



2026/01/15, 2026 확률 기초 세미나



이공학도를 위한 확률 및 통계학

-2장 확률-

민 윤 홍(yunhong@pel.sejong.ac.kr)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

표본공간(Sample Space)

- 정의

- 통계적 실험에서 발생가능한 모든 결과들의 집합

- 특징

- S 로 표시함(Sample space의 약어)
- 각 결과를 원소(Element or Member), 혹은 표본점 (Sample point)라고 함
- 원소가 유한한 경우 중괄호 속에 각 원소를 나열하여 나타낼 수 있음
 - e.g., 동전 한 개를 던지는 실험에서의 표본공간은 $S = \{H, T\}$ 로 표현 가능함 (H 는 앞면, T 는 뒷면)
- 표본점의 수가 나열하기 곤란한 수거나 무한인 경우 수식 또는 서술식에 의해 표현 가능함
 - e.g., $S = \{\text{하늘에 떠 있는 별의 숫자}\}$

표본공간

• 예제 2.1

한 개의 주사위를 던지는 실험을 가정했을 때, 표본공간은 다음과 같다

- 윗면에 나타난 숫자에만 관심을 가진다면 표본공간 $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이 됨
- 윗면에 나타난 수가 짝수인지 홀수인지에 관심을 가진다면 표본공간 $S_2 = \{\text{짝수}, \text{홀수}\}$ 가 됨
- 예제 2.1을 통해 실험결과를 설명하는데 하나 이상의 표본공간이 사용될 수 있다는 사실을 알 수 있음
- S_1 이 S_2 보다 더 많은 정보를 제공하고 있음
 - S_1 에서 어떤 결과가 일어났는지 알 수 있다면 S_2 에서 어떤 결과가 발생하는지 말할 수 있음
 - 반대로 S_2 에서 발생결과를 알고 있다 하더라도 S_1 에서 어떤 결과가 일어났는지는 알 수 없음
 - ∴ 실험결과에 대해 가장 많은 정보를 줄 수 있는 표본공간을 사용해야 함

표본공간

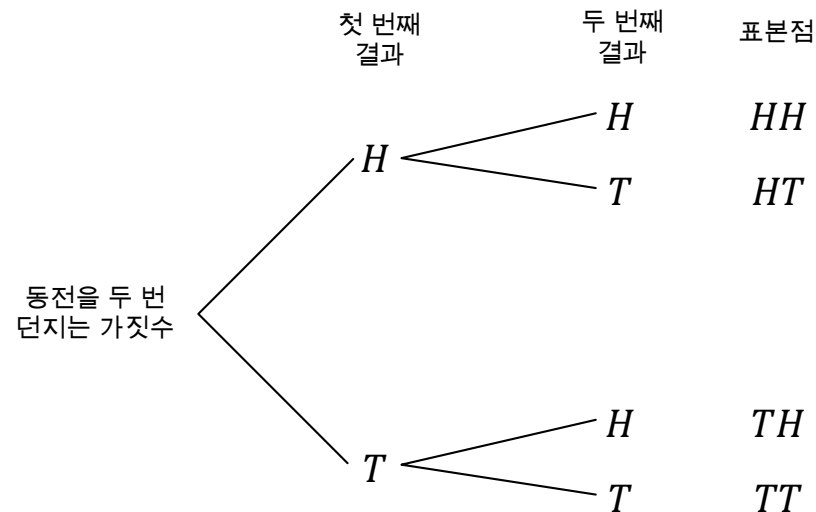
- 수형도(Tree diagram) (1/3)

- 정의

- 모든 경우의 수를 나뭇가지 모양으로 빠짐없이 나열하고 세는 방법

- 특징

- 가지를 이어 연결되는 매 경로마다 하나의 특정한 표본점이 됨



<그림 1> 동전을 두 번 던지는 경우의 수의 수형도

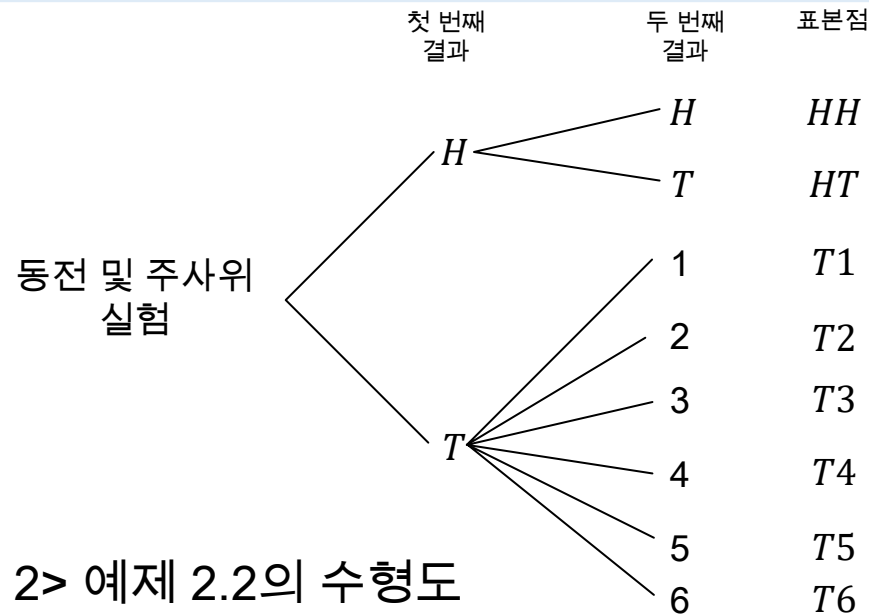
표본공간

• 수형도 (2/3)

• 예제 2.2

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 다시 동전을 던지고, 뒷면이 나오면 한 개의 주사위를 던지는 실험의 수형도는 아래와 같음

- 왼쪽 끝에서 시작하여 오른쪽 첫 번째 경로를 따라 가면 표본점 HH 를 얻게 되는데, 이는 한 개의 동전을 두 번 던져서 모두 앞면이 나온 경우임
- 표본공간은 $S = \{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$ 임



<그림 2> 예제 2.2의 수형도

표본공간

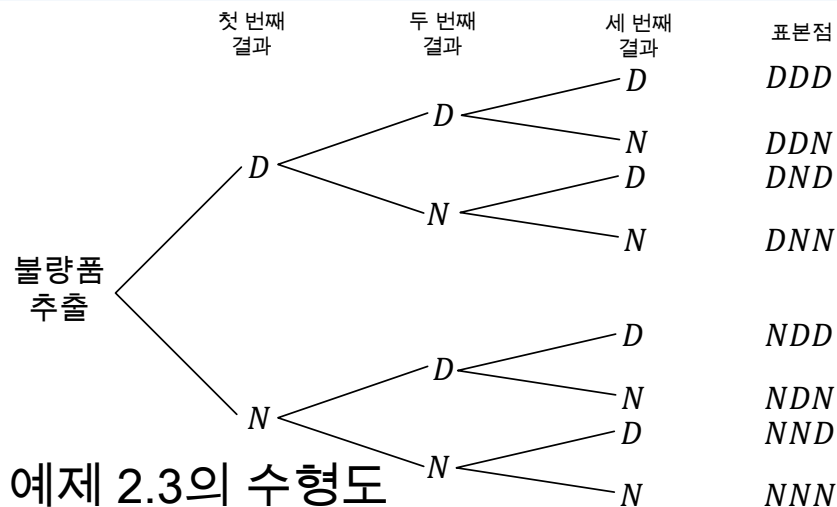
• 수형도 (3/3)

• 예제 2.3

제조과정에서 임의로 세 개의 제품을 추출하여 검사한 뒤, 불량품이면 D , 양품이면 N 으로 분류하면, 최대정보를 얻을 수 있는 표본공간의 원소들을 구하기 위해 아래와 같은 수형도를 그릴 수 있음

- 첫 번째 경로를 따라 가면 표본점 DDD 를 얻게 되는데, 이는 세 개의 제품이 모두 불량품임을 의미하는 것임
- 다른 경로들을 따라가보면 표본공간이 다음과 같음을 알 수 있음

$$S = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$$



<그림 3> 예제 2.3의 수형도

표본공간

- 집합 표현

- 표본점의 수가 무한인 경우 서술식 또는 수식에 의해 표현 가능함
 - 어떤 실험에서 가능한 모든 결과들이 전세계에서 인구가 백만이 넘는 도시들의 집합일 경우, 표본공간은 다음과 같이 표현 가능함
 - $S = \{x | x \text{는 인구 백만이 넘는 도시}\}$
 - S 가 중심이 원점이고 반지름이 2인 원의 원주상과 내부에 있는 모든 점 (x, y) 의 집합이라고 할 때, 표본공간은 다음과 같이 표현 가능함
 - $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$
- 표본공간은 가능하면 수식으로 표현하는 것이 편리함

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

사상(Events)

- 정의

- 가능한 모든 결과들의 집합 중 특정 결과들의 집합
 - 표본공간의 부분집합

- 종류

- 공 집합(Empty Set)
- 여집합(Complement)
- 교 집합(Intersection)
- 합 집합(Union)
- 상호배반(Mutually exclusive or Disjoint)

사상(Events)

• 예제 2.4

- 주사위를 던졌을 때 결과가 3으로 나누어 지는 사상 A 는 다음과 같이 표현
 - $A = \{3, 6\}$
- 사상 A 는 앞선 예제 2.1의 표본공간 S_1 의 부분집합에 해당
- 한 개의 주사위를 던지는 실험을 가정
- 윗면에 나타난 숫자에만 관심을 가진다면 표본공간 $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이 됨
- 윗면에 나타난 수가 짝수인지 홀수인지에 관심을 가진다면
 - 표본공간 $S_2 = \{\text{짝수}, \text{홀수}\}$ 가 됨

• 예제 2.5

표본공간 $S = \{t | t \geq 0\}$ 이 주어져 있을 때 (t 는 전자부품의 수명, 단위:년), 부품이 5년 내에 고장이 날 사상 A 는 다음과 같다.

- $A = \{t | 0 \leq t < 5\}$
- 사상 A 는 S 의 부분집합이 됨

사상

- 공 집합(Empty Set)

- 하나의 원소도 포함하고 있지 않은 집합
- 모든 집합의 부분집합
- $\emptyset$ 로 표현
- 예제 2.6

공집합의 예시는 다음과 같을 수 있다.

- A 를 육안으로 미생물을 감지할 사상이라고 할 경우, 사상 $A=\emptyset$ 이 됨
- $B=\{x|x \text{ 는 } 7\text{의 인수 중 짝수}\}$ 인 경우, 7의 인수는 1과 7뿐이므로 사상 $B=\emptyset$ 이 됨

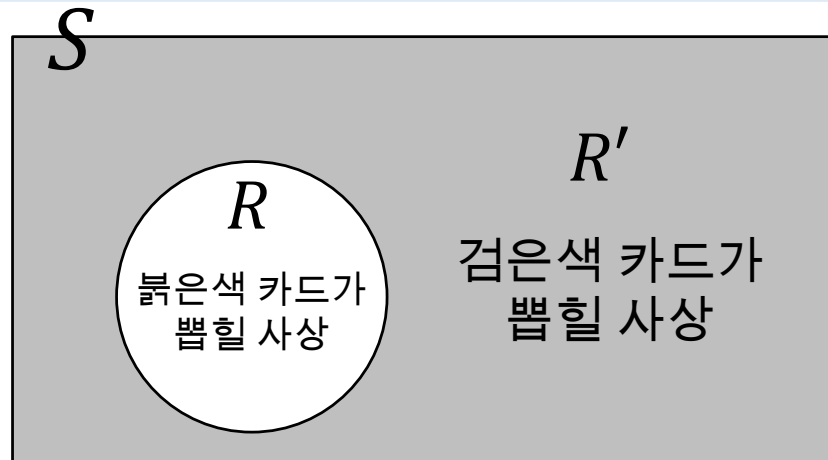
사상

- 여집합(Complement)

- 표본공간 S 에 대한 특정 사상 R 에 속하지 않는 원소들로 이루어진 집합
- R' 로 표현
- 예제 2.7

R 이 52장의 트럼프 카드에서 붉은색 카드가 뽑힐 사상, S 는 모든 카드를 원소로 하는 집합이라고 가정하면, R' 이 나타내는 사상은 무엇인가?

- R' 은 붉은색이 아니고 검은색의 카드가 뽑힐 사상이 됨



<그림 4> 예제 2.7의 벤 다이어그램

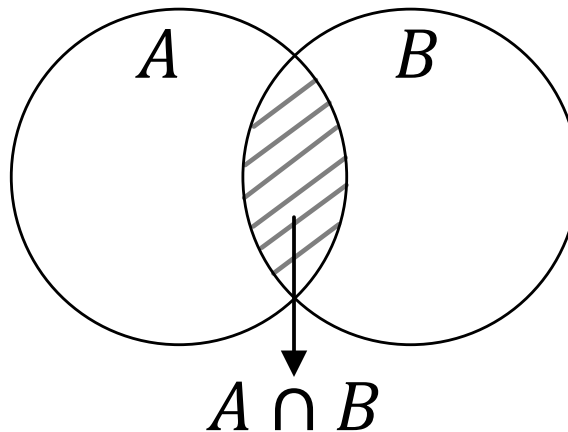
사상

- 교 집합(Intersection)

- 두 집합이 공통으로 포함하는 원소로 이루어진 집합
- 두 사상 A 와 B 의 교 집합은 A 와 B 에 공통으로 속하는 모든 원소들을 포함하는 사상이며, $A \cap B$ 로 표현됨
- 예제 2.8

임의로 한 학생을 뽑았을 때, 여공학도를 뽑는 사상을 표현하라.

- 그 학생의 전공이 공학일 사상을 A , 그 학생이 여자인 사상을 B 라고 가정
- $A \cap B$ 이 뽑힌 학생이 여공학도인 사상임



<그림 5> $A \cap B$ 의 벤 다이어그램

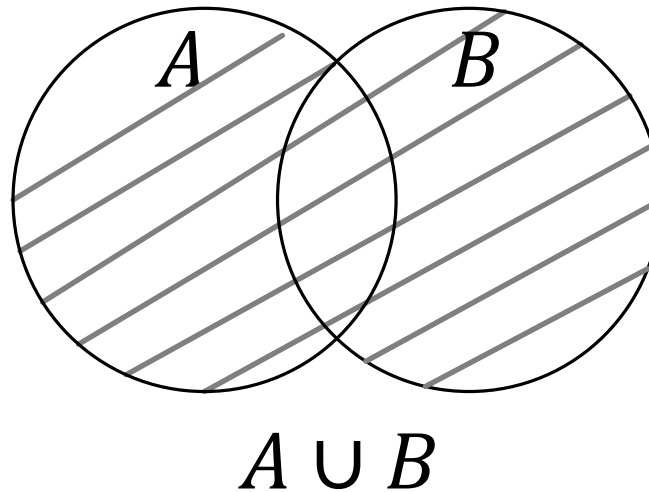
사상

- 합집합(Union)

- 두 사상 A 혹은 B 에 속하는 모든 원소들을 포함하는 집합
- $A \cup B$ 로 표현됨
- 예제 2.9

$A=\{a,b,c\}$, $B=\{b,c,d,e\}$ 라 했을 때 사상 A 와 B 의 합집합은?

- $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$



<그림 6> $A \cup B$ 의 벤 다이어그램

사상

- 합집합(Union)

- 예제 2.10

P 를 PEL에서 임의로 선택된 한 직원이 흡연가일 사상, Q 를 그 사람이 음주가일 사상이라 하자, 그럼 흡연을 하거나 음주를 하는 모든 직원을 나타내는 사상은?

- $P \cup Q$

- 예제 2.11

$M = \{x | 3 < x < 9\}$ 이고, $N = \{y | 5 < y < 12\}$ 라 하면, $M \cup N$ 은 무엇인가?

- $M \cup N = \{z | 3 < z < 12\}$

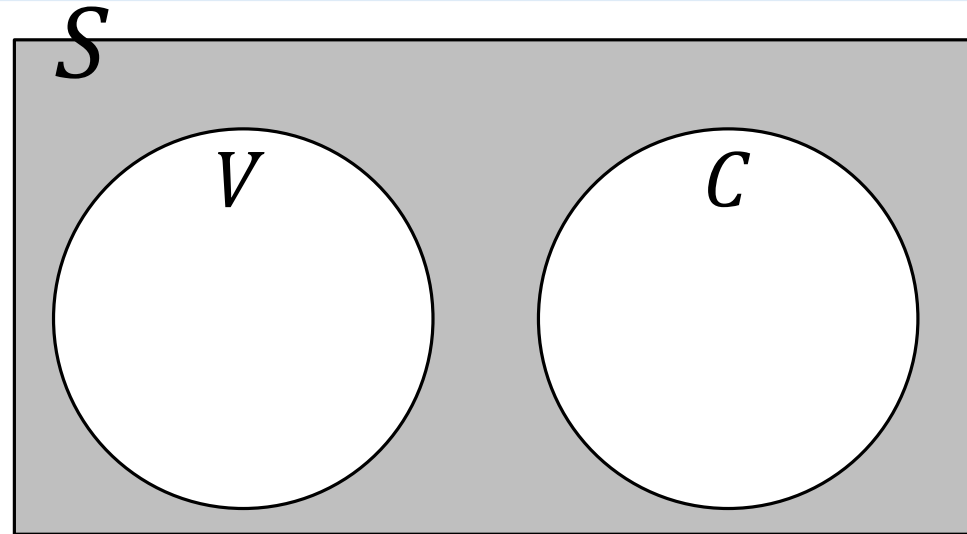
사상

- 상호배반(Mutually exclusive or Disjoint)

- $V \cap C = \emptyset$, 즉 A 와 B 가 공통원소를 가지고 있지 않은 경우 두 사상 A 와 B 는 상호배반임
- 예제 2.12

$V=\{a,e,i,o,u\}$, $C=\{l,r,s,t\}$ 인 사상이 있다고 할 때, 두 사상은 배반사건인가?

- $V \cap C = \emptyset$ 이므로 V 와 C 는 동시에 발생할 수 없음
- 따라서 사상 V 와 C 는 배반사건임



<그림 7> 배반사건 관계인 V 와 C 의 벤 다이어그램

사상

- 상호배반(Mutually exclusive or Disjoint)

- 예제 2.13

8개의 채널을 통해서 방송을 하고 있는 한 유선방송회사는 채널 중 세 개는 PEL과, 두 개는 NBC와, 하나는 CBS와 가맹을 맺고 있다. 나머지 두 채널은 교육방송과 E스포츠 중계용이다. 이 유선방송에 가입한 어떤 사람이 임의로 TV를 켜었을 때, PEL과 E스포츠 중계 두 방송을 동시에 볼 사상은 상호배반인가?

- PEL방송을 볼 사상을 A , E스포츠 중계 방송을 볼 사상을 B 라고 가정
- 동시에 두 방송을 볼 수 없으므로 두 사건은 상호배반임

사상

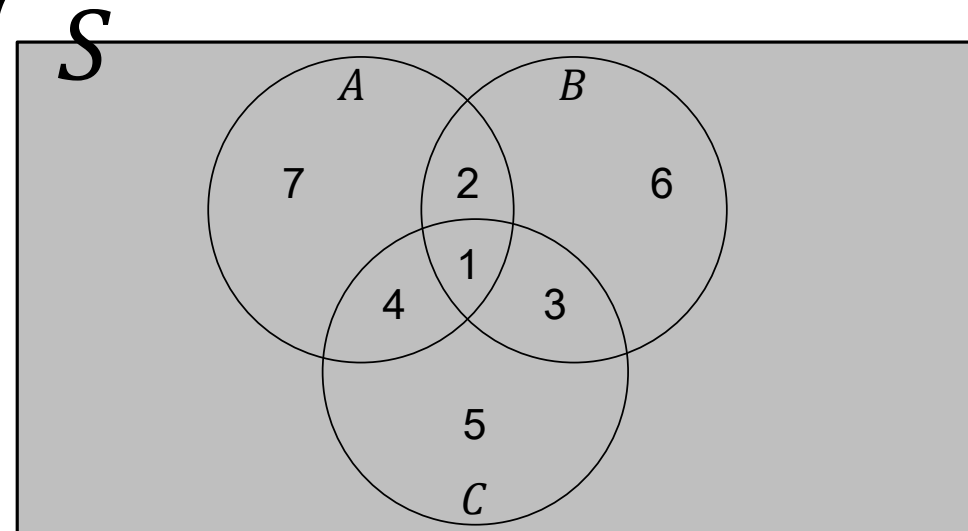
- 벤 다이어그램(Venn diagram)

- 서로 다른 집합들 사이의 관계를 표현하는 *다이어그램

- $A \cap B =$ 영역 1과 2
- $B \cap C =$ 영역 1과 3
- $A \cup C =$ 영역 1, 2, 3, 4, 5 와 7
- $B' \cap A =$ 영역 4와 7
- $A \cap B \cap C =$ 영역 1
- $(A \cup B) \cap C' =$ 영역 2, 6 과 7

*다이어그램

정보, 시스템 구조, 관계 등을 기호, 선, 도형 등을 이용해 시각적으로 표현한 그림



<그림 8> 사상 A, B, C의 벤 다이어그램

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

경우의 수(Number of Cases)

- 개요

- 확률을 구하기 위해선 표본점의 수를 계산해야 함
- 표본점을 일일이 나열하는 건 비효율적이므로 세는 규칙이 필요함

- 정의

- 어떤 사상이 일어날 수 있는 모든 가능한 가짓수

- 종류

- 합의 법칙(Addition rule)
- 곱의 법칙(Multiplication rule)
- 순열(Permutation)
- 분할(Partition)
- 조합(Combination)

경우의 수

- 종류 (1/21)

- 합의 법칙 (1/2)

- 정의

- 두 가지 이상의 사상이 동시에 일어나지 않을 때, 사상 A 또는 B 가 일어나는 경우의 수를 구하는 방법

- 수식

만약 두 사상 A, B 가 일어나는 경우의 수가 각각 n_1, n_2 가지 이고 두 사상이 동시에 일어나지 않는다면, 사상 A 또는 사상 B 가 일어나는 경우의 수는 다음과 같다

$$n_1 + n_2$$

만약 사상 A_1 이 n_1 가지, A_2 가 n_2 가지, ..., A_K 가 n_k 가지로 일어날 수 있고, 이 사상들이 서로 어느 두 사상도 동시에 일어나지 않는다면, k 개의 사상 중 어느 하나가 일어나는 경우의 수는 다음과 같다

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$$

경우의 수

- 종류 (2/21)
 - 합의 법칙 (2/2)
 - 예제 2.14

한 끼에 메뉴 하나를 먹을 수 있는 사람이 푸드코트에 가서 메뉴를 고르는 경우의 수를 계산하시오

- 푸드코트에는 한식, 중식 두 코너가 있다고 가정
 - 코너당 3가지 메뉴가 있다고 가정
-
- 한식을 고르는 경우의 수 $n_1 = 3$
 - 중식을 고르는 경우의 수 $n_2 = 3$
- ∴ 한식과 중식을 동시에 고르는 사상은 일어날 수 없으므로 구하고자 하는 경우의 수는
- $$n_1 + n_2 = 6$$

경우의 수

- 종류 (3/21)

- 곱의 법칙 (1/5)

- 정의

- 두 가지 이상의 사상이 동시에, 혹은 연달아 일어날 때, 각 사상의 경우의 수를 구하는 방법

- 수식

만약 첫 번째 시행이 n_1 가지 방법, 두 번째 시행이 n_2 가지 방법이 있다고 가정하면, 두 가지 시행이 이루어지는 경우의 수는 다음과 같다

$$n_1 \times n_2$$

만약 한 시행이 n_1 가지로 시행될 수 있고, 이 각각이 다시 n_2 가지 방법으로 시행되며, 또 이 각각이 n_3 가지 방법으로 시행되는 식으로 하여 k 개의 시행이 연속으로 이루어진다면, 이 시행과 관련된 경우의 수는 다음과 같다

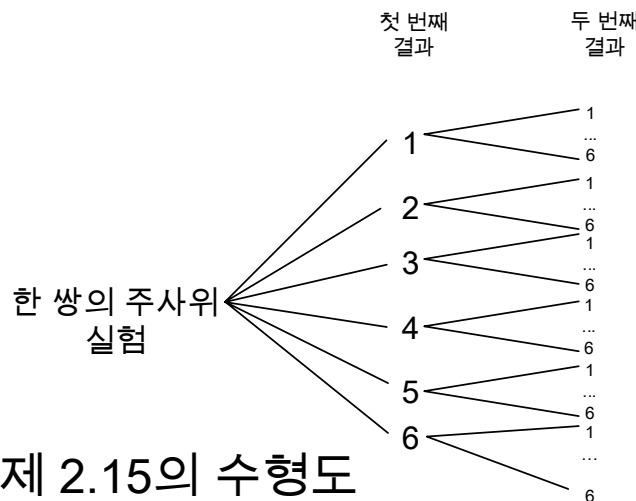
$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$$

경우의 수

- 종류 (4/21)
- 곱의 법칙 (2/5)
 - 예제 2.15

한 쌍(두 개)의 주사위를 한 번 던지는 경우 표본공간에는 얼마나 많은 표본점들이 존재하게 되는가?

- 첫 번째 주사위로 인한 결과의 수, $n_1 = 6$
- 두 번째 주사위로 인한 결과의 수, $n_2 = 6$
∴ 한 쌍의 주사위를 한 번 던지는 경우의 표본점의 수는 $n_1 \times n_2 = 36$



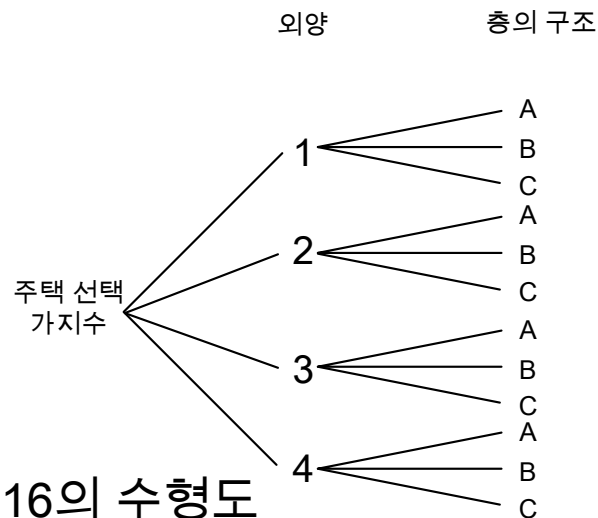
<그림 9> 예제 2.15의 수형도

경우의 수

- 종류 (5/21)
- 곱의 법칙 (3/5)
 - 예제 2.16

주택을 지을 때 외양의 양식은 4가지, 층의 구조는 3가지 일 경우, 주택을 구입하는 사람이 선택할 수 있는 가짓수는 얼마나 되는가?

- 외양의 양식 $n_1 = 4$
- 층의 구조, $n_2 = 3$
 - ∴ 주택을 구입하는 사람이 선택할 수 있는 가짓수는 $n_1 \times n_2 = 12$



<그림 10> 예제 2.16의 수형도

경우의 수

- 종류 (6/21)
 - 곱의 법칙 (4/5)
 - 예제 2.17

22명의 클럽 회원 중에서 회장과 총무를 선임할 수 있는 방법의 수는 몇 가지인가?

- 회장 자리에 가능한 가짓수는 22가지이고 이 각각의 가짓수마다 총무를 선임할 수 있는 가짓수는 21가지임
- $\therefore$ 가능한 총 가짓수는 $22 \times 21 = 462$

- 예제 2.18

SAM이 컴퓨터를 조립할 때, CPU는 2개 회사, HDD는 4개 회사, 메모리는 3개 회사, 액세서리는 5개 상점으로부터 주문할 수 있다고 할 때, SAM이 부품을 주문할 수 있는 총 가짓수는 얼마인가?

- CPU 회사 가짓수를 n_1 , HDD회사 가짓수를 n_2 , 메모리 회사 가짓수를 n_3 , 액세서리 회사 가짓수를 n_4 로 가정
- $n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = 3, n_4 = 5$
- $\therefore$ 가능한 총 가짓수는 $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$

경우의 수

- 종류 (7/21)
- 곱의 법칙 (5/5)
 - 예제 2.19

0, 1, 2, 5, 6, 9를 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 4자리의 짝수는 몇 가지 인가?

- 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 일의 자리를 0인 경우와 0이 아닌 경우로 나누어야 함
 - 일의 자리가 0인 경우 $n_1 = 1$
 - 천의 자리에 가능한 숫자의 수 $n_2 = 5$
 - 백의 자리에 가능한 숫자의 수 $n_3 = 4$
 - 십의 자리에 가능한 숫자의 수 $n_4 = 3$
 - $\therefore n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$
 - 일의 자리가 0이 아닌 경우 $n_1 = 2$
 - 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 $n_2 = 4$
 - 백의 자리에 가능한 숫자의 수 $n_3 = 4$
 - 십의 자리에 가능한 숫자의 수 $n_4 = 3$
 - $\therefore n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 2 \times 4 \times 4 \times 3 = 96$
- 두 경우는 상호배반이므로 가능한 4자리 짝수의 총 가짓수는 $60 + 96 = 156$

경우의 수

- 종류 (8/21)

- 순열 (1/8)

- 정의

- 서로 다른 대상들 중에서 일부 또는 전부를 순서를 고려하여 나열한 것

- 수식

n 개의 서로 다른 대상물에 대한 순열의 수는 다음과 같다

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots (2)(1)$$

$n = 0$ 인 경우에는 $0! = 1$ 로 정의한다

n 개의 서로 다른 대상물 중 r 개를 취하여 만든 순열의 수는 다음과 같다

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

경우의 수

- 종류 (9/21)

- 순열 (2/8)

- 예제 2.20

3개의 영문자 a, b, c에 대한 순열의 수는 몇 개 인가?

- 첫 번째 위치에 올 수 있는 문자의 수 $n_1 = 3$
- 두 번째 위치에 올 수 있는 문자의 수 $n_2 = 2$
- 세 번째 위치에 올 수 있는 문자의 수 $n_3 = 1$

∴ 전체 가짓수는 $n_3 \times n_2 \times n_1 = 6$

- 예제 2.21

PEL 25명의 멤버들을 대상으로 세 가지 상(연구, 교육, 봉사)을 주려고 한다 한 사람당 최대 한 개의 상만 받을 수 있다고 할 때, 상을 수여하는 방법은 총 몇 가지 인가?

- 상의 종류가 다르므로 이것은 순열문제이다. 따라서, 가능한 총 가짓수는 다음과 같음

$${}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25 \times 24 \times 23 = 13,800$$

경우의 수

- 종류 (10/21)

- 순열 (3/8)

- 예제 2.22

50명의 학생으로 구성된 동아리의 회장과 총무를 뽑으려고 한다. 다음 각 경우에 가능한 선출방법은 얼마나 되는가?

- (a) 선출방법에 제한이 없을 때
- (b) A는 회장이 아니면 하지 않으려고 할 때
- (c) B와 C는 같이 하는 경우가 아니면 하지 않으려고 할 때
- (d) D와 E는 서로 같이는 하지 않으려고 할 때

- (a) 제한이 없을 경우 가능한 선출방법의 총 가짓수는 ${}_{50}P_2 = \frac{50!}{48!} = 50 \times 49 = 2450$
- (b) 는 A가 회장이 되는 경우(1)와 회장이 되지 않는 경우(2)로 나뉨
 - (1) A가 회장이 되면 총무를 뽑는 경우의 수는 49가지임
 - (2) A가 회장이 되지 않으면 49명 중에서 간부를 2명 뽑아야 하므로 다음과 같음
 - ${}_{49}P_2 = \frac{49!}{47!} = 49 \times 48 = 2352$
 - $\therefore$ 총 가짓수는 $49 + 2352 = 2401$ 가지임

경우의 수

- 종류 (11/21)

- 순열 (4/8)

- 예제 2.22

50명의 학생으로 구성된 동아리의 회장과 총무를 뽑으려고 한다. 다음 각 경우에 가능한 선출방법은 얼마나 되는가?

- (a) 선출방법에 제한이 없을 때
 - (b) A는 회장이 아니면 하지 않으려고 할 때
 - (c) B와 C는 같이 하는 경우가 아니면 하지 않으려고 할 때
 - (d) D와 E는 서로 같이는 하지 않으려고 할 때
- (c) B와 C를 간부로 뽑는 방법 2가지, B와 C를 간부로 뽑지 않는 경우의 수는 다음과 같음
 - ${}_{48}P_2 = \frac{48!}{46!} = 48 \times 47 = 2256$
 - $\therefore$ 총 가짓수는 $2 + 2256 = 2258$
 - (d) 각 경우의 수는 다음과 같음
 - D는 간부가 되고 E는 간부가 되지 않는 가짓수는 $2 \times 48 = 96$
 - D는 간부가 되지 않고 E는 간부가 되는 가짓수는 $2 \times 48 = 96$
 - D와 E를 동시에 뽑지 않는 가짓수는 ${}_{48}P_2 = 2256$
 - $\therefore$ 총 가짓수는 $2 \times 96 + 2256 = 2448$

경우의 수

- 종류 (12/21)

- 순열 (5/8)

- 원순열(Circular permutation)

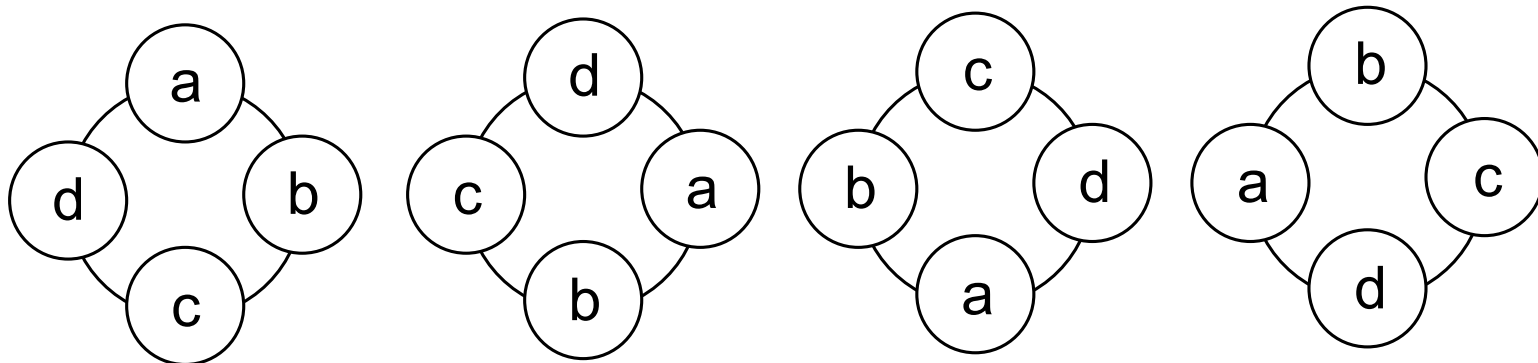
- 정의

- 서로 다른 대상을 원형으로 배열하는 순열

- 수식

원으로 배열하였을 때, 회전으로만 다른 배열은 같은 경우로 보기 때문에 일렬로 배치한 순열 $n!$ 에서 회전에 의한 중복 n 가지를 제거해야 하므로 수식은 다음과 같다

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$



<그림 11> a, b, c, d를 원형으로 배열하는 예시

경우의 수

- 종류 (13/21)
 - 순열 (6/8)
 - 원순열(Circular permutation)
 - 예제 2.23

네 사람을 원형 탁자에서 카드놀이를 할 경우 자리에 앉는 경우의 수를 구하시오

- 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$
- 원형 탁자에서 시계 방향이나 반시계 방향으로 회전시키면 자리 관계는 변하지 않음
- 한 사람을 기준으로 고정하고, 나머지 사람을 배치하는 경우의 수를 구하면 됨
- 총 가짓수는 $(4 - 1)! = 6$

경우의 수

- 종류 (14/21)

- 순열 (7/8)

- 같은 것을 포함하는 순열

- 정의

- 서로 다른 것이 아닌, 같은 종류의 문자, 대상물 등을 포함한 순열

- 수식

같은 것이 있는 경우, 전체 대상을 일렬로 배열할 때, 같은 것들끼리 자리를 바꿔도 결과가 같으므로 n_1 개는 첫 번째 종류, n_2 는 두 번째 종류, ..., n_k 는 k 번째 종류로 된 n 개의 대상물 순열의 수는 다음과 같다

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_k!}$$

경우의 수

- 종류 (15/21)
 - 순열 (8/8)
 - 같은 것을 포함하는 순열
 - 예제 2.24

대학 농구선수 10명을 일렬로 세우려고 한다. 이들 10명을 학년으로 구분했을 때 1학년이 1명, 2학년이 2명, 3학년이 4명, 4학년이 3명이라면 이들을 학년만을 구분하여 일렬로 세울 수 있는 방법은 몇 가지인가?

- 1, 2, 3, 4학년을 각각 a, b, c, d 로 나타내면 $abbcccccddd$ 를 나열하는 것과 동일함
- 수식을 이용해 나타내면 다음과 같음

$$\frac{10!}{1! 2! 4! 3!} = 12,600$$

경우의 수

- 종류 (16/21)

- 분할 (1/2)

- 정의

- 순서를 고려하지 않고 집합을 부분집합들로 나누는 것

- 수식

n 개의 대상물을 r 개의 부분으로 나누는 경우 n_1 개는 첫 번째 부분에, n_2 개는 두 번째 부분에, 등등으로 하는 분할방법의 수는 다음과 같다

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

단, $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ 이다

경우의 수

- 종류 (17/21)

- 분할 (2/2)
 - 예제 2.25

7명의 대학원생을 3인용 객실 하나와 2인용 객실 둘에 투숙시키는 방법은 몇 가지인가?

- 3명 그룹 1개, 2명 그룹 2개로 나누어짐
- 먼저 일렬로 배치한 뒤 나누어 생각한다면, 7명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 7!
- 같은 방에 들어간 사람들 사이의 순서는 구분하지 않으므로 3!, 2!, 2!으로 인한 중복 제거
- 가능한 분할의 총 가짓수는 다음과 같음

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

경우의 수

- 종류 (18/21)

- 조합 (1/3)

- 정의

- 여러 대상 중에서 순서를 고려하지 않고 특정 개수만큼 선택하는 것

- 수식

서로 다른 n 개의 대상물에서 r 개를 선택하는 조합의 수는 다음과 같다

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = {}_n C_r$$

경우의 수

- 종류 (19/21)

- 조합 (2/3)
 - 예제 2.26

민윤홍이 5가지의 컴퓨터 게임을 사려고 한다. 10개의 아케이드 게임 중에서 3게임, 5개의 FPS 게임 중에서 2게임을 선택하는 방법은 모두 몇 가지인가?

- 10개의 아케이드 게임 중 3게임을 고르는 가짓수는

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

- 5개의 FPS 게임 중에서 2게임을 고르는 가짓수는

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

- 곱의 법칙을 적용하면 1200가지의 방법이 존재함

경우의 수

- 종류 (20/21)
- 조합 (3/3)
 - 예제 2.27

STATISTICS라는 단어의 문자들로 만들 수 있는 가능한 배열의 가짓수는 얼마인가?

- 10개의 문자 중 S와 T는 세 번, I는 두 번, A와 C는 각각 한 번씩 나타남
- 공식을 이용하면 $\binom{10}{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3!3!2!1!1!} = 50400$

경우의 수

- 종류 (21/21)

- 정리

구분	정의	공식
합의 법칙	동시에 일어나지 않는 사상 A 또는 사상 B 가 일어나는 경우의 수를 구하는 것	$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$
곱의 법칙	동시, 혹은 연달아 일어나는 각 사상의 경우의 수를 구하는 것	$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$
순열	서로 다른 대상들 중에서 일부 또는 전부를 순서를 고려하여 나열한 것	${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
원순열	서로 다른 대상들을 원형으로 배열하는 순열	$\frac{n!}{n} = (n-1)!$
같은 것을 포함한 순열	같은 종류의 문자, 대상물 등을 포함하는 순열	$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_k!}$
분할	집합을 겹치지 않는 부분집합들로 나누는 것	$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$
조합	여러 대상 중에서 순서를 고려하지 않고 특정 개수만큼 선택하는 것	${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

사상의 확률(Probability)

- 정의

- 특정 결과들의 집합이 일어날 가능성의 정도를 0과 1사이의 숫자로 나타낸 값

- 특징

- 가중치(Weights) 혹은 확률(Probability)라고 부름
- 사상 A 의 확률은 사상 A 안에 있는 모든 표본점들의 가중치의 합임
 - $0 \leq P(A) \leq 1, P(\emptyset) = 0, P(S) = 1$
 - $A_1, A_2, A_3, \dots$ 가 상호배반 사상일 경우
 - $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$
- 특정 N 개의 서로 다른 결과가 동일한 확률로 발생 가능함
 - 이 중 n 개의 원소를 가지는 사상 A 의 확률
 - $P(A) = \frac{n}{N}$

사상의 확률

• 예제 2.28

하나의 동전을 두 번 던지는 실험에서 적어도 한 번은 앞면이 나올 확률은?

- 표본공간 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
- 동전의 앞면과 뒷면의 발생확률이 같다고 가정할 때, 각 표본점에 확률 w 를 부여하면 $w = \frac{1}{4}$ 임
- A 를 적어도 한 번의 앞면이 나올 사상이라고 한다면 $A = \{HH, HT, TH\}$
- $\therefore P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

사상의 확률

• 예제 2.29

짝수가 홀수보다 2배만큼 더 발생하는 주사위가 있다. 그 주사위를 한 번 던져 4보다 작은 수가 나올 사상을 E 라 할 때, $P(E)$ 를 구하여라

- 표본공간은 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 각 홀수에는 w , 각 짝수에는 $2w$ 의 확률을 할당하면, 확률의 합이 1이 되어야 하므로 $9w = 1$ 이 된다. 즉, $w = \frac{1}{9}$ 이 된다
- $\therefore$ 각 홀수가 나올 확률은 $\frac{1}{9}$, 각 짝수가 나올 확률은 $\frac{2}{9}$ 이다
- $E = \{1, 2, 3\}$ 이므로 $P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$ 이다

• 예제 2.30

위 예제에서 짝수가 나타날 사상을 A , 3으로 나누어질 수 있는 수가 나타날 사상을 B 라고 할 때 $P(A \cup B)$ 와 $P(A \cap B)$ 를 구하여라

- $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ 이므로, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ 이고, $A \cap B = \{6\}$ 이다
- $\therefore P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$ 이다

사상의 확률

• 예제 2.31

25명의 산업공학, 10명의 기계공학, 10명의 전기공학, 8명의 토목공학 학생들로 구성된 통계학 수업이 있다. 1명의 학생을 임의로 뽑을 때 다음 확률을 구하여라

- (a) 그 학생이 산업공학 학생일 확률
- (b) 토목공학이나 전기공학 학생일 확률
- 산업, 기계, 전기, 토목공학 학생을 각각 I, M, E, C 로 표현함
- (a) 53명중 산업공학 학생은 25명이므로 $P(I) = \frac{25}{53}$
- (b) 토목공학이나 전기공학 학생은 모두 18명이므로 $P(E \cup C) = \frac{18}{53}$

• 예제 2.32

한 패가 5장인 포커게임에서 2장의 에이스카드 (A)와 3장의 잭카드(J)를 가지게 될 확률을 구하여라

- 4장의 카드 중 2가지 카드가 선택되는 경우의 수는 $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$
- 4장의 J 카드 중 3장의 카드가 선택되는 경우의 수는 $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$

사상의 확률

• 예제 2.33

한 패가 5장인 포커게임에서 2장의 에이스카드 (A)와 3장의 잭카드(J)를 가지게 될 확률을 구하여라

- 4장의 카드 중 2가지 카드가 선택되는 경우의 수는 $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$
- 4장의 J카드 중 3장의 카드가 선택되는 경우의 수는 $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$
- 2장의 A카드와 3장의 J카드를 가지는 서로 다른 경우의 수 $n = 6 \times 4 = 24$
- 한 패가 5장인 경우의 수는 $N = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2,598,960$
- $\therefore$ 구하고자 하는 경우의 수 $P(C) = \frac{24}{2,598,960}$

ps. 2장의 에이스와 3장의 잭카드를 가지는 패는 풀하우스임

사상의 확률

- 접근법 (1/2)

- 상대도수(Relative frequency)

- 각 결과의 발생확률이 동일하지 않을 경우, 사전지식이나 실험적 근거에 의해서 할당되어야 함
- 확률로 정의하기 위해선 실험 횟수를 무한히 늘려야 함

- e.g., 동전을 10번 던져서 앞면이 7번 나오는 경우, 앞면의 확률은 $\frac{7}{10}$

- 무차별(Indifference) 접근법

- 가능한 모든 결과가 동일한 가능성을 가진다고 가정할 때, 어떤 사상의 확률을 전체 경우의 수 중 그 사상에 해당하는 경우의 비율로 정의하는 것

- e.g., 6개의 면을 가진 주사위가 공정하게 보인다고 생각되었을 때, 각 여섯 면에 대해 똑같이 $\frac{1}{6}$ 의 확률을 부여

사상의 확률

- 접근법 (2/2)
 - 주관적(Subjective) 정의
 - 직관력이나 개인적 신념, 간접적인 정보를 사용하여 확률을 계산하는 것
 - e.g., 자신의 경험을 바탕으로 상대방의 기분을 예측하는 것

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

가법정리(Additive Rule)

- 정의

- 사상 A 또는 B 가 일어날 확률을 구할 때 사용하는 공식

- 수식

- 두 사상 A 와 B 에 대하여, 둘 중 하나라도 일어날 확률은 다음과 같다

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- 만약 A 와 B 가 배반이라면, 다음과 같다

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- 만약 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 이 서로 배반이라면 다음과 같다

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1$$

- 만약 사상을 A, B, C 3가지로 확장한다면 다음과 같다

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- 만약 사상 A 와 A' 가 서로 여집합 관계에 있으면 다음과 같다

$$P(A) + P(A') = 1$$

가법정리

• 예제 2.34

졸업을 앞둔 민윤홍이 회사에 입사면접을 본 결과, 회사 A에 합격할 확률은 0.8, 회사 B에 합격할 확률은 0.6, 두 회사에 모두 합격할 확률은 0.5로 판단된다. 이 두 회사 중 최소한 한 회사에 합격할 확률은 얼마인가?

- $P(A) = 0.8, P(B) = 0.6, P(A \cap B) = 0.5$ 이므로, 확률의 가법정리를 적용하면
- $0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$

• 예제 2.35

한 쌍의 주사위를 던졌을 때 나타난 두 눈의 합이 7이나 11이 될 확률을 구하여라

- 눈의 합이 7이 될 사상을 A, 11이 될 사상을 B라 하면, 합이 7이 되는 경우는 36개의 표본점 중 6가지이고, 합이 11이 될 사상은 2가지 경우가 존재함
- 모든 표본점의 발생확률이 동일하므로 $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{18}$
- 합이 7이 되는 경우와 11이 되는 경우는 동시에 발생할 수 없으므로 배반사건임
- $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{9}$

가법정리

• 예제 2.36

새 자동차를 사려고 하는 사람이 녹색, 백색, 적색, 혹은 흑색의 자동차를 구입할 확률이 각각 0.09, 0.15, 0.21, 0.23이라고 할 때, 네 가지 색 중 어느 한 가지 색의 차를 구입할 확률은 얼마인가?

- 녹색, 백색, 적색, 흑색의 차를 구입할 사상을 각각 G, W, R, B 라 하면, 이 네 사상은 서로 배반이므로 구하는 확률은 $P(G \cup W \cup R \cup B) = P(G) + P(W) + P(R) + P(B)$
- $\therefore 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23 = 0.68$

• 예제 2.37

자동차정비공이 하루 동안 정비하는 자동차의 수가 3, 4, 5, 6, 7, 혹은 8대 이상이 될 확률이 각각 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10, 0.07이라고 할 때, 그가 다음번 작업일에 적어도 5대 이상을 정비할 확률은 얼마인가?

- 적어도 5대의 차를 수리할 사상을 E 라 하면 $P(E) = 1 - P(E')$ 이며 여기서 E' 는 5대 미만의 차를 수리할 사상임
- $P(E') = 0.12 + 0.19 = 0.31$ 이므로 가법정리에 의해 $P(E) = 1 - 0.31 = 0.69$

가법정리

• 예제 2.38

한 공장에서 생산하는 케이블의 규격은 $2000 \pm 10\text{mm}$ 이다. 규격을 벗어난 케이블을 생산할 확률은 규격 초과, 미만 모두 0.05로 동일할 때, 다음 두 확률을 구하여라

- (a) 임의로 고른 한 케이블이 규격보다 큰 제품일 확률은 얼마인가?
 - (b) 임의로 고른 한 케이블이 길이가 1990mm 이상일 확률은 얼마인가?
- 생산된 케이블이 규격에 맞는 사상을 M , 규격보다 작은 사상을 S , 큰 사상을 L 이라 가정
 - (a) $P(M) = 0.99$ 이므로 $P(S) = P(L) = \frac{1-0.99}{2} = 0.005$
 - (b) 임의로 고른 한 케이블의 길이를 X 라고 하면
 $P(1990 \leq X \leq 2010) = P(M) = 0.99$
 - 이 때, $P(X > 2010) = P(L) = 0.005$ 이므로 $P(X \geq 1990) = P(M) + P(L) = 0.995$
 - 여집합 관계를 이용하여 (b)를 구하면 $P(X \geq 1990) + P(X < 1990) = 1$ 이므로
 $P(X \geq 1990) = 1 - P(S) = 1 - 0.005 = 0.995$

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

조건부 확률(Conditional Probability)

- 정의

- 사상 A 가 일어났을 때 사상 B 가 일어날 확률

- 수식

- $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- 특징

- 어떤 사상이 발생했다는 정보를 바탕으로 관심 있는 사상의 발생 확률을 다시 계산할 수 있음
 - 확률 $P(A|B)$ 는 사상 B 가 발생했다는 정보를 바탕으로 확률 $P(A)$ 를 갱신함

조건부 확률

• 예제 2.39

비행기가 정시에 출발할 확률은 $P(D) = 0.83$ 이고, 정시에 도착할 확률은 $P(A) = 0.82$ 이며 정시에 출발하여 정시에 도착할 확률은 $P(D \cap A) = 0.78$ 라 하자.

- (a) 비행기가 정시에 출발했을 때 정시에 도착할 확률을 구하여라
- (b) 비행기가 정시에 도착했을 때 정시에 출발했을 확률을 구하여라

- (a) $P(A|D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$
- (b) $P(D|A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$

• 예제 2.40

옷감의 10%는 길이불량, 5%는 직조불량, 0.8%는 두 불량 모두를 가지고 있다고 한다. 생산된 옷감 하나를 임의로 선택하여 검사한 결과가 길이불량이었다고 할 때, 이것이 직조불량일 확률은 얼마인가?

- 길이불량일 사상을 L , 직조불량일 사상을 T 라고 하면 길이불량이었을 때 직조불량일 확률

$$P(T|L) = \frac{P(T \cap L)}{P(L)} = \frac{0.008}{0.1} = 0.08$$

조건부 확률

- 독립사상(Independent Event)

- 정의

- 두 사상이 서로에게 영향을 주지 않고, 한 사상의 발생 여부가 다른 사상의 발생 확률을 변화시키지 않는 관계

- 수식

- $P(B|A) = P(B)$ 혹은 $P(A|B) = P(A)$ 인 두 사상 A 와 B

- 예제 2.41

동전과 주사위를 각각 한 번씩 던져 동전의 앞면과 주사위 숫자 6이 나올 확률을 구하시오

- 동전의 앞면이 나오는 사상을 A , 주사위 숫자가 6이 나오는 사상을 B 라고 가정
- $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{6}$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = P(A)P(B)$
- 서로의 결과에 영향이 없으므로, 독립사상임

조건부 확률

- 종속사상(Dependent Event)

- 정의

- 두 사상이 서로 영향을 미쳐, 한 사상의 발생 여부가 다른 사상이 발생할 확률을 변화시키는 경우

- 수식

- $P(B|A) \neq P(B)$, $P(A|B) \neq P(A)$ 혹은 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

- 예제 2.42

카드 두 장을 복원 없이 연속으로 뽑을 때, 첫 번째 에이스일 경우 두 번째 카드가 에이스일 확률을 구하시오

- 첫 번째 카드가 에이스일 사상을 A , 두 번째 카드가 에이스일 사상을 B 라고 가정
- $P(B) = \frac{4}{52}$, $P(B|A) = \frac{3}{51}$
- 사상 A 가 사상 B 의 결과에 관여하고 있으므로 종속사상임

조건부 확률

• 승법정리(Multiplication Rule) (1/5)

• 개요

- 두 사건이 동시에 발생할 확률을 계산하는 정리
- 어떤 실험에서 두 사상 A 와 B 가 동시에 발생할 수 있다면 $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ 가 성립함
 - A 와 B 가 함께 일어날 확률은 A 가 일어날 확률에 A 가 일어났을 때 B 가 일어날 확률을 곱한 값과 같음
 - 사상 $A \cap B$ 와 $B \cap A$ 는 같으므로 $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B|A)$ 와 같음
 - $A_1, A_2, \dots, A_k$ 가 발생가능하다면, $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1})$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이면 두 사상 A 와 B 는 독립이고, 그 역도 성립함
 - 독립인 두 사상이 동시에 일어날 확률은 각각의 확률의 곱임
 - 사상의 집합 $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ 의 부분집합 $A_{i1}, \dots, A_{ik}, k \leq n$ 의 경우, $P(A_{i1} \cap \dots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \dots P(A_{ik})$ 임

조건부 확률

- 승법정리 (2/5)

- 예제 2.43

첫 번째 가방에는 4개의 흰 공과 3개의 검은 공이 들어있고
두 번째 가방에는 3개의 흰 공과 5개의 검은 공이 들어있다고 가정할 때
첫 번째 가방에서 공 하나를 꺼낸 후 보지 않고 두 번째 가방에 넣은 후, 두 번째 가방에서 검은 공을 꺼낼 확률은?

- 첫 번째 가방에서 검은 공을 뽑을 사상을 B_1 , 두 번째 가방에서 검은 공을 뽑을 사상을 B_2 , 첫 번째 가방에서 흰 공을 뽑을 사상을 W_1 라 가정
- 모든 경우는 배반적인 두 사상 $(B_1 \cap B_2)$ 와 $(W_1 \cap B_2)$ 이므로 구하고자 하는 확률은

$$\begin{aligned} & P[(B_1 \cap B_2) \text{ 또는 } (W_1 \cap B_2)] \\ &= P(B_1 \cap B_2) + P(W_1 \cap B_2) \\ &= P(B_1)P(B_2|B_1) + P(W_1)P(B_2|W_1) \\ &= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{38}{63} \end{aligned}$$

조건부 확률

- 승법정리 (3/5)

- 예제 2.44, 2.45

20개의 퓨즈 중에서 5개가 불량품이라고 하자. 2개의 퓨즈를 연속적으로 비복원추출한다고 할 때, 2개의 퓨즈가 모두 불량품일 확률은 얼마인가?

- 첫 번째 퓨즈가 불량품일 사상을 A , 두 번째 퓨즈가 불량품일 확률을 사상을 B 라고 가정
- $A \cap B$ 는 A 가 일어나고 그 뒤에 B 가 일어나는 사상이라고 해석 가능
- 첫 번째 퓨즈가 불량품일 확률은 $\frac{1}{4}$, 두 번째 퓨즈가 불량품일 확률은 $\frac{4}{19}$
- $\therefore P(A \cap B) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}$

소방차가 바로 출동할 확률이 0.98이고, 앰불런스가 바로 출동할 확률은 0.92라고 하자. PEL에 불이 나서 민윤홍이 부상을 입었을 때, 소방차와 앰불런스가 바로 출동할 확률은 얼마인가?

- 소방차와 앰불런스의 출동가능한 사상을 각각 A, B 라고 가정
- $P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.98)(0.92) = 0.9016$

조건부 확률

• 승법정리 (4/5)

• 예제 2.46

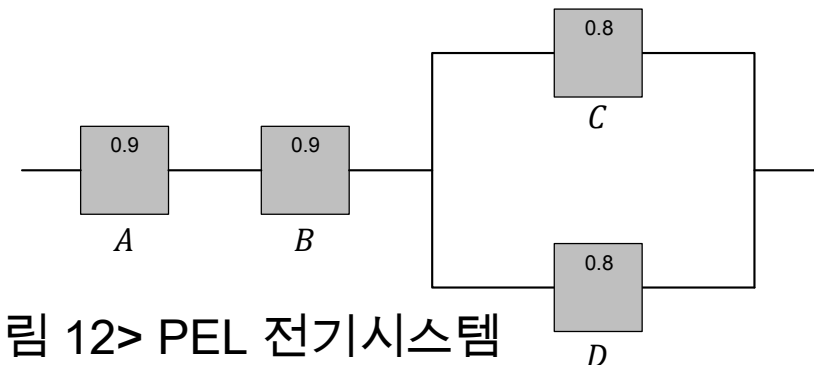
PEL 전기시스템은 그림과 같이 4개의 부품으로 구성되어 있다. A 와 B 가 작동하고, C 나 D 가 작동하면 전기시스템이 작동한다. 각 부품의 신뢰도는 그림과 같을 때,
(a) 이 시스템이 작동할 확률
(b) 이 시스템이 작동한다고 할 때 C 가 작동하지 않을 확률을 구하여라
각 부품들은 독립적으로 작동한다고 가정한다

- 그림에서 C 와 D 는 병렬, A 와 B , 하부시스템 $C - D$ 는 직렬 연결임
- (a) 각 부품의 작동이 서로 독립적이므로 이 시스템이 작동할 확률은

$$\begin{aligned} P[A \cap B \cap (C \cup D)] &= P(A)P(B)P(C \cup D) = P(A)P(B)[1 - P(C' \cap D')] \\ &= P(A)P(B)[1 - P(C')P(D')] = (0.9)(0.9)[1 - (1 - 0.8)(1 - 0.8)] \\ &= 0.7776 \end{aligned}$$

- (b) 구하는 조건부 확률은 다음과 같음

$$\begin{aligned} P &= \frac{P(\text{시스템은 작동하나 } C \text{는 작동 안 함})}{P(\text{시스템작동})} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C' \cap D)}{P(A \cap B \cap (C \cup D))} = \frac{(0.9)(0.9)(1-0.8)(0.8)}{0.7776} = 0.1667 \end{aligned}$$



<그림 12> PEL 전기시스템

조건부 확률

• 승법정리 (5/5)

• 예제 2.47

52장의 카드에서 3장의 카드를 연속적으로 비복원추출하는 실험에서 첫 번째 카드가 붉은색 에이스일 사상을 A_1 , 두 번째 카드가 10이나 J일 사상을 A_2 , 세 번째 카드가 3보다 크고 7보다 작을 사상을 A_3 라고 할 때, 사상 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 가 일어날 확률은?

- 첫 번째 카드가 붉은색 에이스인 사상 $A_1 = \{\text{하트 A, 다이아 A}\}$
 - $P(A_1) = \frac{2}{52}$
- 비복원추출에서 두 번째 카드가 10이나 J일 확률 $P(A_2) = \frac{8}{51}$
- 사상 A_1 이 일어난 후 A_2 가 일어나야 하므로 $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{2}{52} \times \frac{8}{51}}{\frac{2}{52}} = \frac{8}{51}$
- 사상 $A_3 = \{4, 5, 6\}$, 사상 A_1 와 A_2 가 일어난 이후 사상 A_3 가 일어날 확률은 $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50}$ 이므로
$$\therefore P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \left(\frac{2}{52}\right)\left(\frac{8}{51}\right)\left(\frac{12}{50}\right) = \frac{8}{5525}$$

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

베이즈 정리(Bayes' Rule)

• 전확률의 정리(Theorem of total probability) (1/3)

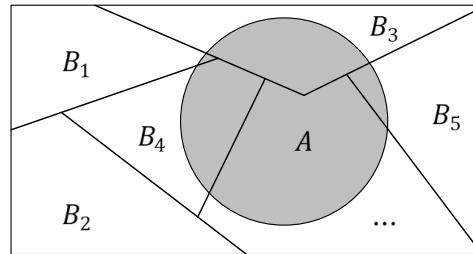
• 정의

- 표본공간이 k 개의 서로 배반인 사상 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 로 분할되어 있을 때, 임의의 사상 A 의 확률을 각 사상에서 확률을 합하여 구하는 정리

• 수식

- 사상 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 를 표본공간 S 의 분할이라 하고, $P(B_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ 라 하면, S 의 임의의 사상 A 에 대하여

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)$$



<그림 13> 전확률의 정리

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 전확률의 정리 (2/3)

- 수식
 - 증명

사상 A 는 서로 배반인 사상 $B_1 \cap A, B_2 \cap A, \dots, B_k \cap A$ 의 합집합, 즉 $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cdots (B_k \cap A)$ 임을 알 수 있다.

조건부 확률과 배반사건 정리를 활용하면

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \cdots \cup (B_k \cap A)] \\ &= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \cdots + P(B_k \cap A) \\ &= \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) \\ &= \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i) \end{aligned}$$

- 조건부 확률 : $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- 배반사건 정리 : $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

베이즈 정리

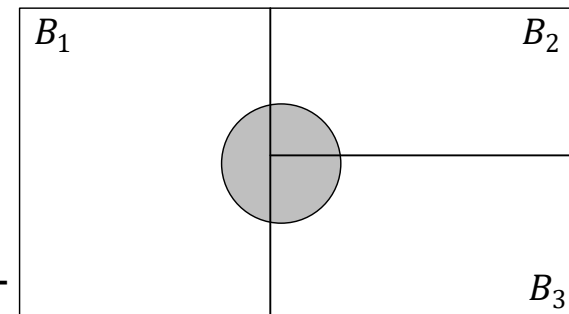
• 전확률의 정리 (3/3)

• 예제 2.48

3대의 기계 B_1, B_2, B_3 가 각각 전체 생산량의 30%, 45%, 25%를 생산하는 어느 조립 공장에서 각 기계의 불량품 제조율이 2%, 3%, 2% 라면, 완제품 중에서 하나를 선택했을 때, 그것이 불량품일 확률은 얼마인가?

- A : 그 제품이 불량품일 사상
- B_1 : 그 제품이 B_1 에서 제조되었을 사상
- B_2 : 그 제품이 B_2 에서 제조되었을 사상
- B_3 : 그 제품이 B_3 에서 제조되었을 사상
- 전확률의 정리를 이용하면 다음과 같이 표현 가능

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\ &= (0.3)(0.02) + (0.45)(0.03) + (0.25)(0.02) \\ &= 0.0245 \end{aligned}$$



<그림 14> 예제 2.48, 2.49의 표본공간

베이즈 정리

- 정의

- 전확률의 정리를 기반으로 하여 원인에서 결과를 추론하는 게 아닌 결과에서 원인을 추론하는 정리

- 수식

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- $P(A)$: 사전 확률(Prior)
 - 사상 B 가 발생하기 전에 가지고 있던 사상 A 의 확률
- $P(A|B)$: 사후 확률(Posterior)
 - 사상 B 가 발생한 정보를 반영한 사상 A 의 확률
- $P(B|A)$: 기능도(Likelihood)
 - 사상 A 가 발생한 후 사상 B 의 확률
- $P(B)$: 정규화 상수(Normalizing Constant)

베이즈 정리

- 수식

- 증명

- 조건부 확률 정의에 의하여

- $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

- 분자를 승법정리를 이용해 정리하면

- $P(B \cap A) = P(B)P(A|B), \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$

- 특징

- 이분법적 사고에 사용됨

- e.g., 진단 키트에서 양성 or 음성, 이상 신호 판단 유무

베이즈 정리

- 확장

- 전확률의 정리를 이용해 베이즈 정리를 확장하여 사용함
 - 이분법적 결정보다 원인을 분석 가능함

- 수식

- 사상 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 가 표본공간 S 의 분할이고 모든 $i(i = 1, 2, \dots, k)$ 에 대하여 $P(B_i) \neq 0$ 이고, 임의의 사상 A 에 대하여 $P(A) \neq 0$ 이라고 하면, 각 정수값 $r(r = 1, 2, \dots, k)$ 에 대해

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)}$$

- 특징

- 결과에 대한 여러 원인 중 진짜를 찾을 때 주로 사용
- 머신러닝에서 분류를 할 때 사용

베이지 정리

- 수식

- 증명

- 조건부 확률 정의에 의하여
 - $P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)}$
- 분자를 승법정리를 이용해 정리하면
 - $P(B_r \cap A) = P(B_r)P(A|B_r), \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{P(A)}$
- 분모에 전확률의 정리를 적용하면
 - $\frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)}$
- 분모를 조건부 확률을 이용해 정리하면
 - $\frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)}$

베이즈 정리

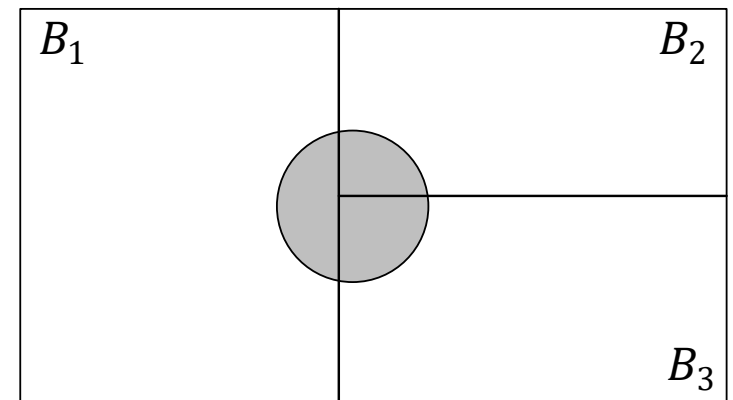
• 예제 2.49

3대의 기계 B_1, B_2, B_3 가 각각 전체 생산량의 30%, 45%, 25%를 생산하는 어느 조립 공장에서 각 기계의 불량품 제조율이 2%, 3%, 2% 이다.

임의로 선택한 제품이 불량품이라고 알려졌을 때, 그 제품이 기계 B_3 에서 제조되었을 확률은 얼마인가?

- A : 그 제품이 불량품일 사상
- B_1 : 그 제품이 B_1 에서 제조되었을 사상
- B_2 : 그 제품이 B_2 에서 제조되었을 사상
- B_3 : 그 제품이 B_3 에서 제조되었을 사상
- 베이즈 정리를 이용하면

$$\begin{aligned} P(B_3|A) &= \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)} \\ &= \frac{0.005}{0.006+0.0135+0.005} \\ &= \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49} \end{aligned}$$



<그림 14> 예제 2.48, 2.49의 표본공간

베이즈 정리

• 예제 2.50

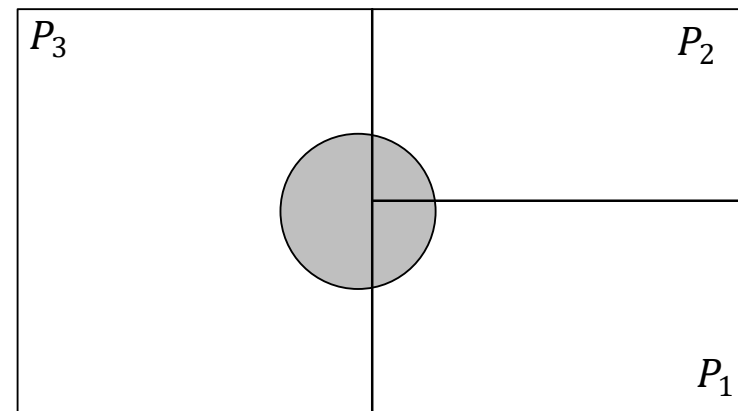
임의로 선택한 한 제품의 결과가 불량인 경우, 어느 분석법을 사용했을 가능성이 가장 많은 확률은 무엇인가?

- 조건 1: 제품 개발 시 분석법 1, 2, 3을 제품의 30%, 20%, 50%에 각각 적용함
- 조건 2: 불량률은 각각 $P(D|P_1) = 0.01, P(D|P_2) = 0.03, P(D|P_3) = 0.02$

- 우리가 구해야 할 확률은 $P(P_1|D), P(P_2|D), P(P_3|D)$

$$\begin{aligned} P(P_1|D) &= \frac{P(P_1)P(D|P_1)}{P(P_1)P(D|P_1)+P(P_2)P(D|P_2)+P(P_3)P(D|P_3)} = \frac{(0.3)(0.01)}{(0.3)(0.01)+(0.2)(0.03)+(0.5)(0.02)} \\ &= \frac{0.003}{0.019} = 0.158 \end{aligned}$$

- 같은 방식으로 계산하면 $P(P_2|D) = 0.316, P(P_3|D) = 0.526$
- ∴ 분석법 3을 사용했을 가능성이 큼



<그림 15> 예제 2.50의 표본공간

Thanks!

민 윤 홍(yunhong@pel.sejong.ac.kr)