SEJONG UNIVERSITY
VISION 2030 WORLD TOP100 UNIVERSITY

P.E.L.
ROUGH CONSENSUS & RUNNING CODE

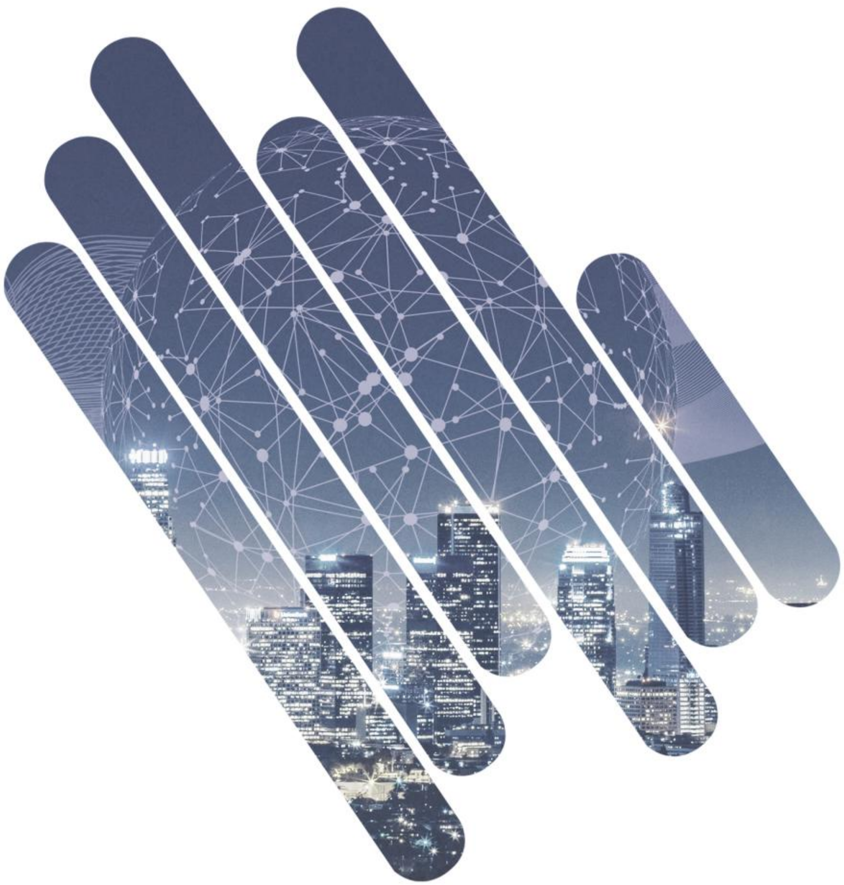
대기행렬의 기초

- 3장. 단일서버 대기행렬 시스템 -

2025.07.10.

Jaehyoung Park
jaehyoung@pel.sejong.ac.kr
Protocol Engineering Lab., Sejong University

CONTENTS



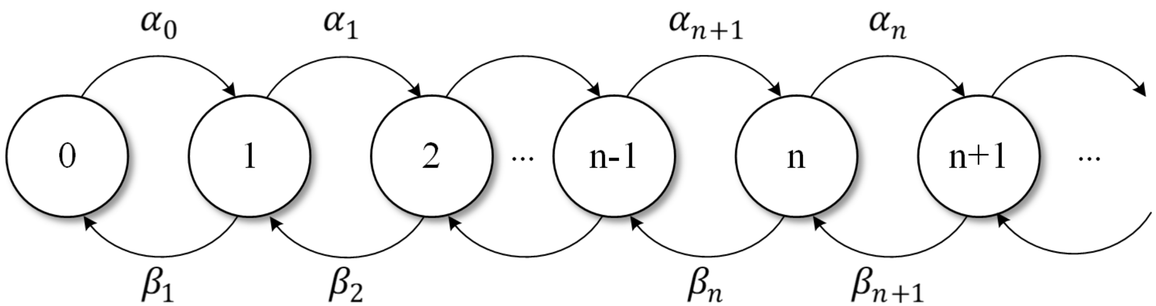
생성소멸과정

I

I 1 생성소멸과정(Birth-Death Process)

A. 정의

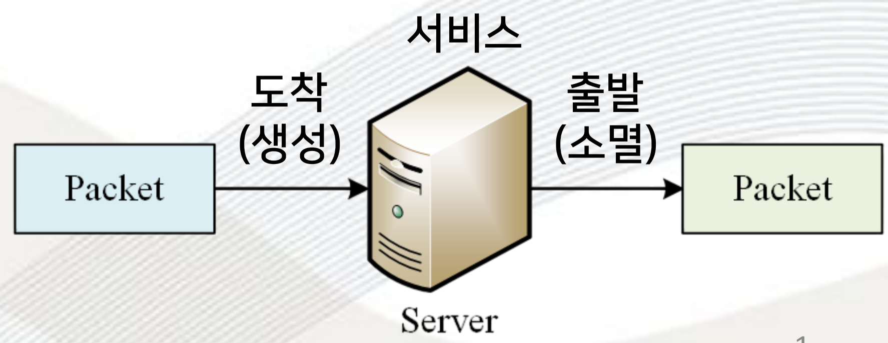
- 상태 전이가 두가지 유형(생성/소멸)으로만 이루어진 연속시간 마코프 과정
  - 생성(Birth): 상태가 $i \rightarrow i + 1$로 변하는 확률적 사건
  - 소멸(Death): 상태가 $i \rightarrow i - 1$로 변하는 확률적 사건



$\lambda_n \rightarrow \alpha_n$: 고객이 n명일 때 평균도착률
$\mu_n \rightarrow \beta_n$: 고객이 n명일 때 평균서비스율

문제 3-1

우리 주변에 생성소멸과정의 예를 두가지 이상 들어서 설명해보자.



B. 수학적 모형화(1/9)

- 파라미터 정의
  - $N(t)$: 시간 t에서 시스템 내에 있는 고객의 수
  - α_n: 시스템 내에 고객이 n명 있을 때 그 시스템으로 들어오는 고객의 평균도착률
  - β_n: 시스템 내에 고객이 n명 있을 때 그 시스템에 있는 고객의 평균서비스율

평균도착률: 단위 시간당 시스템으로 들어오는 고객의 평균적인 수
✓ 고객의 평균도착률 = 고객의 평균도착간격의 역수

평균서비스률: 단위 시간당 시스템에서 서비스되는 고객의 평균적인 수
✓ 고객의 평균서비스율 = 고객의 평균서비스시간의 역수

단위 시간: 시스템이나 관측대상에 따라 시, 분, 초 등으로 나타냄

첨자 n: 고객의 도착과 서비스가 시스템 내의 고객의 수에 의존하는 경우를 고려함

한 시간당 고객의 평균도착률이 3명이라면,
고객의 평균도착간격이 $\frac{1}{3}$시간(즉, 20분)

한 시간당 고객의 평균서비스율이 3명이라면,
고객의 평균서비스시간이 $\frac{1}{3}$시간(즉, 20분)

B. 수학적 모형화(2/9)

α_n는 생성률, β_n는 소멸률, $p_n(t)$는 상태확률이라고 함

- 파라미터 정의
  - $N(t)$: 시간 t에서 시스템 내에 있는 고객의 수
  - α_n: 시스템 내에 고객이 n명 있을 때 그 시스템으로 들어오는 고객의 평균도착률
  - β_n: 시스템 내에 고객이 n명 있을 때 그 시스템에 있는 고객의 평균서비스율
  - $p_n(t)$: 시간 t에서 시스템 내의 고객의 수 $N(t)$가 n명 있을 확률

$$p_n(t) = \Pr\{N(t) = n\}$$

시간에 따라 다른 상태로 어떻게 변하는지 설명하는 식

- 상태전이방정식(State Transition Equation)
  - 가정사항: 아주 작은 크기의 시간구간 δt 동안에 시스템에서는 <u>고객의 새로운 도착</u> 혹은 <u>고객의 서비스 종료</u>의 두가지 사건 중 어느 한 사건 밖에 일어나지 않음

$$\begin{aligned}
&p_0(t+\delta t) = p_0(t)(1-\alpha_0\delta t) + p_1(t)\beta_1\delta t,\\
&p_1(t+\delta t) = p_0(t)\alpha_0\delta t + p_1(t)(1-\alpha_1\delta t)\,(1-\beta_1\delta t) + p_2(t)\beta_2\delta t\\
&\vdots\\
&p_n(t+\delta t) = p_{n-1}(t)\alpha_{n-1}\delta t + p_n(t)(1-\alpha_n\delta t)\,(1-\beta_n\delta t) + p_{n+1}(t)\beta_{n+1}\delta t
\end{aligned}$$

B. 수학적 모형화(3/9)

α_n: 고객의 평균도착률
β_n: 고객의 평균서비스율

- 상태전이방정식(State Transition Equation)
  - $p_0(t+\delta t)$: 시간 $t+\delta t$에서 시스템 내에 고객이 한명도 없을 확률
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 한 명도 없었고($p_0(t)$), 이후 시간 δt 동안에도 시스템에 고객이 한 명도 도착하지 않았을 경우($1-\alpha_0\delta t$)
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 한 명 있었고($p_1(t)$), 이후 시간 δt 동안에 해당 고객이 서비스를 받고 시스템을 떠나버린 경우($\beta_1\delta t$)

  - $p_1(t+\delta t)$: 시간 $t+\delta t$에서 시스템 내에 고객이 한명이 있을 확률
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 한 명도 없었고($p_0(t)$), 이후 시간 δt 동안에도 시스템에 고객이 한 명 도착한 경우($\alpha_0\delta t$)
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 한 명이 있었는데($p_1(t)$), 이후 시간 δt 동안에도 서비스가 끝나지 않은 경우($(1-\alpha_1\delta t)(1-\beta_1\delta t)$)
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 두 명 있었고($p_2(t)$), 이후 시간 δt 동안에 고객 한 명이 서비스를 마치고 시스템을 떠나버린 경우($\beta_2\delta t$)

$$p_0(t+\delta t) = p_0(t)(1-\alpha_0\delta t) + p_1(t)\beta_1\delta t,$$
$$p_1(t+\delta t) = p_0(t)\alpha_0\delta t + p_1(t)(1-\alpha_1\delta t)\,(1-\beta_1\delta t) + p_2(t)\beta_2\delta t$$
$$\vdots$$
$$p_n(t+\delta t) = p_{n-1}(t)\alpha_{n-1}\delta t + p_n(t)(1-\alpha_n\delta t)\,(1-\beta_n\delta t) + p_{n+1}(t)\beta_{n+1}\delta t$$

B. 수학적 모형화(4/9)

시간의 미소한 차이에 따른 상태변화를 구하기 위해 미분방정식(Differential Equation) 활용

- 상태전이방정식(State Transition Equation)

$$p_0(t+\delta t) = p_0(t)(1-\alpha_0\delta t) + p_1(t)\beta_1\delta t,$$
$$p_1(t+\delta t) = p_0(t)\alpha_0\delta t + p_1(t)(1-\alpha_1\delta t)(1-\beta_1\delta t) + p_2(t)\beta_2\delta t$$
$$\vdots$$
$$p_n(t+\delta t) = p_{n-1}(t)\alpha_{n-1}\delta t + p_n(t)(1-\alpha_n\delta t)(1-\beta_n\delta t) + p_{n+1}(t)\beta_{n+1}\delta t$$

시간이 δt 만큼 흘렀을 때, $p_0(t)$ 가 얼마나 변하는가?

미분

시간 t에서 $p_0(t)$의 변화율

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{p_0(t+\delta t)-p_0(t)}{\delta t}$$

$$p_0(t+\delta t) = p_0(t)(1-\alpha_0\delta t) + p_1(t)\beta_1\delta t$$
$$p_0(t+\delta t) - p_0(t) = -p_0(t)\alpha\delta t + p_1(t)\beta_1\delta t$$
$$\frac{p_0(t+\delta t)-p_0(t)}{\delta t} = -\alpha_0 p_0(t) + \beta_1 p_1(t)$$

$\delta t \to 0$ 이므로, δt를 무시

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\alpha_0 p_0(t) + \beta_1 p_1(t),$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \alpha_0 p_0(t) - (\alpha_1+\beta_1)p_1(t) + \beta_2 p_2(t),$$
$$\vdots$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \alpha_{n-1}p_{n-1}(t) - (\alpha_n+\beta_n)p_1(t) + \beta_2 p_2(t)$$

B. 수학적 모형화(5/9)

- 평행상태(Steady State)
  - 시간이 충분히 지난 후($t \to \infty$)에는 시스템에 들어오고 나가는 고객의 평균이 같아짐에 따라 시간의 변화가 시스템에 영향을 미치지 않게 되는 상태
    - 시간의 정보가 필요 없게 됨
    - 시간의 변화에 대한 시스템 상태 변화율은 0이 됨

$$p_n(t) \to p_n, \qquad \frac{dp_n(t)}{dt} \to 0$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\alpha_0 p_0(t) + \beta_1 p_1(t),$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \alpha_0 p_0(t) - (\alpha_1 + \beta_1) p_1(t) + \beta_2 p_2(t),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \alpha_{n-1} p_{n-1}(t) - (\alpha_n + \beta_n) p_1(t) + \beta_2 p_2(t)$$

$$0 = -\alpha_0 p_0 + \beta_1 p_1,$$

$$0 = \alpha_0 p_0 - (\alpha_1 + \beta_1) p_1 + \beta_2 p_2,$$

$$\vdots$$

$$0 = \alpha_{n-1} p_{n-1} - (\alpha_n + \beta_n) p_1 + \beta_2 p_2$$

B. 수학적 모형화(6/9)

- 평행상태(Steady State)
  - 시간이 충분히 지난 후($t \rightarrow \infty$)에는 시스템에 들어오고 나가는 고객의 평균이 같아짐에 따라 시간의 변화가 시스템에 영향을 미치지 않게 되는 상태
    - 시간의 정보가 필요 없게 됨
    - 시간의 변화에 대한 시스템 상태 변화율은 0이 됨

$$0 = -\alpha_0 p_0 + \beta_1 p_1,$$
$$0 = \alpha_0 p_0 - (\alpha_1 + \beta_1) p_1 + \beta_2 p_2,$$
$$\vdots$$
$$0 = \alpha_{n-1} p_{n-1} - (\alpha_n + \beta_n) p_1 + \beta_2 p_2$$

$$p_1 = \frac{\alpha_0}{\beta_1} p_0,$$
$$p_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_2} p_1 = \frac{\alpha_1 \alpha_0}{\beta_2 \beta_1} p_0,$$
$$\vdots$$
$$p_n = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{n-1}} p_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{\beta_1} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\beta_1 \beta_2} + \cdots}$$

$$p_n = \frac{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{\beta_1} + \frac{\alpha_0 \alpha_1}{\beta_1 \beta_2} + \cdots}, n \geq 0$$

모든 n에 대하여 시스템 내의 고객 수를 나타내는 확률 p_n, $n = 0, 1, \cdots$을 구할 수 있게 되었으나, 고객의 평균도착률과 평균서비스 시간이 시스템의 상태마다 다를 경우에는 식이 복잡하다.

B. 수학적 모형화(7/9)

- 평균트래픽강도(Average Traffic Intensity)
  - $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$
  - 고객의 평균도착률과 평균서비스시간의 곱
  - 시스템에 가해지는 부하(Offered Load)를 의미
  - 가정사항: 고객의 평균도착률과 평균서비스시간이 시스템의 상태와 무관하게 일정함
    - $\alpha_n = \alpha$
    - $\beta_n = \beta$

대부분의 문제에서 고객의 평균도착률과 평균서비스시간이 시스템에 상태에 의존하는 경우보다는 그렇지 않은 경우가 더 많다.

$$p_0 = \frac{1}{1+\frac{\alpha_0}{\beta_1}+\frac{\alpha_0\alpha_1}{\beta_1\beta_2}+\cdots} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{1}{1+\rho+\rho^2+\cdots} = 1-\rho$$

$$p_n = \frac{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\frac{1}{1+\frac{\alpha_0}{\beta_1}+\frac{\alpha_0\alpha_1}{\beta_1\beta_2}+\cdots}, n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad p_n = \rho^n(1-\rho)$$

B. 수학적 모형화(8/9)

- 평균트래픽강도(Average Traffic Intensity)
  - $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$
  - 고객의 평균도착률과 평균서비스시간의 곱
  - 시스템에 가해지는 부하(Offered Load)를 의미
  - 가정사항: 고객의 평균도착률과 평균서비스시간이 시스템의 상태와 무관하게 일정함

문제 3-2

위의 식에 대하여 물리적인 의미를 논하라. 즉, 위의 함수는 무슨 함수이며 그 의미는 무엇인가?

시스템 부하 $\rho = \frac{\text{고객의 평균도착률}}{\text{고객의 평균서비스율}} = \frac{\alpha}{\beta}$

✓ $\rho < 1$: 대기열이 안정상태 => 고객을 제때 처리 가능
✓ $\rho = 1$: 대기열이 포화상태 => 고객의 도착과 처리 속도가 동일
✓ $\rho > 1$: 대기열이 불안정상태 => 처리 속도 보다 고객의 도착이 빠름

평행상태확률 $p_n = \rho^n(1-\rho)$
p_n = 시스템에 정확히 n명의 고객이 존재할 확률
$(1-\rho)$ = 시스템이 완전히 비어 있을 확률
ρ^n = 시스템 내에 존재하는 고객에 따른 상태
✓ 고객 수 n에 따라 지수적으로 감소
✓ n이 클수록 확률 값은 작아짐
e.g., $\rho^1 = 0.5, \rho^2 = 0.25, \rho^3 = 0.125, \rho^4 = 0.0625$

B. 수학적 모형화(9/9)

- 평균트래픽강도(Average Traffic Intensity)
  - $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$
  - 고객의 평균도착률과 평균서비스시간의 곱
  - 시스템에 가해지는 부하(Offered Load)를 의미
  - 가정사항: 고객의 평균도착률과 평균서비스시간이 시스템의 상태와 무관하게 일정함

$p_n = \rho^n(1-\rho)$

예제 3-1

고객의 평균도착률이 시간 당 2명이고 고객의 평균서비스 시간이 20분인 시스템이 있다. 이때, 관측자가 임의로 관측해본 결과 시스템 내에 고객이 한 명도 없을 확률은 얼마인가?
그리고 이 시스템에서 시스템 내에 고객이 5명이 있을 확률은 얼마인가?

시스템 부하 $\rho = 2 \times \frac{20}{60} = \frac{2}{3}$

시스템 내에 고객이 한 명도 없을 확률은 $p^n = \rho^n(1-\rho)$에서 $n = 0$인 경우, $p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = 33.33\%$

시스템 내에 고객이 5명 있을 확률은 $p^n = \rho^n(1-\rho)$에서 $n = 5$인 경우, $p_5 = \rho^5(1-\rho) = \left(\frac{2}{3}\right)^5\left(1-\frac{2}{3}\right) = 4.39\%$

$M/M/1$ 큐

Ⅱ

A	/	B	/	c	/	K	/	P
도착 시간 확률분포		서비스 시간 확률 분포		서버 수 (채널 수)		시스템 수용 고객 수		고객 모집단 크기

기호	의미
M	• 지수분포 • 마코프 프로세스로도 불림 • 연속적인 랜덤 도착을 뜻함 • 도착 간격이 지수분포를 따름

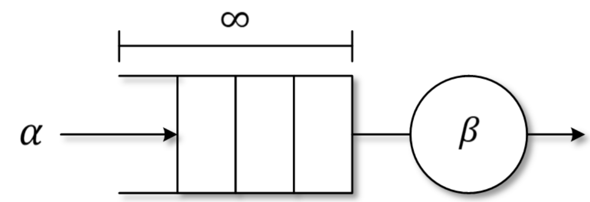
A. 개요

- 단일 서버를 갖는 시스템의 대기행렬에 대한 확률 모델
  - 고객의 도착과정: 고객의 도착간격을 확률변수 X라고 정의하면, 확률밀도함수는 $\alpha e^{-\alpha x}$로 주어지고 평균 도착 간격이 $\frac{1}{\alpha}$인 지수분포를 따름
    (여기서, 단위 시간당 고객의 도착 횟수는 평균 α인 푸아송분포를 따름)
  - 고객의 서비스시간: 고객의 서비스시간을 확률변수 Y라고 정의하면, 확률밀도함수는 $\beta e^{-\beta y}$로 주어지고 평균 서비스시간이 $\frac{1}{\beta}$인 지수분포를 따름
  - 서버의 개수: 시스템 내의 서버 개수는 1
  - 버퍼의 고객 수: 고객의 대기공간인 버퍼의 크기는 무한대
    - 시스템 내의 고객의 수는 $n = 0, 1, 2, \cdots, \infty$까지 정의될 수 있음

앞에서 설명된 생성소멸과정에서 고객의 도착간격과 서비스 시간의 확률밀도함수가 지수분포를 따르는 경우가 $M/M/1$ 큐 모델이다.

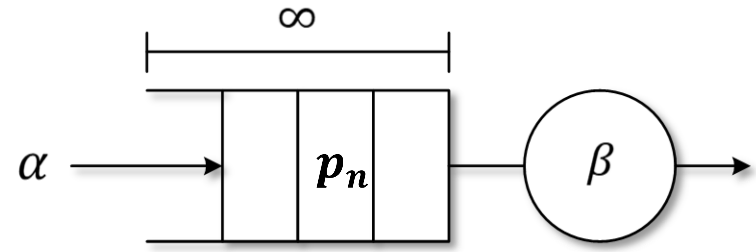
지수분포 확률밀도함수: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (모수 λ는 단위시간 당 사건 발생 확률)

$M/M/1$ 큐 모델의 해석은 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우와 그렇지 않은 경우로 나눌 수 있다.



B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 상태확률(1/4)
  - $p_n = \rho^n(1-\rho)$
    - $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$
    - $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha$
    - $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta$



대부분의 공학계에서 새로운 고객의 도착률은 시스템 내의 고객 수와 무관하다.
예를 들어, 우리가 화장실이나 쇼핑을 갈 때, 그 곳의 사람 수를 알아보지는 않는다.
즉, 대부분의 시스템은 독립적으로 그리고 자발적으로 동작한다.

문제 3-3

대기행렬 시스템의 부하 ρ는 1보다 작아야 한다. 그 이유는 무엇인가?

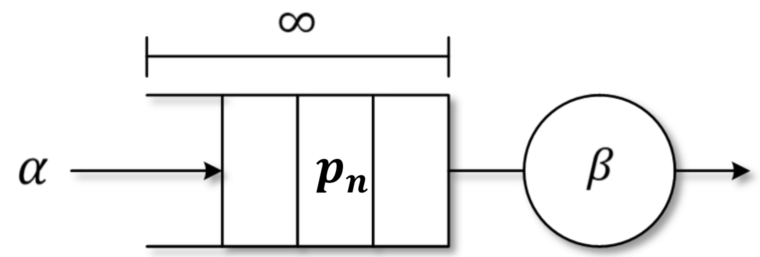
$\rho < 1$이면 서비스 시간이 고객의 도착보다 빠르므로, 대기열이 언젠가 줄어 듬 = 평행상태확률이 존재함(무한급수 수렴)

$\rho \geq 1$이면 고객의 도착이 서비스 시간 보다 같거나 더 빨라서 대기열이 늘어남 = 평행상태확률이 존재하지 않음

$\rho < 1$ 는 시스템이 안정적으로 동작할 수 있음을 의미한다. 만약 $\rho \geq 1$이면 시스템이 평행상태에
도달하지 못하고 과부화된다.

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 상태확률(2/4)
  - $p_n = \rho^n(1-\rho)$
    - $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$
    - $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha$
    - $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta$



예제 3-2

고객의 평균도착률이 시간당 10명이고, 고객의 평균서비스시간이 5분인 $M/M/1$ 큐에서 시스템 내에 고객이 한 명도 없을 확률은 얼마인가? 그리고 10명이 있을 확률은 얼마인가?

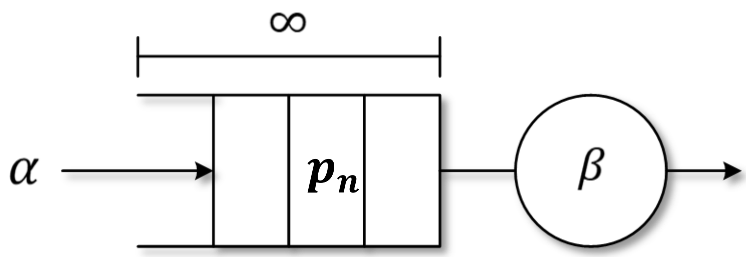
시스템 부하 $\rho = 10 \times \frac{5}{60} = \frac{5}{6}$

시스템 내에 고객이 한 명도 없을 확률 $p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = 16.67\%$

시스템 내에 고객이 10명 있을 확률 $p_{10} = \rho^{10}(1-\rho) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}\left(\frac{1}{6}\right) = 2.69\%$

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 상태확률(3/4)
  - $p_n = \rho^n(1-\rho)$
    - $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$
    - $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha$
    - $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta$



문제 3-4

고객의 평균도착률이 시간당 10명이고, 고객의 평균서비스시간이 5분인 $M/M/1$ 큐에서 시스템 내에 고객이 한 명도 없을 확률이 10명이 있을 확률보다 큰이유는 무엇인지 물리적 의미를 논하라.

고객의 평균도착률 $\alpha = \frac{10\text{명}}{\text{시간}}$

고객의 평균서비스시간 5분 $= \frac{1}{12}$시간

고객의 서비스율 $\beta = \frac{12\text{명}}{\text{시간}}$

평균트래픽강도 $\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0.833$

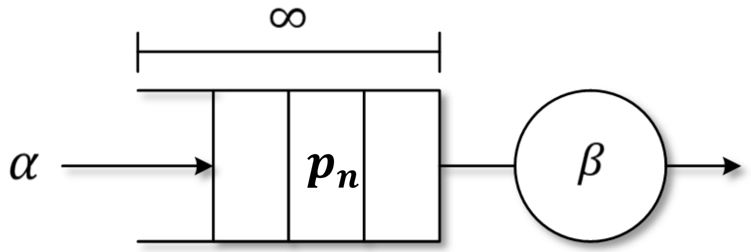
고객이 한 명도 없을 확률 $p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\alpha}{\beta} \approx 0.1667$

고객이 10명 있을 확률 $p_{10} = \rho^n(1-\rho) = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{10} \approx 0.0269$

- ✓ $\beta > \alpha$ 이므로, $p_0 > p_{10}$가 성립함
- ✓ β가 α보다 크면, 대부분의 시간 동안 시스템은 안정적으로 고객을 처리함
- ✓ 시스템에 고객이 10명이 대기하는 경우보다 고객이 아에 없는 경우가 자주 발생함

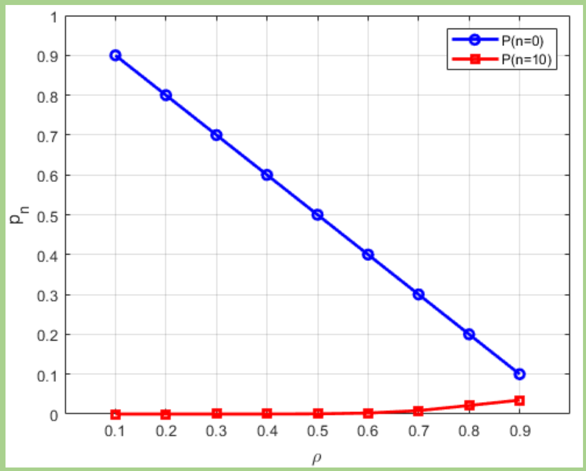
B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 상태확률(4/4)
  - $p_n = \rho^n(1-\rho)$
    - $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$
    - $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha$
    - $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta$



문제 3-5

$M/M/1$ 큐에서 평균부하가 0.1에서 0.9까지 변화할 때, 시스템 내에 고객이 한 명도 없을 확률과 10명이 있을 확률을 각각 구하여서 그래프로 나타내고 결과를 관찰하라



$p_0 = 1 - \rho$
- 파란선: 선형적으로 감소함
- 부하가 증가할 수록 시스템에 고객이 없는 상태일 확률이 줄어듬

$p_{10} = \rho^{10}(1-\rho)$
- 빨간선: 지수적으로 증가함
- 부하가 증가할 수록 시스템에 고객이 10명 있을 확률이 증가함

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 내의 평균고객의 수
  - $E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$
    $= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$
    $= (1-\rho)(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots) = \frac{\rho}{1-\rho}$

예제 3-3

고객의 평균도착률이 시간당 10명이고 고객의 평균서비스시간이 5분인 시스템에서 시스템 내에 존재하는 고객의 평균수를 구하여라

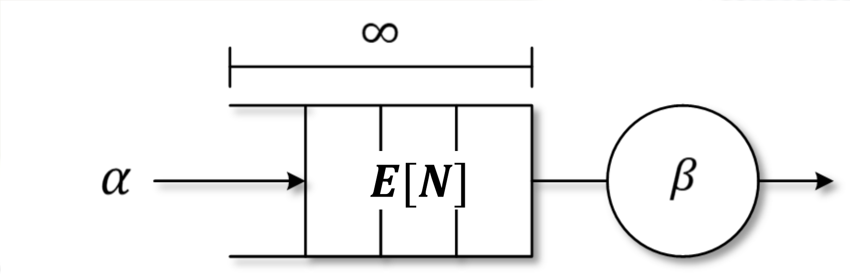
고객의 평균도착률 $\alpha = \frac{10\text{명}}{\text{시간}}$

고객의 평균서비스시간 5분 $= \frac{1}{12}$시간

고객의 서비스율 $\beta = \frac{12\text{명}}{\text{시간}}$

평균트래픽강도 $\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0.833$

$$\therefore E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$$



B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 내 체재시간(System Sojourn Time)의 분포함수(1/5)
  - 새로운 고객이 도착하여 자신 앞에 n명의 고객이 있을 경우, 고객이 시스템 내에서 머물러야 하는 시간에 대한 분포함수
  - 체재시간 T: 새로 도착한 한 명의 고객 뿐만 아니라 그 고객 앞에 이미 도착하여 기다리고 있는 n명의 고객이 서비스를 받을 때까지 걸리는 시간의 합
  - $\Omega(t) = P\{T > t\} = \exp\{-t(\beta - \alpha)\}$

고객마다 서비스를 받는 데 걸리는 시간이 다르기 때문에 고객의 수가 작다고 해서 대기 행렬이 빨리 줄어드는 것은 아니다. 예를 들어, 할인마트에서 고객에 따라 사는 물건의 양이 다르므로 계산대에 줄서 있는 고객의 수가 작다고 해서 실제로 기다려야 하는 시간이 작지만은 않다. 따라서, 시스템 내의 고객의 수와는 별도로 실제로 시스템 내에서 기다려야 하는 체재시간을 다루어야 한다.

$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$을 평균서비스시간이 $\frac{1}{\beta}$인 독립적이고 동일한 확률분포를 가지는 고객의 서비스시간을 나타내는 랜덤변수로 정의하면, $\sum_{i=1}^{n} X_i$는 (n, β)를 가지는 감마분포를 따르며, 이때, n명의 고객을 서비스하는 데 걸리는 시간의 확률밀도함수 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t) = \frac{\beta e^{-\beta t}(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\beta e^{-\beta t}(\beta t)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

감마분포: 평균소요시간이 x인 사건이 y번 일어날때까지의 대기시간에 대한 확률분포

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 내 체재시간(System Sojourn Time)의 분포함수(2/5)
  - 새로운 고객이 도착하여 자신 앞에 n명의 고객이 있을 경우, 고객이 시스템 내에서 머물러야 하는 시간에 대한 분포함수
  - $\Omega(t) = P\{T > t\} = \exp\{-t(\beta - \alpha)\}$

$X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$을 평균서비스시간이 $\frac{1}{\beta}$인 독립적이고 동일한 확률분포를 가지는 고객의 서비스시간을 나타내는 랜덤변수로 정의하면, $\sum_{i=1}^{n} X_i$는 (n, β)를 가지는 감마분포를 따르며, 이때, n명의 고객을 서비스하는 데 걸리는 시간의 확률밀도함수 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t) = \frac{\beta e^{-\beta t}(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\beta e^{-\beta t}(\beta t)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

위의 수식을 활용하여, 새로운 고객이 도착하여 자신 앞에 n명의 고객이 있을 경우를 고려하면 고객의 수는 $n+1$이고, 고객 한 명의 평균서비스율은 β라고 할 때, T는 규모 매개변수(Scale Parameter) β를 가지는 $n+1$차 감마분포를 따른다. 즉, $T = \tau$일 확률은 다음과 같이 나타낸다.

$$P = \{T = \tau\} = p(\tau) = \frac{\beta^{n+1}\tau^{n}e^{-\beta\tau}}{\Gamma(n+1)}$$

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 내 체재시간(System Sojourn Time)의 분포함수(3/5)
  - 새로운 고객이 도착하여 자신 앞에 n명의 고객이 있을 경우, 고객이 시스템 내에서 머물러야 하는 시간에 대한 분포함수
  - $\Omega(t) = P\{T > t\} = \exp\{-t(\beta - \alpha)\}$

$$P = \{T = \tau\} = p(\tau) = \frac{\beta^{n+1}\tau^n e^{-\beta\tau}}{\Gamma(n+1)}$$

전확률의 법칙 (Principle of Total Probability) 적용
$P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

$$P = \{T \le t|\text{시스템 내의 } n\text{명의 고객이 존재}\} = \int_0^t P\{T = \tau\}d\tau$$

$$P\{T \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{T \le t|\text{시스템의 상태}= n\} \times P\{\text{시스템의 상태}= n\}$$

수열의 합과 적분 순서 정렬
$\beta^{n+1} = \beta \cdot \beta^n$
$\alpha = \beta\rho$
$(\beta\rho)^n = \alpha^n$

$$P\{T \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\beta^{n+1}\tau^n e^{-\beta\tau}}{\Gamma(n+1)} d\tau \rho^n(1-\rho)$$

$$P\{T \le t\} = \int_0^t \beta e^{-\beta\tau}(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n\alpha^n}{\Gamma(n+1)} d\tau$$

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 내 체재시간(System Sojourn Time)의 분포함수(4/5)
  - 새로운 고객이 도착하여 자신 앞에 n명의 고객이 있을 경우, 고객이 시스템 내에서 머물러야 하는 시간에 대한 분포함수
  - $\Omega(t) = P\{T > t\} = \exp\{-t(\beta - \alpha)\}$

$$P\{T \leq t\} = \int_0^t \beta e^{-\beta\tau}(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau^n\alpha^n}{\Gamma(n+1)}d\tau$$

$$\begin{aligned} P\{T \leq t\} &= \int_0^t \beta e^{-\beta\tau}(1-\rho)\, e^{\tau\alpha} d\tau \\ &= \int_0^t (1-\rho)\beta \exp\{-\tau\beta(1-\rho)\} d\tau \\ &= 1 - \exp\{-t(\beta-\alpha)\} \end{aligned}$$

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 내 체재시간(System Sojourn Time)의 분포함수(5/5)
  - 새로운 고객이 도착하여 자신 앞에 n명의 고객이 있을 경우, 고객이 시스템 내에서 머물러야 하는 시간에 대한 분포함수
  - $\Omega(t) = P\{T > t\} = \exp\{-t(\beta - \alpha)\}$

$P\{T \le t\} = 1 - \exp\{-t(\beta - \alpha)\}$

예제 3-4

고객의 평균도착률이 시간당 10명이고 고객의 평균서비스시간이 5분인 $M/M/1$ 큐 시스템에서 고객이 시스템 내에서 머무는 시간이 0일 확률은 얼마인가? 한편, 30분이상 머무를 확률은 얼마인가?

고객의 평균도착률 $\alpha = \frac{10\text{명}}{\text{시간}}$

고객의 평균서비스시간 5분 $= \frac{1}{12}$시간

고객의 서비스율 $\beta = \frac{12\text{명}}{\text{시간}}$

평균트래픽강도 $\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0.833$

$\therefore P\{T = 0\} = 1 - P\{T > t, \text{단 } t = 0\}$
$= 1 - e^{t(\beta-\alpha)}|t = 0 = 1 - e^{0} = 0\%$

$\therefore P\{T = 0.5\} = P\{T > t, \text{단 } t = 0.5 \text{ 시간}\}$
$= e^{-0.5(12-10)} = e^{-1} = 37\%$

고객이 시스템에 도착하였을 때 시스템이 비어 있다고 하더라도 고객은 적어도 시스템에 들어가서 나올 때까지 자기 자신이 서비스를 받는 동안은 시간을 소비해야 한다. 따라서, 고객이 시스템에서 머무르는 시간이 0일 확률은 0이다.

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 내에서의 평균체재시간(1/2)
  - $E[T] = \int_0^\infty tp(t)dt = \int_0^\infty p(t > \tau)d\tau = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\beta(1-\rho)}$

예제 3-5

고객의 평균도착률이 시간당 10명이고 고객의 평균서비스시간이 5분인 $M/M/1$ 큐 시스템에서 어느 고객이 시스템 내에서 머무르는 시간은 평균적으로 얼마인가?

고객의 평균도착률 $\alpha = \frac{10명}{시간}$

고객의 평균서비스시간 5분 $= \frac{1}{12}$시간

고객의 서비스율 $\beta = \frac{12명}{시간}$

평균트래픽강도 $\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0.833$

$\therefore E[T] = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{12-10} = \frac{1}{2} = 0.5$시간$= 30$분

$\therefore E[T] = \frac{E[N]}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1-\rho} = \frac{1}{\beta(1-\rho)} = \frac{1}{12\left(1-\frac{5}{6}\right)}$

$= \frac{1}{2} = 0.5$시간$= 30$분

리틀의 공식 활용

리틀의 공식 활용
$L = \lambda \times E[W]$
$E[N] = \alpha \times E[T]$

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 시스템 내에서의 평균체재시간(2/2)
  - $E[T] = \int_0^\infty tp(t)dt = \int_0^\infty p(t > \tau)d\tau = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\beta(1-\rho)}$

예제 3-6

고객의 평균도착률이 시간당 10명이고 고객의 평균서비스시간이 5분인 $M/M/1$ 큐 시스템에서 도착 고객이 서비스를 받기까지 걸리는 평균대기시간 W을 구하여라

고객의 평균도착률 $\alpha = \frac{10명}{시간}$

고객의 평균서비스시간 5분 $= \frac{1}{12}$시간

고객의 서비스율 $\beta = \frac{12명}{시간}$

평균트래픽강도 $\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0.833$

W = 시스템 내 평균체류시간 – 서비스 시간

$= E[T] - E[S] = \frac{1}{\beta(1-\rho)} - \frac{1}{\beta}$

$= \frac{1}{12\left(1-\frac{5}{6}\right)} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12\left(\frac{1}{6}\right)} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$시간

$\therefore$ 25분

고객이 서비스를 받기 직전까지 버퍼에서 기다려야하는 평균대기시간은 시스템 내 체재시간에서 서비스를 받는데 걸리는 시간을 빼야함

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 고객 대기시간(Waiting Time)의 분포함수(1/4)
  - 새로운 고객이 시스템에 도착하여 서비스 받을 때까지 대기열에서 기다리는 시간에 대한 분포함수
  - $\Psi(x) = P\{W_Q > x\} = \rho e^{-(\beta-\alpha)x}$

임의의 시간 t에서 고객의 대기시간을 $W_Q(t)$로 정의하고, $W_Q(t)$가 x보다 클 확률은 꼬리분포함수(Tail Distribution Function)로 표현할 수 있다.

$$\Psi(x) = P\{W_Q(t) > x\}$$

확률이론에서는 확률변수가 임계치보다 큰 값을 구할 때, 그와 반대의 과정으로 확률변수가 임계치보다 작을 확률 값을 구하는 것으로 문제를 해결할 수 있다.

$$F(x) = 1 - \Psi(x) = 1 - P\{W_Q(t) > x\} = P\{W_Q(t) \le x\}$$

$$P\{W_Q(t) \le x\} = P\{W_Q(t) = 0\} + P\{0 < W_Q(t) \le x\}$$

$$P\{W_Q(t) = 0\} + P\{0 < W_Q(t) \le x\}$$
$$= p_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \int_0^x e^{-\beta y} \beta^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy$$

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 고객 대기시간(Waiting Time)의 분포함수(2/4)
  - 새로운 고객이 시스템에 도착하여 서비스 받을 때까지 대기열에서 기다리는 시간에 대한 분포함수
  - $\Psi(x) = P\{W_Q > x\} = \rho e^{-(\beta-\alpha)x}$

$$P\{W_Q(t) = 0\} + P\{0 < W_Q(t) \le x\}$$
$$= p_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \int_0^x e^{-\beta y} \beta^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy$$

여기서, $e^{-\beta y} \beta^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}$는 n명의 고객에 의한 대기시간의 확률밀도함수이며, 고객 각각의 서비스시간이 지수함수분포를 따르는 경우, n명의 고객에 대한 서비스시간의 합의 밀도함수가 얼랑분포를 따른다.

얼랑분포: 평균소요시간이 x인 사건이 y번 일어날때까지의 총 대기시간에 대한 확률분포

$$p_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \int_0^x e^{-\beta y} \beta^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy$$
$$= (1-\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \int_0^x e^{-\beta y} \beta^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy = 1 - \rho e^{-(\beta-\alpha)x}$$

$\rho < 1$ 조건하에서 시스템은 안정적으로 동작하므로 시간이 충분히 지난 다음의 시스템 상태는 시간에 무관하게 됨에 따라 $W_Q(t) \to W_Q$로 나타낼 수 있다.

$$\therefore \Psi(x) = P\{W_Q > x\} = \rho e^{-(\beta-\alpha)x}$$

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 고객 대기시간(Waiting Time)의 분포함수(3/4)
  - 새로운 고객이 시스템에 도착하여 서비스 받을 때까지 대기열에서 기다리는 시간에 대한 분포함수
  - $\Psi(x) = P\{W_Q > x\} = \rho e^{-(\beta-\alpha)x}$
  - 고객의 대기시간 $\mathrm{E}[W_Q] = \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)}$

$$\mathrm{E}[W_Q] = \int_0^\infty \Psi(x)dx = \int_0^\infty \rho e^{-(\beta-\alpha)x}dx$$
$$= \rho \cdot \left[\frac{1}{\beta-\alpha}\right] = \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)}$$

B. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 무관한 경우

- 고객 대기시간(Waiting Time)의 분포함수(4/4)
  - 새로운 고객이 시스템에 도착하여 서비스 받을 때까지 대기열에서 기다리는 시간에 대한 분포함수
  - $\Psi(x) = P\{W_Q > x\} = \rho e^{-(\beta-\alpha)x}$

예제 3-7

M/M/1 큐 평행상태에서 고객의 평균도착률이 시간당 10명이고 고객의 평균서비스 시간이 5분인 시스템에서 고객이 기다리는 시간이 0일 확률은 얼마인가? 그리고, 30분 이상 기다릴 확률은 얼마인가?

고객의 평균도착률 $\alpha = \frac{10명}{시간}$

고객의 평균서비스시간 5분 $= \frac{1}{12}$시간

고객의 서비스율 $\beta = \frac{12명}{시간}$

평균트래픽강도 $\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0.833$

$\therefore P\{W_Q = 0\} = 1 - P\{W_Q > 0\} = 1 - \frac{5}{6}e^{-(12-10)0} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = 16\%$

$\therefore P\{W_Q > 30분\} = \frac{5}{6}e^{-(12-10)0.5} = \frac{5}{6}e^{-1} = 30.83\%$

$M/M/1$ 큐에서는 고객이 시스템 내에서 머물러야 할 시간이 x보다 클 확률과 새로운 고객이 도착하여 이 고객이 큐에서 대기해야 할 시간이 보다 클 확률 간의 관계는 다음과 같다.

$$\Psi(x) = P\{W_Q > x\} = \rho e^{-(\beta-\alpha)x} = \rho\Omega(x)$$

C. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 유관한 경우

- 시스템 상태확률(1/3)
  - $p_n = \frac{(c\rho)^n}{n!} e^{-c\rho}$
    - $p_0 = e^{-c\rho}$
    - $\alpha_n = \frac{1}{n+1}\alpha$
    - $\beta_n = \beta$
    - 가정사항: 새로운 고객이 시스템에 도착하는 순간 그 시스템 내에 존재하는 고객의 수가 n명일 때, 도착하는 고객 중 $\frac{c}{n+1}$의 비율만 시스템으로 들어오고 나머지는 발걸음을 돌린다.

대부분의 공학계에서 새로운 고객의 도착률은 시스템 내의 고객 수와 무관하지만, 특이한 경우가 종종 존재한다. 예를 들어, 겨울철에 이비인후과나 내과에는 환자가 많을 확률이 아주 높다. 여기서, 어떤 사람은 그럼에도 불구하고 치료를 받으러 가고, 어떤 사람은 그냥 집에서 버틸 수도 있다.

$$p_1 = p_0 \frac{\alpha_0}{\beta_1} = c\rho p_0$$

$$p_2 = p_1 \frac{\alpha_1}{\beta_2} = \frac{(c\rho)^2}{2} p_0$$

$$\vdots$$

$$p_n = \frac{(c\rho)^n}{n!} p_0$$

$$p_0\left(1 + c\rho + \frac{(c\rho)^2}{2!} + \cdots\right)$$

$$= p_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c\rho)^n}{n!}$$

$$= p_0 e^{c\rho} = 1$$

C. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 유관한 경우

- 시스템 상태확률(2/3)
  - $p_n = \frac{(c\rho)^n}{n!} e^{-c\rho}$
    - $p_0 = e^{-c\rho}$
    - $\alpha_n = \frac{1}{n+1}\alpha$
    - $\beta_n = \beta$

문제 3-6

위에서 구한 p_n은 무슨 분포와 관련된 함수인가? 그리고 그의 물리적 의미에 대하여 논하라.

문제 3-7

위의 시스템에서 서버가 쉬고 있을 때는 언제이고, 그 확률은 얼마인가?

위의 식은 푸아송 분포의 확률질량함수와 관련이 있다. 이는 고객의 도착이 여전히 푸아송 분포를 따르고, 서비스는 지수분포를 따르기 때문에 시스템 내 고객 수에 따라 도착률이 변하는 환경에서도 포아송 분포가 성립 가능하다는 것을 의미한다.

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

서버가 쉬고 있는 상태는 시스템에 고객이 없는 상태인 $n = 0$일 경우이다. 따라서, 서버가 쉬고 있는 확률은 $p_0 = e^{-c\rho}$로 구할 수 있다.

C. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 유관한 경우

- 시스템 상태확률(3/3)
  - $p_n = \frac{(c\rho)^n}{n!} e^{-c\rho}$

예제 3-8

식당에는 고객의 평균도착률이 시간당 5명이고 고객의 평균식사시간이 10분이라고 가정한다. 이 식당 내에 고객의 수가 명일 때 도착하는 고객 중 $\frac{1}{n+1}$의 비율만 들어오고 나머지는 발걸음을 돌린다고 한다면 어느 고객이 식당에 도착하였을 때 고객이 3명 이상 있을 확률은 얼마인가?
단, 고객이 기다릴 대기장소는 충분히 많다고 가정한다.

평균부하 ρ는 $\frac{5}{6}$이다. 그리고 고객의 수가 3명 이상일 확률은 반대로 고객의 수가 1에서 3미만일 확률을 빼면 된다.

고객의 수가 3명 이상일 확률$= 1 -$고객의 수가 3명 미만일 확률
$= P(N \geq 3) = 1 - P(N < 3)$
$= 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - (e^{-\rho} + \rho e^{-\rho} + \frac{\rho^2}{2} e^{-\rho})$
$= 1 - e^{-\rho}\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{5}{6}}\left(1 + \frac{5}{6} + \frac{25}{72}\right) = 5.26\%$

C. 고객의 도착이 시스템 내의 고객의 수와 유관한 경우

- 고객 수 N에 대한 평균
  - $E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = c\rho$
- 고객 수 N에 대한 분산
  - $Var[N] = E\left[(N - E[N])^2\right] = c\rho$

$$p_n = \frac{(c\rho)^n}{n!} e^{-c\rho}$$

문제 3-8

위의 평균과 분산에 대한 관계식을 증명하라.

$$N \sim Poisson(\lambda = c\rho)$$

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(c\rho)^n}{n!} e^{-c\rho} = e^{-c\rho} c\rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c\rho)^k}{k!} = c\rho \cdot e^{-c\rho} \cdot e^{c\rho} = c\rho$$

$$Var[N] = E\left[N^2\right] - (E[N])^2 = (c\rho)^2 + c\rho - (c\rho)^2 = c\rho$$

$$E\left[N^2\right] = E[N(N-1)] + E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot p_n + c\rho = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot \frac{(c\rho)^n}{n!} e^{-c\rho} + c\rho$$
$$= e^{-c\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(c\rho)^n}{n!} + c\rho = e^{-c\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(c\rho)^n}{(n-2)!} + c\rho = e^{-c\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c\rho)^{k+2}}{(k)!} + c\rho = (c\rho)^2 e^{-(c\rho)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c\rho)^k}{k!} + c\rho$$
$$= (c\rho)^2 e^{-(c\rho)} \cdot e^{c\rho} + c\rho = (c\rho)^2 + c\rho$$

$M/M/1/K$ 큐

Ⅲ

A. 개요

- 버퍼의 크기가 유한한 단일 서버를 갖는 시스템의 대기행렬에 대한 확률 모델
  - 서비스를 받고 있는 고객을 고려하여 시스템 내에 고객이 K명이므로 버퍼에는 $K-1$명까지의 고객을 저장할 수 있음
  - 브러킹(Blocking): 고객의 수가 K일 경우, 새로 도착하는 고객은 버퍼에 빈 공간이 없으므로 시스템 내로 들어올 수 없음
  - 시스템 내 고객의 수를 나타내는 확률이 $p_n, n = 0, 1, 2 \cdots, K$까지만 정의됨
    - $\alpha_n = \begin{cases} \alpha, & 0 \le n \le K-1 \\ 0, & n \ge K \end{cases}$
    - $\beta_n = \begin{cases} \beta, & 0 \le n \le K \\ 0, & n > K \end{cases}$
    - $p_n = \begin{cases} p_0\rho^n, & 0 \le n \le K \\ 0, & n > K \end{cases}$

B. 시스템 상태확률(1/3)

- $p_n = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}}, 0 \le n \le K$
  - $p_n = \begin{cases} p_0\rho^n, & 0 \le n \le K \\ 0, & n > K \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{K} p_n = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{r=0}^{K} \rho^r} = \frac{1}{\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

$$p_1 = \frac{(1-\rho)\rho^1}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\vdots$$

$$p_n = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}}$$

고객의 수가 n인 확률 p_n에 관하여 만약 $n = K$일 경우 시스템폭주(System Congestion) 현상이 일어난다. 이러한 시스템의 폭주확률(Blocking Probability)는 다음과 같다.

$$p_K = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

문제 3-9

위에서 구한 p_n에 관한 표현식에서 $K \to \infty$일 경우, 이 시스템은 어떻게 동작할까?

$p_n = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}}$에서 분모에 있는 $1-\rho^{K+1}$에 대해 $K \to \infty$일 경우($\lim_{K\to\infty} 1-\rho^{K+1}$)를 살펴보자.
$\rho < 1$일 경우, $\lim_{K\to\infty} 1-\rho^{K+1} = 1$ 이므로, $p_n = (1-\rho)\rho^n$ 이다. 따라서, $M/M/1$ 큐의 평행상태 확률분포와 같다.
$\rho \ge 1$일 경우, $\lim_{K\to\infty} 1-\rho^{K+1} = \infty$ 이므로, p_n이 수렴하지 않아 시스템이 안정적이지 않은 상태를 의미한다.

B. 시스템 상태확률(2/3)

- $p_n = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}}, 0 \le n \le K$
- $p_n = \begin{cases} p_0\rho^n, & 0 \le n \le K \\ 0, & n > K \end{cases}$

예제 3-9

일반적으로 패킷교환기는 여러 명의 고객으로부터 들어오는 패킷을 일단 버퍼에 저장해두고 도착한 순서에 따라서 하나씩 처리한다고 한다. 이때, 패킷의 평균도착률이 초당 5개이고 하나의 패킷의 평균서비스시간이 $\frac{1}{6}$초인 패킷교환기가 있다고 하자. 그런데 이 교환기는 버퍼에 5개의 패킷을 수용할 공간 밖에 없다고 한다. 임의의 패킷이 교환기에 도착하였을 때 들어갈 자리가 없을 확률은 얼마인가?

평균부하 ρ는 $\frac{5}{6}$이다. 그리고 하나의 패킷이 교환기에 도착해서 들어갈 자리가 없을 확률은 교환기에 패킷이 6개가 있고 하나의 패킷은 서비스를 받는 중이고 나머지 5개의 패킷은 버퍼에서 대기하는 경우이다.

$$p_K = \left.\frac{(1-\rho)^K}{1-\rho^{K+1}}\right|_{K=6} = 0.0564$$

즉, 패킷이 도착하여 교환기 안으로 들어가지 못할 확률이 5.64%가 된다.

B. 시스템 상태확률(3/3)

- $p_n = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}}, 0 \le n \le K$
- $p_n = \begin{cases} p_0\rho^n, & 0 \le n \le K \\ 0, & n > K \end{cases}$

문제 3-10

일반적으로 패킷교환기는 여러 명의 고객으로부터 들어오는 패킷을 일단 버퍼에 저장해두고 도착한 순서에 따라서 하나씩 처리한다고 한다. 이때, 패킷의 평균도착률이 초당 5개이고 하나의 패킷의 평균서비스시간이 $\frac{1}{6}$초인 패킷교환기가 있다고 하자. 패킷 교환기가 수용할 수 있는 버퍼의 크기가 100일 때, 새로 도착한 패킷이 교환기 안으로 들어가지 못할 확률은 얼마인가?

평균부하 ρ는 $\frac{5}{6}$이다. 그리고 하나의 패킷이 교환기에 도착해서 들어갈 자리가 없을 확률은 교환기에 패킷이 6개가 있고 하나의 패킷은 서비스를 받는 중이고 나머지 5개의 패킷은 버퍼에서 대기하는 경우이다.

$$p_K = \left.\frac{(1-\rho)^K}{1-\rho^{K+1}}\right|_{K=100} = 0.00000002$$

즉, 패킷이 도착하여 교환기 안으로 들어가지 못할 확률이 0.000002%가 된다. 이는 평소 자주 일어나지 않는 상황인 희귀사건(Rare Event)를 의미한다.

B. 희귀사건(Rare Event)(1/2)

어떤 패킷 교환기를 위한 버퍼의 크기를 설계하는 상황에서 패킷의 평균도착률이 λ이고, 평균서비스율이 μ인 푸아송분포를 따른다고 가정하자. 패킷은 도착한 순서에 의해서 한번에 하나씩 서비스되며 버퍼의 크기는 $k-1$ 이라고 한다. 여기서 버퍼가 폭주 상태인 사건의 목표치를 ε보다 크지 않도록 유지하기 위해서 패킷교환기가 준비해야 할 버퍼의 크기는 얼마일까?

- $p_K = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} \le \varepsilon$
- $K \ge \left\lceil \frac{\log\left(\frac{\varepsilon}{1-\rho+\varepsilon\rho}\right)}{\log(\rho)} \right\rceil$

버퍼의 최소 크기를 구하기 위해 K에 대한 관계식으로 정리해야한다. 여기서, $\log(x)$는 Base가 10인 로그함수이고, 천장함수(Ceiling Function) $\lceil x \rceil$는 x보다 작지않은 최소 정수를 나타낸다.

$$(1-\rho)\rho^K \le \varepsilon(1-\rho^{K+1})$$
$$(1-\rho)\rho^K + \varepsilon\rho^{K+1} \le \varepsilon$$
$$\rho^K(1-\rho+\varepsilon\rho) \le \varepsilon$$
$$\rho^K \le \frac{\varepsilon}{(1-\rho+\varepsilon\rho)}$$

$$\log(\rho^K) \le \log\left(\frac{1}{1-\rho+\varepsilon\rho}\right)$$
$$K \cdot \log(\rho) \le \log\left(\frac{1}{1-\rho+\varepsilon\rho}\right)$$
$$K \ge \frac{\log\left(\frac{1}{1-\rho+\varepsilon\rho}\right)}{\log(\rho)}$$

B. 희귀사건(Rare Event)(2/2)

어떤 패킷 교환기를 위한 버퍼의 크기를 설계하는 상황에서 패킷의 평균도착률이 λ이고, 평균서비스율이 μ인 푸아송분포를 따른다고 가정하자. 패킷은 도착한 순서에 의해서 한번에 하나씩 서비스되며 버퍼의 크기는 $k-1$이라고 한다. 여기서 버퍼가 폭주 상태인 사건의 목표치를 ε보다 크지 않도록 유지하기 위해서 패킷교환기가 준비해야 할 버퍼의 크기는 얼마일까?

- $p_K = \dfrac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} \le \varepsilon$
- $K \ge \left\lceil \dfrac{\log\left(\frac{\varepsilon}{1-\rho+\varepsilon\rho}\right)}{\log(\rho)} \right\rceil$

버퍼의 최소 크기를 구하기 위해 K에 대한 관계식으로 정리해야한다. 여기서, $\log(x)$는 Base가 10인 로그함수이고, 천장함수(Ceiling Function) $\lceil x \rceil$는 x보다 작지않은 최소 정수를 나타낸다.

문제 3-11

시스템 부하가 $0.1, 0.5, 0.7$인 세가지 유형의 $M/M/1/K$ 큐 시스템에 대하여 시스템 폭주확률이 10^6이하로 유지되기 위하여 필요한 버퍼의 최소용량을 구하라

$$K \ge \left\lceil \frac{\log\left(\frac{10^{-6}}{1-0.1+10^{-6}0.1}\right)}{\log(0.1)} \right\rceil = \left\lceil \frac{-13.815}{-2.3026} \right\rceil \approx 5.95 \Rightarrow K = 6$$

$$K \ge \left\lceil \frac{\log\left(\frac{10^{-6}}{1-0.7+10^{-6}0.7}\right)}{\log(0.7)} \right\rceil = \left\lceil \frac{-12.6125}{-0.3567} \right\rceil \approx 35.36 \Rightarrow K = 36$$

$$K \ge \left\lceil \frac{\log\left(\frac{10^{-6}}{1-0.5+10^{-6}0.5}\right)}{\log(0.5)} \right\rceil = \left\lceil \frac{-13.1224}{-0.6931} \right\rceil \approx 18.93 \Rightarrow K = 19$$

C. 시스템 내의 평균고객의 수 및 평균대기시간

- $E[N] = \sum_{n=0}^{K} np_n = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \sum_{n=0}^{K} n\rho^n = \frac{\rho[1+K\rho^{K+1}-(K+1)\rho^K]}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$
  - $\sum_{n=0}^{K} n\rho^n = \frac{\rho(1-(K+1)\rho^K+K\rho^{K+1})}{(1-\rho)^2} = \frac{1-(K+1)\rho^K+K\rho^{K+1}}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho[1+k\rho^{K+1}-(K+1)\rho^K]}{(1-\rho)^2}$
- $W = \frac{E[N]}{\alpha_e} = \frac{1}{\alpha(1-p_K)} \times \frac{\alpha[1+K\rho^{K+1}-(K+1)\rho^K]}{(\beta-\alpha)(1-\rho^{K+1})} = \frac{1+K\rho^{K+1}-(K+1)\rho^K}{(1-p_K)(\beta-\alpha)(1-\rho^{K+1})}$
  - 유효도착률(Effective Arrival Rate) $\alpha_e = \alpha(1-p_K)$

$\alpha = \rho\beta$

$1-\rho = \frac{\beta-\alpha}{\beta}$

예제 3-10

패킷을 저장할 수 있는 버퍼의 개수가 5로 유한한 라우터에서 푸아송분포를 따라 들어오는 패킷의 평균도착률이 초당 50개이고 지수함수분포를 따르는 패킷서비스시간의 평균은 1초라고 한다. 이때, 하나의 패킷이 라우터에서 소비하는 시간은 평균 몇 초 인가?

트래픽 강도 $\rho = \frac{5}{6}$, 시스템 상태확률 $p_K = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^6}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^7} = \frac{0.056}{0.721} = 0.078$

라우터에서 소비하는 평균대기시간 $W = \frac{1+K\rho^{K+1}-(K+1)\rho^K}{(1-p_K)(\beta-\alpha)(1-\rho^{K+1})} = \frac{1+6\times\left(\frac{5}{6}\right)^7-7\left(\frac{5}{6}\right)^6}{(1-0.078)(6-5)(1-\left(\frac{5}{6}\right)^7)} = \frac{0.33.03}{0.6647}$

$M^K/M/1$ 큐

Ⅳ

A. 개요(1/3)

- 단일 서버에 동시에 도착하는 고객의 수가 K인 시스템의 대기행렬에 대한 확률 모델
  - 평균서비스율 β인 지수분포를 따르는 한 개의 서버의 버퍼는 $n = 0, 1, 2, \cdots, \infty$
  - 평균도착률 α인 푸아송 도착과정에서 한번의 도착 시 K명의 고객이 집단으로 도착함
- 상태전이방정식(State Transition Equation)
  - $p_0(t+\delta t)$: 시간 $t+\delta t$에서 시스템 내에 고객이 한 명도 없을 확률
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 한 명도 없었고($p_0(t)$), 이후 시간 δt 동안에도 시스템에 고객이 한명도 도착하지 않았을 경우($1-\alpha\delta t$)
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 한 명 있었고($p_1(t)$), 이후 시간 δt 동안에 해당 고객이 서비스를 받고 시스템을 떠나버리거나($\beta\delta t$), 새로운 다른 고객의 도착이 없는 경우($1-\alpha\delta t$)

$$\boxed{p_0(t+\delta t) = p_0(t)(1-\alpha\delta t) + p_1(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,}$$
$$p_1(t+\delta t) = p_1(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t) + p_2(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,$$
$$\vdots$$

A. 개요(2/3)

- 단일 서버에 동시에 도착하는 고객의 수가 K인 시스템의 대기행렬에 대한 확률 모델
- 상태전이방정식(State Transition Equation)
  - $p_1(t+\delta t)$: 시간 $t+\delta t$에서 시스템 내에 고객이 한명이 있을 확률
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 한 명이 있었는데($p_1(t)$), 이후 시간 δt 동안에도 서비스가 끝나지 않은 경우($(1-\alpha_1\delta t)(1-\beta_1\delta t)$)
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 두 명 있었고($p_2(t)$), 이후 시간 δt 동안에 고객 한명이 서비스를 마치고 시스템을 떠나버리거나($\beta_2\delta t$), 새로운 다른 고객의 도착이 없는 경우($1-\alpha\delta t$)

$$
\begin{aligned}
&p_0(t+\delta t) = p_0(t)(1-\alpha\delta t) + p_1(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,\\
&p_1(t+\delta t) = p_1(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t) + p_2(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,\\
&\vdots\\
&p_{K-1}(t+\delta t) = p_{K-1}(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t) + p_K(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,\\
&p_K(t+\delta t) = p_0(t)\alpha\delta t + p_K(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t) + p_{K+1}(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,\\
&p_{K+1}(t+\delta t) = p_1(t)\alpha\delta t(1-\beta\delta t) + p_{K+1}(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t) + p_{K+2}(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,\\
&\vdots\\
&p_n(t+\delta t) = p_{n-K}(t)\alpha\delta t + p_n(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta_n\delta t) + p_{n+1}(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t
\end{aligned}
$$

A. 개요(3/3)

- 단일 서버에 동시에 도착하는 고객의 수가 K인 시스템의 대기행렬에 대한 확률 모델
- 상태전이방정식(State Transition Equation)
  - $p_K(t+\delta t)$: 시간 $t+\delta t$에서 시스템 내에 고객이 K명이 있을 확률
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 한 명도 없었는데, K명의 집단 고객이 도착한 경우($p_0(t)\alpha\delta t$)
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 K명 있었는데, 이후 시간 δt 동안에 고객의 도착과 서비스가 일어나지 않은 경우($p_K(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t)$)
    - 시간 t에서 시스템 내에 고객이 $K+1$명 있었는데, 이후 시간 δt 동안에 고객의 도착이 일어나지 않고, 서비스 종료가 일어난 경우($p_{K+1}(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t$)

$$p_0(t+\delta t) = p_0(t)(1-\alpha\delta t) + p_1(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,$$

$$\boxed{p_1(t+\delta t) = p_1(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t) + p_2(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,}$$

$$\vdots$$

$$p_{K-1}(t+\delta t) = p_{K-1}(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t) + p_K(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,$$

$$p_K(t+\delta t) = p_0(t)\alpha\delta t + p_K(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t) + p_{K+1}(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,$$

$$p_{K+1}(t+\delta t) = p_1(t)\alpha\delta t(1-\beta\delta t) + p_{K+1}(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta\delta t) + p_{K+2}(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t,$$

$$\vdots$$

$$p_n(t+\delta t) = p_{n-K}(t)\alpha\delta t + p_n(t)(1-\alpha\delta t)(1-\beta_n\delta t) + p_{n+1}(t)(1-\alpha\delta t)\beta\delta t$$

B. 시스템 상태확률(1/2)

- $p_k = \rho(1+\rho)^{k-1}(1-K\rho), \mathrm{k} \le K$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\alpha p_0(t) + \beta p_1(t),$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -(\alpha+\beta)p_1(t) + \beta p_2(t),$$
$$\vdots$$
$$\frac{dp_{K-1}(t)}{dt} = -(\alpha+\beta)p_{K-1}(t) + \beta p_K(t),$$
$$\frac{dp_K(t)}{dt} = \alpha p_0(t) - (\alpha+\beta)p_K(t) + \beta p_{K+1}(t),$$
$$\frac{dp_{K+1}(t)}{dt} = \alpha p_1(t) - (\alpha+\beta)p_{K+1}(t) + \beta p_{K+2}(t),$$
$$\vdots$$

미분

$$0 = -\alpha p_0 + \beta p_1,$$
$$0 = -(\alpha+\beta)p_1 + \beta p_2,$$
$$\vdots$$
$$0 = -(\alpha+\beta)p_{K-1} + \beta p_K,$$
$$0 = \alpha p_0 - (\alpha+\beta)p_K + \beta p_{K+1},$$
$$0 = \alpha p_1 - (\alpha+\beta)p_{K+1} + \beta p_{K+2},$$
$$\vdots$$

p_n의 확률생성함수(PGF) $P(z)$ 정의

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n$$

$$\alpha z^K \sum_{n=0}^{\infty} p_n Z^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} p_n Z^n - \beta \sum_{n=1}^{\infty} p_n Z^n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} p_n Z^{n-1} = 0$$

$$\alpha z^K P(z) - \alpha P(z) - \beta(P(z) - p_0) + \frac{\beta(P(z)-p_0)}{z} = 0$$

$$P(z) = \frac{\beta p_0(1-z)}{\alpha z^{K+1} - (\alpha+\beta)z + \beta}$$

B. 시스템 상태확률(2/2)

- $p_k = \rho(1+\rho)^{k-1}(1-K\rho), \mathrm{k} \le K$

$$\alpha z^K \sum_{n=0}^{\infty} p_n Z^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} p_n Z^n - \beta \sum_{n=1}^{\infty} p_n Z^n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} p_n Z^{n-1} = 0$$

$$\alpha z^K P(z) - \alpha P(z) - \beta(P(z) - p_0) + \frac{\beta(P(z) - p_0)}{z} = 0$$

$$P(z) = \frac{\beta p_0(1-z)}{\alpha z^{K+1} - (\alpha+\beta)z + \beta}$$

p_n의 확률생성함수(PGF) $P(z)$ 정의
$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n,\ P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n p_n$

$$P(0) = p_0 = 1 - \frac{K\alpha}{\beta} = 1 - K\rho$$

$$P(1) = \lim_{z \to 1} P(z) = \frac{-\beta p_0}{(K+1)\alpha z^K - (\alpha+\beta)} = \frac{-\beta p_0}{K\alpha - \beta} = 1$$

$$p_1 = \rho p_0 = \rho(1-K\rho)$$
$$p_2 = (1+\rho)p_1 = \rho(1+\rho)(1-K\rho)$$
$$p_3 = (1+\rho)p_2 = \rho(1+\rho)^2(1-K\rho)$$
$$p_k = \rho(1+\rho)^{k-1}(1-K\rho), \mathrm{k} \le K$$

B. 시스템 내의 평균고객의 수

- $L = \frac{K(K+1)\rho}{2(1-K\rho)}$

$$1 - K\rho > 0, \qquad K\rho < 1$$

확률의 값은 항상 0보다는 크거나 같아야 하며, p_0은 0이 아님

$$P(z) = \frac{\beta p_0(1-z)}{\alpha z^{K+1} - (\alpha+\beta)z + \beta} = \frac{(1-K\rho)(1-z)}{\rho z^{K+1} - (1+\rho)z + 1}$$
$$= \frac{(1-K\rho)(1-z)}{1 - z - \rho z(1 - z^K)} = \frac{1-K\rho}{1 - \rho z\left(\frac{1-z^K}{1-z}\right)}$$

$p_0 = 1 - K\rho$

$\frac{1-z^K}{1-z}$는 초기항이 1이고 공비가 z인 유한 등비수열의 합

$$P(z) = \frac{1-K\rho}{1 - \rho z(1 + z + z^2 + \cdots + z^{K-1})}$$
$$= \frac{1-K\rho}{1 - \rho z - \rho z^2 - \cdots - \rho z^K}$$

미분

$$P'(z) = \frac{(1-K\rho)\rho(1 + 2z + 3z^2 + \cdots + Kz^{K-1})}{(1 - \rho z - \rho z^2 - \cdots - \rho z^K)^2}$$

$$L = P'(1) = \frac{K(K+1)\rho}{2(1-K\rho)}$$

C. 시스템 내의 평균대기고객의 수

- $Q = \frac{K(K+1)\rho}{2(1-K\rho)} - K\rho$

고객의 수가 n일 때, 큐 내에서 기다리고 있는 고객의 수는 $n-1$

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n = \sum_{n=1}^{\infty}np_n - \sum_{n=1}^{\infty}p_n = L - (1-p_0) = \frac{K(K+1)\rho}{2(1-K\rho)} - K\rho$$

예제 3-11

어느 스키장의 리프트에는 진행요원의 제어에 의하여 4개의 열을 만들어서 고객을 리프트에 태우는데 집단 고객의 평균도착률이 분당 1회이고 한번의 도착 시 4명의 고객이 컨트롤선 안으로 들어간다고 한다. 한편, 리프트는 한 번에 한 명씩 실어 나른다고 가정하고, 한명의 고객의 평균서비스시간(리프트에 앉아서 떠나는 데까지 걸리는 시간)은 10초라고 한다. 이때, 임의의 고객이 리프트 앞에 도착하였을 때 리프트 앞에서 기다리고 있는 고객의 평균 수는 몇 명인가?

트래픽강도 $\rho = \frac{1}{6}$ (단, K=4)

리프트 앞에서 기다리고 있는 고객의 평균 수 $= \frac{K(K+1)}{2(1-K\rho)} - K\rho = \frac{4\times5\times\frac{1}{6}}{2\left(1-4\times\frac{1}{6}\right)} - 4\times\frac{1}{6} = 5 - \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$ = 약 5명

추가예제

V

A. $M/M/1$ 큐

추가예제 1

어느 네트워크의 방화벽은 외부에서 유입되는 패킷을 순차적으로 검사하여 허용 또는 차단 여부를 판단한다. 이때 패킷은 평균 100개/초의 비율로 도착하며, 방화벽 엔진은 평균적으로 초당 200개의 패킷을 검사할 수 있다. 시스템이 안정적인지 분석하고, 방화벽의 성능을 분석하라. 단, 해당 방화벽은 대기열의 길이는 무한하다고 가정한다.

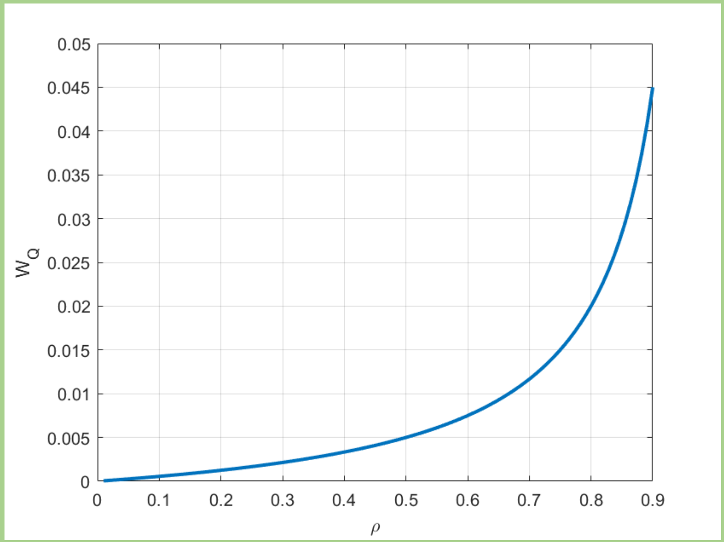
평균트래픽강도 $\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{100}{200} = 0.5$

평균대기시간 $W_Q = \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)} = \frac{100}{200(200-100)} = \frac{1}{200} = 0.005$초

평균체재시간 $W = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{200-100} = \frac{1}{100} = 0.01$초

평균고객(패킷) 수 $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.5}{1-0.5} = 1$개

대기열 내의 평균 패킷 수 $L_Q = \frac{\alpha^2}{\beta(\beta-\alpha)} = \frac{100^2}{200(200-100)} = \frac{10000}{20000} = 0.5$개



✓ $\rho < 1$이므로 시스템은 안정적

✓ 패킷이 초당 180개 이상 들어올 경우 네트워크 방화벽은 약 9배 느려진다.

A. $M/M/1$ 큐

추가예제 2

어떤 기업의 VPN 시스템에서 원격 근무자가 접속을 시도하면 인증 요청이 중앙 서버로 전달된다. 이 인증 서버는 요청이 들어오는 순서대로 처리하며, 대기열의 길이는 무한하다고 가정한다. 인증 요청은 평균적으로 초당 5건의 비율로 도착하고, 서버는 평균적으로 초당 100건을 처리할 수 있다. 이때, 인증 지연 시간을 분석하라.

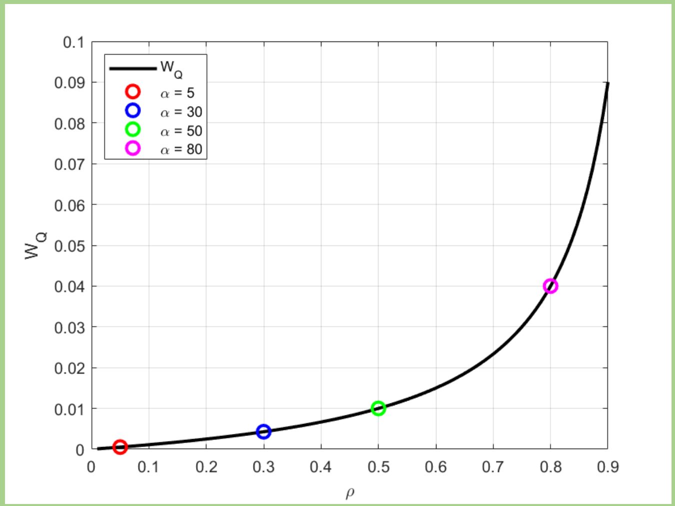
평균트래픽강도 $\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{100} = 0.05$

평균대기시간 $W_Q = \frac{\alpha}{\beta(\beta-\alpha)} = \frac{5}{100(100-5)} = \frac{5}{9500} = 0.000526$초

평균체재시간 $W = \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{100-5} = \frac{1}{5} = 0.0105$초

평균고객(패킷) 수 $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.05}{1-0.05} = \frac{5}{95} = 0.0526$명

대기열 내의 평균 패킷 수 $L_Q = \frac{\alpha^2}{\beta(\beta-\alpha)} = \frac{500^2}{100(100-500)} = \frac{25}{9500} = 0.00263$명



✓ $\rho < 1$이므로 시스템은 안정적

✓ 평균 초당 5건의 요청에 대해서는 인증 지연시간이 매우 짧은 것을 확인할 수 있으며, 갑자기 인증 요청이 몰려 초당 80건이 들어올 경우, 서비의 부하가 16배 증가한다.

B. $M/M/1/K$ 큐

추가예제 3

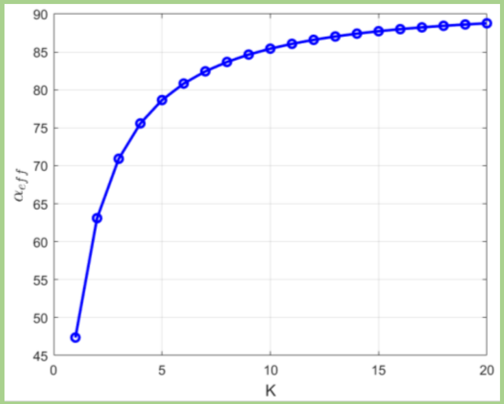
어떤 네트워크 라우터는 유한한 10 만큼의 버퍼 용량을 가지고 있어, 동시에 수용할 수 있는 최대 패킷 수가 제한적이다. 따라서, 패킷이 도착했을 때 시스템이 가득 차 있으면, 해당 패킷은 즉시 버려지며, 이를 패킷 손실로 간주한다. 시스템에 초당 90개의 패킷이 들어오고 네트워크 라우터는 초당 100개의 패킷을 처리할 수 있을때, 패킷 손실율을 분석하라.

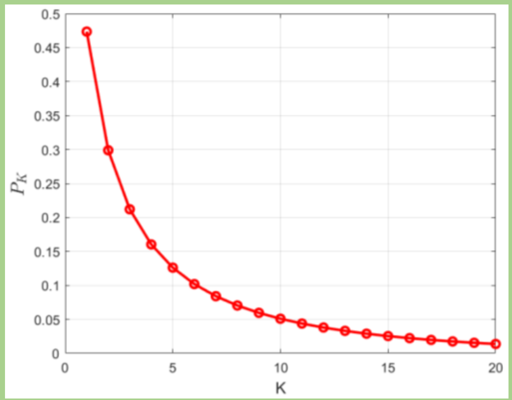
평균트래픽강도 $\boldsymbol{\rho = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{90}{100} = 0.9}$

패킷 손실 확률 $\boldsymbol{p_K = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = \frac{0.9^{10}(1-0.9)}{1-0.9^{11}} = \frac{(0.3487)(0.1)}{1-0.3138} \approx 0.0508}$

패킷 처리 확률 $\boldsymbol{p_A = 1 - p_K = 0.9492}$

유효패킷 처리량 $\boldsymbol{\alpha_{eff} = \alpha(1 - p_K) = 90 \times 0.9492 \approx 85.43}$패킷/초





✓ 평균트래픽강도는 이미 부하 수준에 있음
✓ 약 5%의 패킷 손실이 발생함
✓ 도착하는 패킷 중 약 95% 패킷이 처리됨
✓ 평균유효처리 패킷은 초당 85개
✓ 버퍼의 크기가 부족함

C. $M^K/M/1$ 큐

추가예제 4

어느 회사를 대상으로 스캔 공격이 초당 5회씩 주기적으로 발생하고, 한 번의 공격 시도에 10개의 스캐닝 패킷이 동시에 도착한다. 보안 시스템은 외부에서 들어오는 공격을 실시간으로 분석하여 초당 100개씩 차단하며, 보안 시스템은 패킷을 하나씩 순차적으로 처리한다. 이때, 보안 시스템에서 스캔 공격에 얼마나 견딜 수 있는가?

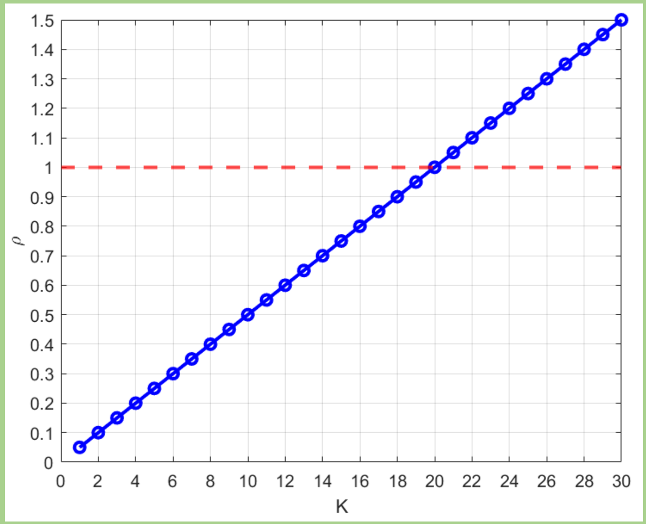
평균트래픽강도 $\rho = \frac{K\cdot\alpha}{\beta} = \frac{10\cdot 5}{100} = 0.5$

평균대기시간 $W_Q = \frac{K\cdot\alpha}{\beta(\beta-K\cdot\alpha)} = \frac{50}{100(100-50)} = \frac{1}{100} = 0.01$초

평균체재시간 $W = \frac{1}{\beta-K\cdot\alpha} = \frac{1}{100-50} = \frac{1}{50} = 0.02$초

평균고객(패킷) 수 $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.5}{1-0.5} = \frac{0.5}{0.5} = 1$개

대기열 내의 평균 패킷 수 $L_Q = \frac{(K\cdot\alpha)^2}{\beta(\beta-K\cdot\alpha)} = \frac{50^2}{100(100-50)} = \frac{2500}{5000} = 0.5$개



✓ 현재의 트래픽 도착조건에서는 시스템 부하를 견딜 수 있으나, 동시에 들어오는 스캔 공격 패킷이 20이상으로 증가할 경우, 과부하된다.

감 사 합 니 다

박 재 형 (jaehyoung@pel.sejong.ac.kr)

VI 부록 #1 - 주요용어

- 상태 전이: State Transition
- 연속시간 마코프 과정: Continuous-Time Markov Process
- 평균도착률: Average Arrival Rate
- 평균서비스율: Average Service Rate
- 단위 시간: Unit Time
- 평균도착간격: Average Interarrival Time
- 평균서비스시간: Average Service Time
- 생성률: Birth Rate
- 소멸률: Death Rate
- 상태확률: State Probability
- 상태전이방정식: State Transition Equation
- 평행상태: Steady State
- 평균 트래픽 강도: Average Traffic Intensity
- 도착과정: Arrival Process
- 서비스과정: Service Process
- 트래픽 부하: Offered Load
- 시스템 폭주 확률: Blocking Probability
- 유효 도착률: Effective Arrival Rate
- 체재 시간: System Sojourn Time
- 평균 체재 시간: Mean Sojourn Time
- 평균 대기 시간: Mean Waiting Time
- 대기 시간 분포: Waiting Time Distribution
- 시스템 내 평균 고객 수: Average Number of Customers in System
- 큐 내 평균 대기 고객 수: Average Number of Waiting Customers in Queue

- 문제 3-5

```
rho = 0.1:0.1:0.9;

P0 = 1 - rho;
P10 = (1 - rho) .* (rho .^ 10);

figure;
plot(rho, P0, 'bo-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'P(n=0)');
hold on;
plot(rho, P10, 'rs-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'P(n=10)');
hold off;

xlabel('\rho', 'FontSize', 12);
ylabel('p_{n}', 'FontSize', 12);
legend('show');
grid on;
ylim([0 1]);
xlim([0 1]);
xticks(rho);
```

- 추가예제 1

```
beta = 200;
rho = linspace(0.01, 0.9, 100);

W_q = rho ./ (beta .* (1 - rho));

figure;
plot(rho, W_q, 'LineWidth', 2);
grid on;
xlabel('\rho');
ylabel('W_Q');
```

- 추가예제 2

```
beta = 100;

alphas = [5, 30, 50, 80];
colors = ['r', 'b', 'g', 'm'];

rho = linspace(0.01, 0.9, 100);
W_q = rho ./ (beta .* (1 - rho));

figure;
plot(rho, W_q, 'k-', 'LineWidth', 2);
hold on;

for i = 1:length(alphas)
    alpha_i = alphas(i);
    rho_i = alpha_i / beta;
    W_q_i = alpha_i / (beta * (beta - alpha_i));

    plot(rho_i, W_q_i, [colors(i) 'o'], 'MarkerSize', 8, 'LineWidth', 2);
end

grid on;
xlabel('\rho');
ylabel('W_Q');
legend({'W_Q', ...
        '\alpha = 5', '\alpha = 30', '\alpha = 50', '\alpha = 80'}, ...
        'Location', 'northwest');
```

- 추가예제 3

```
alpha = 90;
beta = 100;
rho = alpha / beta;

K_vals = 1:20;
P_K_vals = zeros(size(K_vals));
alpha_eff_vals = zeros(size(K_vals));

for i = 1:length(K_vals)
    K = K_vals(i);
    if rho ~= 1
        P_0 = (1 - rho) / (1 - rho^(K + 1));
    else
        P_0 = 1 / (K + 1);
    end
    P_K = P_0 * rho^K;
    alpha_eff = alpha * (1 - P_K);

    P_K_vals(i) = P_K;
    alpha_eff_vals(i) = alpha_eff;
end

% 그래프 1: 차단 확률 (P_K)
figure;
plot(K_vals, P_K_vals, 'ro-', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6);
grid on;
xlabel('K', 'FontSize', 12);
ylabel('$P_K$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);

% 그래프 2: 유효 처리량
figure;
plot(K_vals, alpha_eff_vals, 'bo-', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 6);
grid on;
xlabel('K', 'FontSize', 12);
ylabel('$\alpha_{eff}$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
```

- 추가예제 4

```
alpha = 5;
beta = 100;
K_vals = 1:30;

rho = (K_vals * alpha) / beta;

figure;
plot(K_vals, rho, 'b-o', 'LineWidth', 2); hold on;
yline(1, 'r--', 'LineWidth', 2);

xticks(0:2:30);
yticks(0:0.1:1.5);

xlabel('K');
ylabel('\rho');
grid on;
ylim([0, 1.5]);
```