
2) 네트워크 노드가 과부하 상태에서 패킷 손실이 30%이고 고장 상태에서 패킷 손실이 100%라면 전체 네트워크에서 패킷 손실이 발생할 확률은?
3) 네트워크 노드의 정상 데이터 전송 시간이 5ms, 과부하 상태에서는 300ms, 고장 상태의 평균 지연이 5,000ms라고 가정하면 전체 네트워크에서 평균 지연 시간은?

$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}P$

$\pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$

$0.95\pi_a + 0.50\pi_b + 0.00\pi_c = \pi_a$

$0.045\pi_a + 0.40\pi_b + 0.10\pi_c = \pi_b$

$0.005\pi_a + 0.10\pi_b + 0.90\pi_c = \pi_c$

$\pi_j = (0.7692, 0.2115, 0.0193)$

패킷 손실 확률 $= \pi_b \times 0.30 + \pi_c \times 1.00$

$= 0.2115 \times 0.30 + 0.0193 \times 1.00$

$= 0.06345 + 0.0193 = 0.08275$

$\therefore 8.275\%$

네트워크 평균 지연 시간 $= \pi_a \times 5 + \pi_b \times 300 + \pi_c \times 5{,}000$

$= 0.7692 \times 5 + 0.0.2115 \times 300 + 0.0193 \times 5{,}000$

$= 3.846 + 63.45 + 96.5 = 163.796$

$\therefore 163.796ms$

마코프 체인 응용

• 네트워크 패킷 평균 도달 시간

4개의 네트워크 노드(a, b, c, d)는 링크로 구성된 그래프로 표현되고, 패킷이 네트워크를 통해 전송될 때, 각 네트워크 노드들은 아래와 같은 전이 확률을 가진다.

$$a \to b: 0.5, \quad a \to c: 0.5, \quad b \to a: 0.2, \quad b \to b: 0.2, \quad b \to c: 0.3, \quad b \to d: 0.3,$$
$$c \to a: 0.2, \quad c \to b: 0.5, \quad c \to d: 0.3, \quad d \to a: 0.6, \quad d \to b: 0.2, \quad d \to d: 0.2$$

이때, 패킷은 랜덤 워크를 하며 네트워크 내에서 이동한다. 패킷이 노드 a에서 출발해서 목적지 노드 d지 도달하는 데, 걸리는 평균 도달 시간을 계산하라

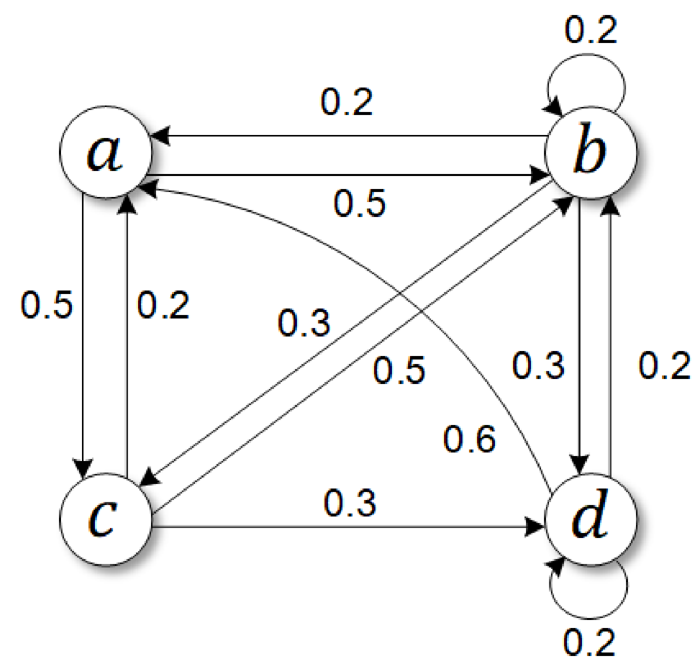
1) 전이확률행렬 정의

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

2) 평균 도달 시간 방정식 정의
노드 d는 흡수상태이므로 평균 도달 시간은 $T(d) = 0$ 이며,
나머지 노드들의 평균 도달 시간은 $T(i) = 1 + \sum_{j \neq d} P(i \to j) \cdot T(j)$ 이다.

- $T(i)$: 노드 i에서 d까지 도달하는 평균 시간
- $P(i \to j)$: 노드 i에서 노드 j로 전이될 확률

시간 단위



마코프 체인 응용

- 네트워크 패킷 평균 도달 시간

4개의 네트워크 노드(a, b, c, d)는 링크로 구성된 그래프로 표현되고, 패킷이 네트워크를 통해 전송될 때, 각 네트워크 노드들은 아래와 같은 전이 확률을 가진다.

$$a \to b: 0.5,\quad a \to c: 0.5,\quad b \to a: 0.2,\quad b \to b: 0.2,\quad b \to c: 0.3,\quad b \to d: 0.3,$$
$$c \to a: 0.2,\quad c \to b: 0.5,\quad c \to d: 0.3,\quad d \to a: 0.6,\quad d \to b: 0.2,\quad d \to d: 0.2$$

이때, 패킷은 랜덤 워크를 하며 네트워크 내에서 이동한다. 패킷이 노드 a에서 출발해서 목적지 노드 d지 도달하는 데, 걸리는 평균 도달 시간을 계산하라

3) 전이확률행렬의 부분 행렬 추출(노드 d에 관한 행렬 삭제)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

4) 평균 도달 시간 연립방정식 계산

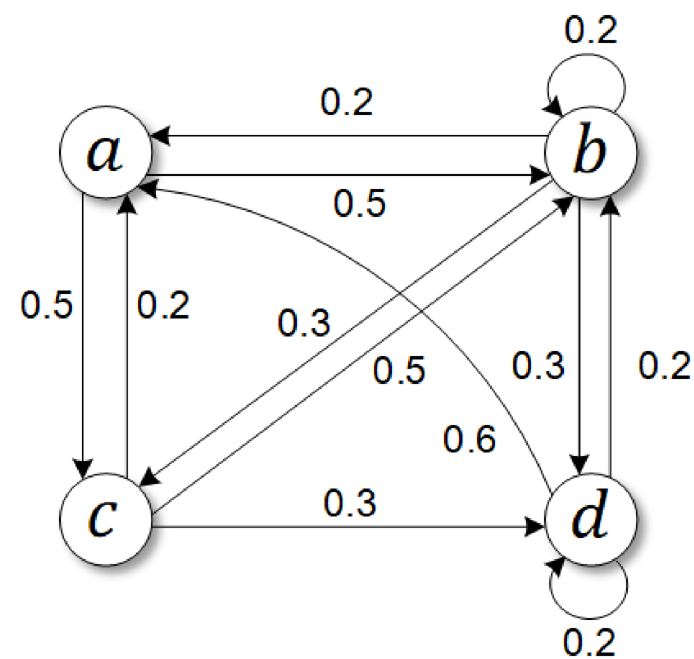
$T(i) = 1 + \sum_{j \neq d} P(i \to j) \cdot T(j)$

$T(a) = 1 + P(a \to b) \cdot T(b) + P(a \to c) \cdot T(c)$

$T(b) = 1 + P(b \to a) \cdot T(a) + P(b \to b) \cdot T(b) + P(b \to c) \cdot T(c)$

$T(c) = 1 + P(c \to a) \cdot T(a) + P(c \to b) \cdot T(b)$

$\therefore T = k + Q \cdot T\ ,\ T = [T(a) \quad T(b) \quad T(c)]^T, k = [1 \quad 1 \quad 1]^T$



마코프 체인 응용

• 네트워크 패킷 평균 도달 시간

4개의 네트워크 노드(a, b, c, d)는 링크로 구성된 그래프로 표현되고, 패킷이 네트워크를 통해 전송될 때, 각 네트워크 노드들은 아래와 같은 전이 확률을 가진다.

$$a \to b: 0.5, \quad a \to c: 0.5, \quad b \to a: 0.2, \quad b \to b: 0.2, \quad b \to c: 0.3, \quad b \to d: 0.3,$$
$$c \to a: 0.2, \quad c \to b: 0.5, \quad c \to d: 0.3, \quad d \to a: 0.6, \quad d \to b: 0.2, \quad d \to d: 0.2$$

이때, 패킷은 랜덤 워크를 하며 네트워크 내에서 이동한다. 패킷이 노드 a에서 출발해서 목적지 노드 d지 도달하는 데, 걸리는 평균 도달 시간을 계산하라

4) 평균 도달 시간 연립방정식 계산

$$\therefore T = k + Q \cdot T \ , T = [T(a) \quad T(b) \quad T(c)]^T, k = [1 \quad 1 \quad 1]^T$$

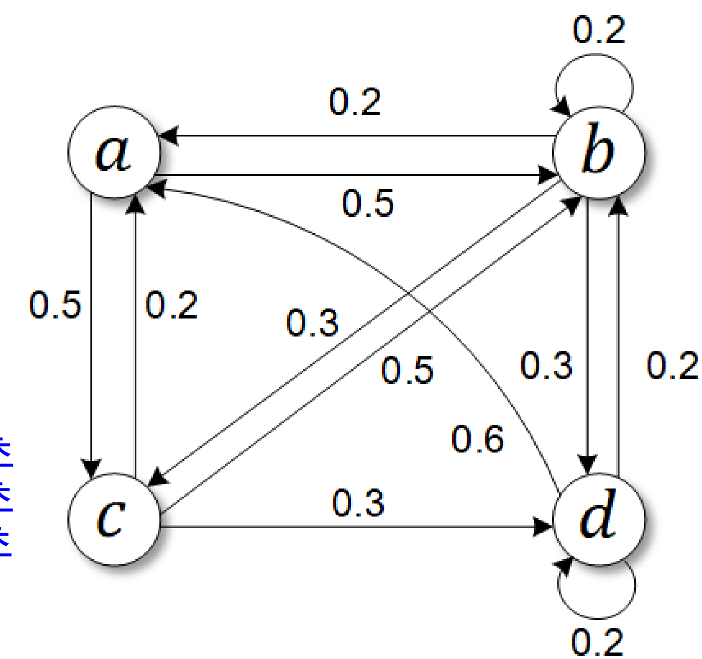
$$T = k + Q \cdot T \ \Rightarrow \ T - Q \cdot T = k \ \Longrightarrow \ (I - Q) \cdot T = k$$

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.2 & 0.8 & -0.3 \\ -0.2 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.2 & 0.8 & -0.3 \\ -0.2 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(a) \\ T(b) \\ T(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

노드 a에서 d까지의 평균 도달 시간: 5초
노드 b에서 d까지의 평균 도달 시간: 4초
노드 c에서 d까지의 평균 도달 시간: 4초

$$T = [T(a) \quad T(b) \quad T(c)]^T = [5.0 \quad 4.0 \quad 4.0]$$



Thanks!

박 재 형 (jaehyoung@pel.sejong.ac.kr)

부록

- MATLAB 코드
  - 이산시간-이산상태 확률과정

```
t = 1:5;
X = [2 4 1 3 2];
figure;
h=stem(t, X, 'filled', 'MarkerSize', 6);
set(h, 'MarkerFaceColor', 'b', 'MarkerEdgeColor', 'b');
title('이산시간-이산상태 확률과정');
xlabel('t (시간)');
ylabel('X_t');
xlim([0 6]); % x축 범위를 0~6로 설정
ylim([0 6]); % y축 범위를 제한

set(gca, 'xtick', 0:6);
set(gca, 'ytick', 0:6);

set(gca, 'xticklabels', {'', '1', '2', '3', '4', '5', '6'});
set(gca, 'yticklabels', {'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6'});

grid on;
```

부록

- MATLAB 코드
  - 연속시간-이산상태 확률과정

```
t_intervals = [0, 2, 4, 6];
states = [1, 4, 3];

figure;
hold on;

for i = 1:length(states)
    line([t_intervals(i), t_intervals(i+1)], [states(i), states(i)], 'LineWidth', 2); end

title('연속시간-이산상태 확률과정');
xlabel('t(일)');
ylabel('X_t');
xlim([0 6]);
ylim([0 6]);
set(gca, 'xtick', 0:1:10);
set(gca, 'xticklabels', {'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6'});
set(gca, 'ytick', 0:6); set(gca, 'yticklabels', {'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6'});
% set(gca, 'xticklabels', {'', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '10'});
% set(gca, 'yticklabels', {'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6'});
grid on;
hold off;
```

부록

- MATLAB 코드
  - 이산시간-연속상태 확률과정

```
t = 0:6;
X = [0.5, 1.7, 2.3, 4.8, 2.7, 4.1, 2.9];

figure;
h=stem(t, X, 'filled', 'MarkerSize', 6);
set(h, 'MarkerFaceColor', 'b');

title('이산시간-연속상태 확률과정');
xlabel('t (시간)');
ylabel('X_t');

xlim([0 6]);
ylim([0 6]);

set(gca, 'xtick', 0:6);
set(gca, 'ytick', 0:6);

set(gca, 'xticklabels', {'', '1', '2', '3', '4', '5', '6'});
set(gca, 'yticklabels', {'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6'});

grid on;
```

부록

- MATLAB 코드
  - 연속시간-연속상태 확률과정

```
t = linspace(0, 6, 100);

time_points = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6];
states = [0.5, 1.7, 2.3, 4.8, 2.7, 4.1, 2.9];

X = interp1(time_points, [0.5, 1.7, 2.3, 4.8, 2.7, 4.1, 2.9], t, 'pchip');

figure;
plot(t, X, 'LineWidth', 3);
title('연속시간-연속상태 확률과정');
xlabel('t (시간)');
ylabel('X_t');
xlim([0 6]);
ylim([0 6]);

set(gca, 'xtick', 0:7);
set(gca, 'ytick', 0:6);
set(gca, 'xticklabels', {'', '1', '2', '3', '4', '5', '6'});
set(gca, 'yticklabels', {'0', '1', '2', '3', '4', '5', '6'});

grid on;
```

부록

- MATLAB 코드
  - 극한확률 π_a (1/2)

```
n = 1:20;
P = [0.89, 0.1, 0.01;
     0, 0.7, 0.3;
     1, 0, 0]; % 전이 확률 행렬

state_prob = [1; 0; 0];

p_aa = zeros(size(n)); % p_{aa}
p_ba = zeros(size(n)); % p_{ba}
p_ca = zeros(size(n)); % p_{ca}

p_aa(1) = state_prob(1);
p_ba(1) = state_prob(2);
p_ca(1) = state_prob(3);

for i = 2:length(n)
    state_prob = P * state_prob; % 전이 확률 계산
    p_aa(i) = state_prob(1); % p_{aa}
    p_ba(i) = state_prob(2); % p_{ba}
    p_ca(i) = state_prob(3); % p_{ca}
end
```

- MATLAB 코드
  - 극한확률 π_a (2/2)

```
figure;
plot(n, p_aa, '-r', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(n, p_ba, '-g', 'LineWidth', 2);
plot(n, p_ca, '-b', 'LineWidth', 2);

yline(0.693, '--k', 'LineWidth', 1.5); % 수렴선

text(n(end), 0.693, '  0.693', 'HorizontalAlignment', 'left', ...
    'VerticalAlignment', 'bottom', 'Color', 'k', 'FontSize', 10);

legend('p_{aa}', 'p_{ba}', 'p_{ca}', 'Steady-State (0.693)', ...
      'Location', 'northeast');
xlabel('Number of steps (n)');
% ylabel('Transition Probabilities p_{ia}');
ylabel('p_{ia}');
grid on;
xlim([2 20]);
ylim([0 1]);
xticks(0:2:20);
yticks(0:0.2:1);
```

부록

- MATLAB 코드
  - 극한확률 π_b (1/2)

```
n = 1:20; P = [0.89, 0.1, 0.01;
    0, 0.7, 0.3;
    1, 0, 0]; % 전이 확률 행렬

state_prob = [0; 1; 0];

p_ab = zeros(size(n)); % p_{ab}
p_bb = zeros(size(n)); % p_{bb}
p_cb = zeros(size(n)); % p_{cb}

p_ab(1) = state_prob(1);
p_bb(1) = state_prob(2);
p_cb(1) = state_prob(3);

for i = 2:length(n)
   state_prob = P * state_prob; % 전이 확률 계산
   p_ab(i) = state_prob(1); % p_{ab}
   p_bb(i) = state_prob(2); % p_{bb}
   p_cb(i) = state_prob(3); % p_{cb}
end
```

부록

- MATLAB 코드
  - 극한확률 π_b (2/2)

```
figure;
plot(n, p_ab, '-r', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(n, p_bb, '-g', 'LineWidth', 2);
plot(n, p_cb, '-b', 'LineWidth', 2);

yline(0.231, '--k', 'LineWidth', 1.5); % 수렴선

text(n(end), 0.231, '  0.231', 'HorizontalAlignment', 'left', ...
    'VerticalAlignment', 'bottom', 'Color', 'k', 'FontSize', 10);
legend('p_{ab}', 'p_{bb}', 'p_{cb}', 'Steady-State (0.231)', ...
      'Location', 'northeast');
xlabel('Number of steps (n)');
ylabel('p_{ib}');
grid on;
xlim([1 20]);
ylim([0 1]);
xticks(0:2:20);
yticks(0:0.2:1);
```

부록

- MATLAB 코드
  - 극한확률 π_c (1/2)

```
n = 1:20;
P = [0.89, 0.1, 0.01;
     0, 0.7, 0.3;
     1, 0, 0]; % 전이 확률 행렬

state_prob = [0; 0; 1];

p_ac = zeros(size(n)); % p_{ac}
p_bc = zeros(size(n)); % p_{bc}
p_cc = zeros(size(n)); % p_{cc}

p_ac(1) = state_prob(1);
p_bc(1) = state_prob(2);
p_cc(1) = state_prob(3);

for i = 2:length(n)
    state_prob = P * state_prob; % 전이 확률 계산
    p_ac(i) = state_prob(1); % p_{ac}
    p_bc(i) = state_prob(2); % p_{bc}
    p_cc(i) = state_prob(3); % p_{cc}
end
```

부록

- MATLAB 코드
  - 극한확률 π_c (2/2)

```
figure;
plot(n, p_ac, '-r', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(n, p_bc, '-g', 'LineWidth', 2);
plot(n, p_cc, '-b', 'LineWidth', 2);

yline(0.076, '--k', 'LineWidth', 1.5); % 수렴선

text(n(end), 0.076, '  0.076', 'HorizontalAlignment', 'left', ...
    'VerticalAlignment', 'bottom', 'Color', 'k', 'FontSize', 10);

legend('p_{ac}', 'p_{bc}', 'p_{cc}', 'Steady-State (0.076)', ...
      'Location', 'northeast');
xlabel('Number of steps (n)');
ylabel('p_{ic}');
grid on;
xlim([1 20]); % x축 0 ~ 20
ylim([0 1]);  % y축 0 ~ 1
xticks(0:2:20); % x축 단위 5
yticks(0:0.2:1); % y축 단위 0.2
```