2025/08/01, 2025 보안 기초 세미나

암호학과 네트워크 보안

-9장 암호수학 (2)-

이 성 현(dltjdgus2166@naver.com)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 보충
- 소인수분해(Factorization)
- 중국인의 나머지 정리(Chinese Remainder Theorem)
- 2차 합동(Quadratic Congruence)

목 차

- 보충
- 소인수분해(Factorization)
- 중국인의 나머지 정리(Chinese Remainder Theorem)
- 2차 합동(Quadratic Congruence)

보충

- 소인수분해(Factorization)

선형 종속 관계
0이 아닌 벡터들의 합이 0인 관계

  - 방법 (1/6)
    - 2차 체(Quadratic Sieve) (1/4)
      - 정의
        - 선형 종속 관계를 통해 $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 만족하는 x와 y를 구하여 소인수분해 하는 방법
      - 특징
        - 구해진 수가 항상 소인수인 것은 아님
          - 소인수가 아니라면 반복 적용해야 함
        - $O(e^{\sqrt{n_b \times log(n_b)}})$의 복잡도를 가짐
          - 부지수적인(Sub-Exponential) 복잡도를 가짐
        - 현재 알려진 소인수분해 알고리즘 중 100 자리 이하에서 가장 효율적인 소인수분해 알고리즘임

보충

- 소인수분해(Factorization)

완전 제곱수
제곱근이 정수인 수

  - 방법 (2/6)
    - 2차 체(Quadratic Sieve) (2/4)
      - 원리
        - $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 만족하는 x와 y가 존재할 경우, $\gcd(x-y,n)$ 또는 $\gcd(x+y,n)$를 이용하여 n의 인수를 구할 수 있음
          - $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n = x^2 - y^2 \equiv 0 \, mod \, n = (x-y)(x+y) \equiv 0 \, mod \, n$이므로 $n|(x-y)(x+y)$이고 $p|n$이기 때문에 $\gcd(x-y,n)$ 또는 $\gcd(x+y,n)$이 n의 소인수일 수 있음
        - 특정 수의 모든 소인수의 지수가 짝수일 경우, 그 수는 완전 제곱수임
          - e.g., $\sqrt{p^2 \times q^4} = p \times q^2$

보충

- 소인수분해(Factorization)

2차 잉여(Quadratic Residue)
$a^{(p-1)/2} \equiv 1 \; mod \; p$를 만족시키는 a

  - 방법 (3/6)
    - 2차 체(Quadratic Sieve) (3/4)
      - 과정
        1. 소수 중 n을 2차 잉여로 만드는 B 이하의 소수들을 구함
           - Factor Base라고 부르며 특수한 경우를 처리하기 위해 -1과 2를 포함함
             - e.g., $n = 1219, B = 30$일 때, Factor Base $= \{-1,2,3,5,7,11\}$
        2. 다항식 $Q(x_i) = x^2 - n$이 $B - smooth$ 하게 되는 x_i들을 구함
           - e.g., $n = 1219, B = 30$일 때, $x_1 = 35 (\because 35^2 - 1219 = 2^1 \times 3^1), x_2 = 36 (\because 36^2 - 1219 = 7^1 \times 11^1)$ 등…
        3. 다항식 $Q(x_i)$를 소인수분해한 결과를 지수 벡터로 변환하고 $mod \; 2$ 연산한 후 해당 지수 벡터들 중 더해서 0이 되는 $Q(x_i)$들을 구함
           - e.g., $Q(35) = 6 = 2^1 \times 3^1 = (0,1,1,0,0,0), Q(37) = 150 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2 = (0,1,1,2,0,0) = (0,1,1,0,0,0), Q(33) + Q(37) = (0,1,1,0,0,0) + (0,1,1,0,0,0) = (0,2,2,0,0,0) = (0,0,0,0,0,0)$ 등…

부록 #1 2차 체(Quadratic Sieve) 실제 동작 참고

보충

- 소인수분해(Factorization)
  - 방법 (4/6)
    - 2차 체(Quadratic Sieve) (4/4)
      - 과정

4. 구한 x_i와 $Q(x_i)$를 이용하여 $x \equiv \prod x_i \ mod\, n, y = \sqrt{\prod Q(x_i)}$를 구함
   - e.g., $x \equiv 35 \times 37\, mod\, 1219 \equiv 76\, mod\, 1219, y \equiv \sqrt{6 \times 150}\, mod\, 1219 \equiv 30\, mod\, 1219$
5. 구한 x, y가 $x \not\equiv \pm y\, mod\, n$인 경우, $\gcd(x-y, n)$ 또는 $\gcd(x+y, n)$는 n의 인수임
   - e.g., $\gcd(76-30, 1219) = 23, \gcd(76+30, 1219) = 53 \rightarrow n = 23 \times 53$

부록 #1 2차 체(Quadratic Sieve) 실제 동작 참고

보충

- 소인수분해(Factorization)
  - 방법 (5/6)
    - 정수체 체(Number Field Sieve) (1/2)
      - 정의
        - 다항식 $f(x)$를 통해 생성된 체(Field)를 이용하여 $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 얻어낸 후 $\gcd(x-y, n)$ 또는 $\gcd(x+y, n)$을 계산하여 소인수분해 하는 방법
      - 특징
        - 구해진 수가 항상 소인수인 것은 아님
          - 소인수가 아니라면 반복 적용해야 함
        - $O(e^{n_b^{1/3} \times log^{2/3}(n_b)})$의 복잡도를 가짐
          - 부지수적인(Sub-Exponential) 복잡도를 가짐
        - 현재 알려진 소인수분해 알고리즘 중 100자리 이상에서 가장 효율적인 알고리즘임

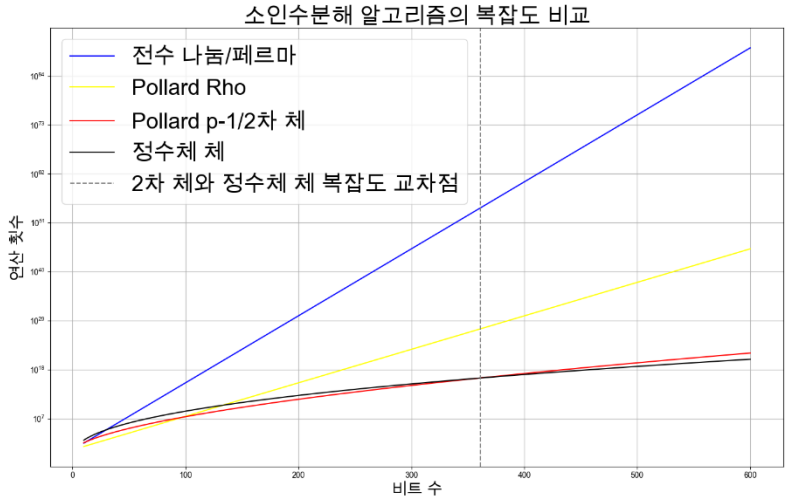
보충

- 소인수분해(Factorization)
  - 방법 (6/6)
    - 정수체 체(Number Field Sieve) (2/2)
      - 원리
        - $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 만족하는 x와 y가 존재할 경우, $\gcd(x-y,n)$ 또는 $\gcd(x+y,n)$를 이용하여 n의 인수를 구할 수 있음
      - 과정
        1. 다항식 $f(x)$와 $f(m) \equiv 0 \, mod \, n$을 만족하는 정수 m을 선택함
           - 주로 $m = \lfloor n^{1/d} \rfloor$($d$는 $f(x)$의 차수로, 주로 $4 \sim 6$을 사용함)을 먼저 선택하고 $f(m) \equiv 0 \, mod \, n$을 만족하는 다항식 $f(m)$을 선택함
        2. $R = a - b \times m, A = b^d \times f(\frac{a}{b})$에 대해 R, A가 모두 $B-smooth$한 (a,b)를 여러 개 구함
        3. R과 A를 소인수분해 하여 지수 벡터를 구하고 하나의 행렬 M으로 만들어서 선형 종속 관계를 만족하는 R_i와 A_i를 여러 개 구함
        4. 구한 R_i와 A_i로 $x^2 = \prod R_i \, , y^2 = \prod A_i$를 설정하고 $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 이용하여 $\gcd(x-y,n)$과 $\gcd(x+y,n)$으로 n의 인수를 구함

보충

- 소인수분해(Factorization)
  - 복잡도 (1/2)
    - Pollard $p-1$ 알고리즘과 2차 체 알고리즘의 복잡도는 거의 유사하지만 Pollard $p-1$ 알고리즘은 특정 조건 하에서만 성공하므로 실제로 가장 많이 쓰이는 알고리즘은 2차 체 알고리즘과 정수체 체 알고리즘임
    - 현재는 100자리 이하의 소인수분해는 2차 체 알고리즘을 주로 사용하고 100자리 이상의 소인수분해는 정수체 체 알고리즘을 주로 사용함

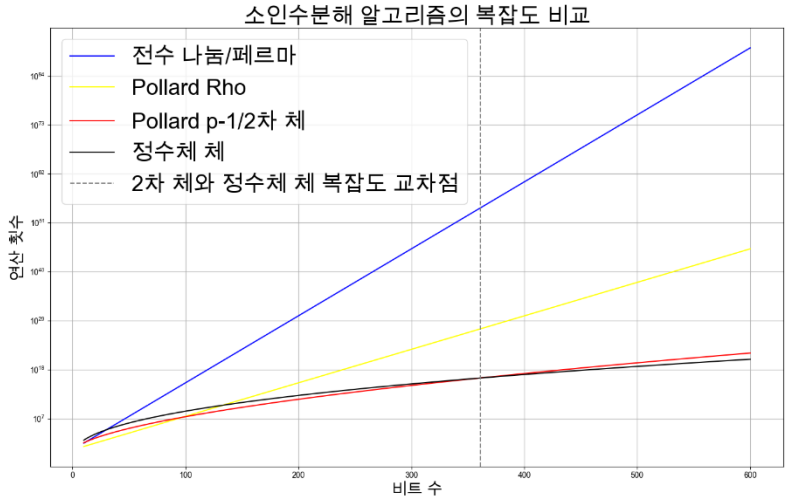
방법	복잡도
전수 나눔(Trial Division)	$O(2^{n_b/2})$
페르마(Fermat)	$O(2^{n_b/2})$
Pollard $p-1$	$O(e^{\sqrt{\log(p)\times\log(\log(p))}})$
Pollard Rho	$O(2^{n_b/4})$
2차 체(Quadratic Sieve)	$O(e^{\sqrt{n_b\times\log(n_b)}})$
정수체 체(Number Field Sieve)	$O(e^{n_b^{1/3}\times\log^{2/3}(n_b)})$



보충

- 소인수분해(Factorization)
  - 복잡도 (2/2)
    - 현재까지 알려진 소인수분해 알고리즘의 비트-연산 복잡도는 대부분 지수적이거나 부지수적인 형태를 가짐
    - 소인수분해 하려는 수가 커질수록 결과를 얻기 위해 걸리는 시간이 급격히 증가함
      - e.g., 초당 2^{30}번의 연산을 하는 컴퓨터로 1024 비트의 수를 Pollard rho, 2차 체, 정수체 체 알고리즘으로 소인수분해 시도 시 대략 $4.1 \times 10^{60}, 6.3 \times 10^{19}, 4.4 \times 10^{19}$년의 시간이 걸림

방법	복잡도
전수 나눔(Trial Division)	$O(2^{n_b/2})$
페르마(Fermat)	$O(2^{n_b/2})$
Pollard $p-1$	$O(e^{\sqrt{\log(p)\times\log(\log(p))}})$
Pollard Rho	$O(2^{n_b/4})$
2차 체(Quadratic Sieve)	$O(e^{\sqrt{n_b\times\log(n_b)}})$
정수체 체(Number Field Sieve)	$O(e^{n_b^{1/3}\times\log^{2/3}(n_b)})$



목 차

- 보충
- 소인수분해(Factorization)
- 중국인의 나머지 정리(Chinese Remainder Theorem)
- 2차 합동(Quadratic Congruence)

소인수분해

- 정의
  - 1보다 큰 자연수를 소인수의 곱으로 나타내는 방법

- 산술 기본 정리(Fundamental Theorem of Arithmetic) (1/3)
  - 1보다 큰 모든 자연수는 하나 이상의 소수의 곱으로 표현됨
    - $n = {p_1}^{e_1} \times {p_2}^{e_2} \times \cdots \times {p_k}^{e_k}$로 표현됨
      - e.g., $72 = 2^3 \times 3^2$
  - 하나의 정수는 소수의 순서를 제외하면 유일하게 표현됨
    - e.g., $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$로만 표현됨

소인수분해

- 산술 기본 정리(Fundamental Theorem of Arithmetic) (2/3)

$\gcd(a,b)$: a와 b의 최대공약수	$\mathrm{lcm}(a,b)$: a와 b의 최대공약수
$\min(a,b)$: a와 b 중 작은 수	$\max(a,b)$: a와 b 중 큰 수

  - 해당 정리를 이용하여 최대공약수를 구할 수 있음
    - $a = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times \cdots \times {p_k}^{a_k}, b = {p_1}^{b_1} \times {p_2}^{b_2} \times \cdots \times {p_k}^{b_k}$일 때 $\gcd(a,b) = {p_1}^{\min(a_1, b_1)} \times {p_2}^{\min(a_2, b_2)} \times \cdots \times {p_k}^{\min(a_k, b_k)}$로 표현함
      - e.g., $72 = 2^3 \times 3^2, 108 = 2^2 \times 3^3 \rightarrow \gcd(72,108) = 2^{\min(3,2)} \times 3^{\min(2,3)} = 2^2 \times 3^2 = 36$
  - 해당 정리를 이용하여 최소공배수를 구할 수 있음
    - $a = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times \cdots \times {p_k}^{a_k}, b = {p_1}^{b_1} \times {p_2}^{b_2} \times \cdots \times {p_k}^{b_k}$일 때 $\mathrm{lcm}(a,b) = {p_1}^{\max(a_1, b_1)} \times {p_2}^{\max(a_2, b_2)} \times \cdots \times {p_k}^{\max(a_k, b_k)}$로 표현함
      - e.g., $72 = 2^3 \times 3^2, 108 = 2^2 \times 3^3 \rightarrow \mathrm{lcm}(72,108) = 2^{\max(3,2)} \times 3^{\max(2,3)} = 2^3 \times 3^3 = 216$

소인수분해

- 산술 기본 정리(Fundamental Theorem of Arithmetic) (3/3)
  - 최대공약수와 최소공배수는 다음과 같은 관계를 가짐
    - $\gcd(a,b) \times \mathrm{lcm}(a,b) = a \times b$

$$\because \gcd(a,b) \times \mathrm{lcm}(a,b)$$
$$= \left(p_1^{\min(a_1,b_1)} \times p_2^{\min(a_2,b_2)} \times \cdots \times p_k^{\min(a_k,b_k)}\right)$$
$$\times \left(p_1^{\max(a_1,b_1)} \times p_2^{\max(a_2,b_2)} \times \cdots \times p_k^{\max(a_k,b_k)}\right)$$
$$= p_1^{a_1+b_1} \times p_2^{a_2+b_2} \times \cdots \times p_k^{a_k+b_k} = a \times b$$

소인수분해

- 방법 (1/18)

*제수(Divisor)
나눗셈에서 다른 수를 나누려는 수

  - 전수 나눔 소인수분해(Trial Division Factorization) (1/3)
    - 정의
      - *제수를 하나씩 늘려가며 소인수분해 하는 방법
    - 특징
      - 소인수분해가 끝날 때까지 인수분해를 반복함
      - $O(2^{n_b/2})$의 복잡도를 가짐(n_b는 n의 비트 수)
        - 지수적인(Exponential) 복잡도를 가짐
        - $n > 2^{10}$인 경우 비효율적임

소인수분해

- 방법 (2/18)

*피제수(Dividend)
나눗셈에서 다른 수에게 나눠지는 수

  - 전수 나눔 소인수분해(Trial Division Factorization) (2/3)
    - 원리
      - n이 합성수라면 $\sqrt{n}$ 이하의 소수 p가 하나 이상 존재함
    - 과정
      1. *피제수가 제수로 나누어 떨어지지 않을 때까지 나눔
      2. 더 이상 제수로 나누어 떨어지지 않으면 피제수가 제수로 나누어 떨어질 때까지 제수를 늘려가며 $a \leq \sqrt{n}$일 동안 반복함
      3. 마지막까지 남은 피제수가 1보다 크면 그 피제수 또한 소수이므로 소인수에 포함함

```
Trial_Division_Factorization (n)
{
    a ← 2
    while (a ≤ √n)
    {
        while (n mod a = 0)
        {
            output a
            n = n/a
        }
        a ← a + 1
    }
    if (n > 1) output n
}
```

소인수분해

- 방법 (3/18)
  - 전수 나눔 소인수분해(Trial Division Factorization) (3/3)
    - 예제 9.1

전수 나눔 소인수분해 알고리즘을 이용하여 1233과 1523357784를 소인수분해 하라

- 결과
  - $1233 = 3^2 \times 137^1$

```
n : 1233
3 is prime factor
3 is prime factor
137 is prime factor
```

  - $1523357784 = 2^3 \times 3^2 \times 13^1 \times 37^1 \times 43987^1$

```
n : 1523357784
2 is prime factor
2 is prime factor
2 is prime factor
3 is prime factor
3 is prime factor
13 is prime factor
37 is prime factor
43987 is prime factor
```

```python
def Trial_Division(n):
    a = 2  ## 제수
    while(a*a <= n):
        while (n%a == 0):
            print(f'{a} is prime factor')
            n //= a
        a += 1
    if(n>1):
        print(f'{n} is prime factor')

Trial_Division(int(input('n : ')))
```

소인수분해

- 방법 (4/18)
  - 페르마 소인수분해(Fermat Factorization) (1/3)
    - 정의
      - 피제수를 두 제곱수의 차 형태로 나타내어 소인수분해 하는 방법
    - 특징
      - 구해진 두 수가 항상 소인수인 것은 아님
        - 소인수가 아니라면 반복 적용해야 함
      - $O(2^{n_b/2})$의 복잡도를 가짐
        - 지수적인(Exponential) 복잡도를 가짐
        - 두 소인수 간의 차가 커질수록 비효율적임

소인수분해

- 방법 (5/18)
  - 페르마 소인수분해(Fermat Factorization) (2/3)
    - 원리
      - $n = x^2 - y^2$인 x와 y가 존재한다면 $n = (x + y)(x - y)$로 나타낼 수 있음
    - 과정
      1. 초기값 x를 $\sqrt{n}$보다 큰 수 중 가장 작은 정수로 초기화함
      2. $x^2 - n$을 통해 $n = x^2 - y^2$을 만족하는 y^2을 찾음
      3. 만족하는 x와 y를 찾았다면 n의 인수는 $x + y$와 $x - y$임
      4. 찾지 못했다면 x를 하나씩 늘려가며 반복함

```
Fermat_Factorization (n)
{
    x ← ⌈√n⌉
    while (x < n)
    {
        w ← x² − n
        if (w is perfect square)
        {
            y ← √w
            a ← x + y
            b ← x − y
            return a and b
        }
        x ← x + 1
    }
}
```

소인수분해

- 방법 (6/18)
  - 페르마 소인수분해(Fermat Factorization) (3/3)
    - 예제 9.2

페르마 소인수분해 알고리즘을 이용하여 2431를 소인수분해 하라

- 결과
  - $2431 = 143 \times 17 = 11 \times 13 \times 17$

```
n : 2431
n = 143*17
```

↑ 143은 소수가 아니므로 143에 대해
↓ 한 번 더 페르마 소인수분해 알고리즘 적용

```
n : 143
n = 13*11
```

```python
import math

def Fermat(n):
    x = math.isqrt(n)
    if(x*x < n):
        x += 1  ## root(n)보다 큰 수 중 가장 작은 정수
    while(x < n):
        w = x*x-n
        if(is_perfect_square(w)):
            y = math.isqrt(w)
            a = x+y
            b = x-y
            return int(a), int(b)
        x += 1

def is_perfect_square(w):
    s = math.isqrt(w)
    return s*s == w

result = Fermat(int(input('n : ')))
print(f'n = {result[0]}*{result[1]}')
```

소인수분해

- 방법 (7/18)

*$B-smooth$
n의 소인수가 전부 B 이하

  - Pollard $p-1$ 소인수분해(Pollard $p-1$ Factorization) (1/3)
    - 정의
      - 임의로 선택한 B로 n의 소인수 p를 하나 찾아내어 소인수분해 하는 방법
    - 특징
      - 하나의 소수만을 찾아내므로 소인수분해를 위해서는 반복 적용해야 함
      - $O\left(e^{\sqrt{\log(p)\times\log(\log(p))}}\right)$의 복잡도를 가짐
        - 부지수적인(Sub-Exponential) 복잡도를 가짐
      - 확률적 알고리즘의 성격을 띔
        - $p-1$이 *$B-smooth$ 하지 않으면 실패할 수 있음

소인수분해

- 방법 (8/18)
  - Pollard $p-1$ 소인수분해(Pollard $p-1$ Factorization) (2/3)
    - 원리
      - $n = kp$에 대해 $p-1 | B!$일 경우, $p | a^{B!}-1$이므로 $n \nmid a^{B!}-1$이라면 $p = \gcd(a^{B!}-1, n)$임
    - 과정
      1. 밑수 a를 2로 초기화하고 임의로 선택한 B에 대해 $2^{B!}$를 계산함
      2. 계산한 $2^{B!}$를 이용하여 $\gcd(2^{B!}-1, n)$을 계산함
      3. $1 < \gcd(2^{B!}-1, n) < n$이 아닐 경우, B 또는 밑수 a를 새로 정의하여 다시 시도함

Pollard_($p-1$)_Factorization (n, B)
{
  $a \leftarrow 2$
  $e \leftarrow 2$
  while $(e \leq B)$
  {
    $a \leftarrow a^e \bmod n$
    $e \leftarrow e + 1$
  }
  $p \leftarrow \gcd(a-1, n)$
  if $(1 < p < n)$ return p
  return $failure$
}

소인수분해

- 방법 (9/18)
  - Pollard $p-1$ 소인수분해(Pollard $p-1$ Factorization) (3/3)
    - 예제 9.3

Pollard $p-1$ 소인수분해 알고리즘을 이용하여 $B=8$일 때의 57247189의 소인수를 구하라

- 결과
  - $p=421$

```
n : 57247159
B : 8
Prime factor is 421
```

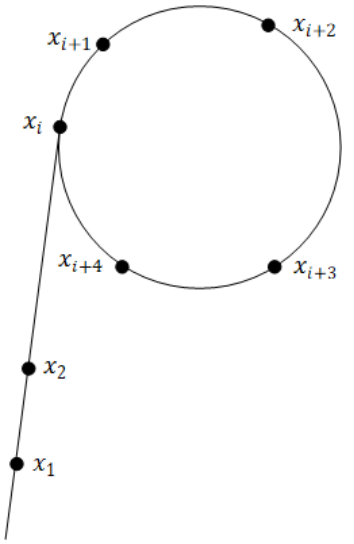
```python
def Pollard_p1(n, B):
    a = 2
    e = 2
    while(e <= B):
        a = pow(a, e, n)
        e += 1
    p = gcd(a-1, n) ## 계산에서 사용되는 a는 a^B!
    if(1 < p < n):
        return p
    return 1

def gcd(a, b): ## 유클리드 알고리즘으로 최대공약수 계산
    while(b != 0):
        a, b = b, a % b
    return a

n = int(input('n : '))
B = int(input('B : '))
print(f'Prime factor is {Pollard_p1(n,B)}')
```

소인수분해

- 방법 (10/18)
  - Pollard Rho 소인수분해(Pollard Rho Factorization) (1/3)
    - 정의
      - 임의로 선택된 숫자와 반복되는 함수를 사용하여 소인수분해 하는 방법
    - 특징
      - 하나의 소수만을 찾아내므로 소인수분해를 위해서는 반복 적용해야 함
      - $O(2^{n_b/4})$의 복잡도를 가짐
        - 지수적인(Exponential) 복잡도를 가짐
      - 확률적 알고리즘의 성격을 띔
        - $x \equiv y \bmod n$이지만 $\gcd(x-y, n) = n$이 되는 경우, 인수를 찾지 못 하고 실패할 수 있음



소인수분해

- 방법 (11/18)
  - Pollard Rho 소인수분해(Pollard Rho Factorization) (2/3)
    - 원리
      - $n = kp$에 대해 두 정수 x, y 에 대해 $p|(x-y)$이면서 $n \nmid (x-y)$일 경우, $p = \gcd(x-y, n)$임
    - 과정
      1. 순환이 존재하도록 하는 함수 $f(x)$ 정의
         - 주로 $f(x) = x^2 + 1 \; mod \; n$
      2. $x_{i+1} = f(x_i), y_{i+1} = f(f(y_i))$를 적용하여 순환을 진행시키며 $\gcd(x-y, n)$을 계산함
      3. $\gcd(x-y, n) \neq 1$일 때까지 순환을 진행하고, $\gcd(x-y, n) = n$일 경우, 실패한 것이므로 함수나 초기값을 새로 정의하여 다시 시도함

```
Pollard_Rho_Factorization (n)
{
    x ← 2
    y ← 2
    p ← 2
    while (p = 1)
    {
        x ← f(x) mod n
        y ← f(f(y) mod n) mod n
        p ← gcd(x − y, n)
    }
    return p
}
```

소인수분해

- 방법 (12/18)
  - Pollard Rho 소인수분해(Pollard Rho Factorization) (3/3)
    - 예제 9.4

Pollard Rho 소인수분해 알고리즘을 이용하여 434617의 소인수를 구하라

- 결과
  - $p = 709$

```
n : 434617
Prime factor is 709
```

단계	x	y	p
0	2	2	1
1	5	26	1
2	26	23713	1
3	677	142292	1
4	23713	157099	1
5	346589	52128	1
6	142292	41831	1
7	380320	68775	1

단계	x	y	p
8	157099	427553	1
9	369457	2634	1
10	52128	63593	1
11	102901	161353	1
12	41831	64890	1
13	64520	21979	1
14	68775	16309	709

```python
def Pollard_Rho(n):
    x = 2
    y = 2
    p = 1
    while(p == 1):
        x = f(x,n)
        y = f(f(y,n),n)
        p = gcd(x-y,n)
    return p

def f(x, n): ## 다항식 f(x)
    return (x*x+1)%n

def gcd(a, b): ## 유클리드 알고리즘으로 최대공약수 계산
    while(b != 0):
        a, b = b, a % b
    return a

print('Prime factor is',Pollard_Rho(int(input("n : "))))
```

소인수분해

- 방법 (13/18)

선형 종속 관계
0이 아닌 벡터들의 합이 0인 관계

  - 2차 체(Quadratic Sieve) (1/4)
    - 정의
      - 선형 종속 관계를 통해 $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 만족하는 x와 y를 구하여 소인수분해 하는 방법
    - 특징
      - 구해진 수가 항상 소인수인 것은 아님
        - 소인수가 아니라면 반복 적용해야 함
      - $O(e^{\sqrt{n_b \times log(n_b)}})$의 복잡도를 가짐
        - 부지수적인(Sub-Exponential) 복잡도를 가짐
      - 현재 알려진 소인수분해 알고리즘 중 100 자리 이하에서 가장 효율적인 소인수분해 알고리즘임

소인수분해

- 방법 (14/18)

완전 제곱수
제곱근이 정수인 수

  - 2차 체(Quadratic Sieve) (2/4)
    - 원리
      - $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 만족하는 x와 y가 존재할 경우, $\gcd(x-y,n)$ 또는 $\gcd(x+y,n)$을 이용하여 n의 인수를 구할 수 있음
        - $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n = x^2 - y^2 \equiv 0 \, mod \, n = (x-y)(x+y) \equiv 0 \, mod \, n$이므로 $n|(x-y)(x+y)$이고 $p|n$이기 때문에 $\gcd(x-y,n)$ 또는 $\gcd(x+y,n)$이 n의 소인수일 수 있음
      - 특정 수의 모든 소인수의 지수가 짝수일 경우, 그 수는 완전 제곱수임
        - e.g., $\sqrt{p^2 \times q^4} = p \times q^2$

소인수분해

- 방법 (15/18)
  - 2차 체(Quadratic Sieve) (3/4)
    - 과정
      1. 소수 중 n을 2차 잉여로 만드는 B 이하의 소수들을 구함
         - Factor Base라고 부르며 특수한 경우를 처리하기 위해 -1과 2를 포함함
           - e.g., $n = 1081, B = 30$일 때, Factor Base $= \{-1,2,3,5,7,11\}$
      2. 다항식 $Q(x_i) = x^2 - n$이 $B - smooth$ 하게 되는 x_i들을 구함
         - e.g., $n = 1219, B = 30$일 때, $x_1 = 35(\because 35^2 - 1219 = 2^1 \times 3^1), x_2 = 36(\because 36^2 - 1219 = 7^1 \times 11^1)$ 등…
      3. 다항식 $Q(x_i)$를 소인수분해한 결과를 지수 벡터로 변환하고 $mod\ 2$ 연산한 후 해당 지수 벡터들 중 더해서 0이 되는 $Q(x_i)$들을 구함
         - e.g., $Q(35) = 6 = 2^1 \times 3^1 = (0,1,1,0,0,0), Q(37) = 150 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$
           $= (0,1,1,2,0,0) = (0,1,1,0,0,0), Q(33) + Q(37) = (0,1,1,0,0,0) + (0,1,1,0,0,0)$
           $= (0,2,2,0,0,0) = (0,0,0,0,0,0)$ 등…

2차 잉여(Quadratic Residue)
$a^{(p-1)/2} \equiv 1\ mod\ p$를 만족시키는 a

부록 #1 2차 체(Quadratic Sieve) 실제 동작 참고

소인수분해

- 방법 (16/18)
  - 2차 체(Quadratic Sieve) (4/4)
    - 과정
      4. 구한 x_i와 $Q(x_i)$를 이용하여 $x \equiv \prod x_i \ mod\, n, y = \sqrt{\prod Q(x_i)}$를 구함
         - e.g., $x \equiv 35 \times 37\, mod\, 1219 \equiv 76\, mod\, 1219, y \equiv \sqrt{6 \times 150}\, mod\, 1219 \equiv 30\, mod\, 1219$
      5. 구한 x, y가 $x \not\equiv \pm y\, mod\, n$인 경우, $\gcd(x-y, n)$ 또는 $\gcd(x+y, n)$는 n의 인수임
         - e.g., $\gcd(76-30, 1219) = 23, \gcd(76+30, 1219) = 53 \rightarrow n = 23 \times 53$

부록 #1 2차 체(Quadratic Sieve) 실제 동작 참고

소인수분해

- 방법 (17/18)
  - 정수체 체(Number Field Sieve) (1/3)
    - 정의
      - 다항식 $f(x)$를 통해 생성된 체(Field)를 이용하여 $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 얻어낸 후 $\gcd(x-y,n)$ 또는 $\gcd(x+y,n)$을 계산하여 소인수분해 하는 방법
    - 특징
      - 구해진 수가 항상 소인수인 것은 아님
        - 소인수가 아니라면 반복 적용해야 함
      - $O(e^{n_b^{1/3} \times log^{2/3}(n_b)})$의 복잡도를 가짐
        - 부지수적인(Sub-Exponential) 복잡도를 가짐
      - 현재 알려진 소인수분해 알고리즘 중 100자리 이상에서 가장 효율적인 알고리즘임

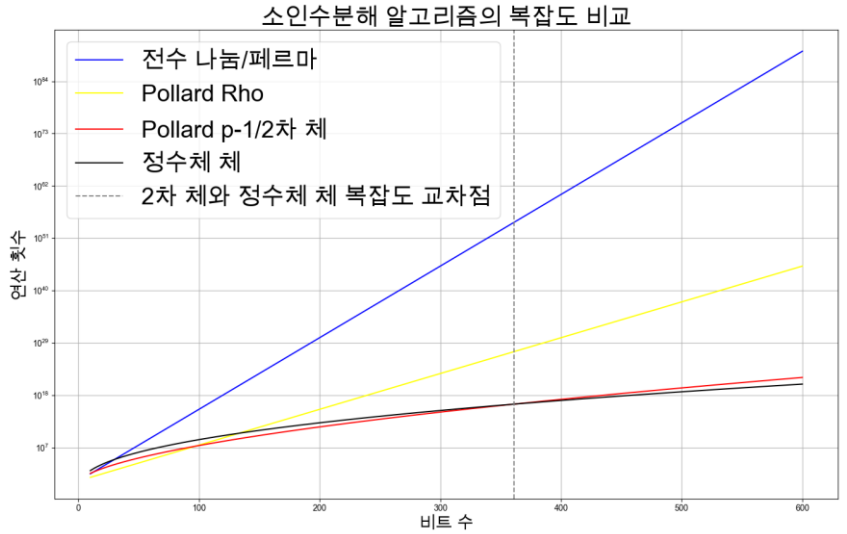
소인수분해

- 방법 (18/18)
  - 정수체 체(Number Field Sieve) (2/3)
    - 원리
      - $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 만족하는 x와 y가 존재할 경우, $\gcd(x-y,n)$ 또는 $\gcd(x+y,n)$를 이용하여 n의 인수를 구할 수 있음
    - 과정
      1. 다항식 $f(x)$와 $f(m) \equiv 0 \, mod \, n$을 만족하는 정수 m을 선택함
         - 주로 $m = \lfloor n^{1/d} \rfloor$($d$는 $f(x)$의 차수로, 주로 4~6을 사용함)을 먼저 선택하고 $f(m) \equiv 0 \, mod \, n$을 만족하는 다항식 $f(m)$을 선택함
      2. $R = a - b \times m, A = b^d \times f(\frac{a}{b})$에 대해 R, A가 모두 $B-smooth$한 (a,b)를 여러 개 구함
      3. R과 A를 소인수분해 하여 지수 벡터를 구하고 하나의 행렬 M으로 만들어서 선형 종속 관계를 만족하는 R_i와 A_i를 여러 개 구함
      4. 구한 R_i와 A_i로 $x^2 = \prod R_i \, , y^2 = \prod A_i$를 설정하고 $x^2 \equiv y^2 \, mod \, n$을 이용하여 $\gcd(x-y,n)$과 $\gcd(x+y,n)$으로 n의 인수를 구함

소인수분해

- 복잡도 (1/2)
  - Pollard $p-1$ 알고리즘과 2차 체 알고리즘의 복잡도는 거의 유사하지만 Pollard $p-1$ 알고리즘은 특정 조건 하에서만 성공하므로 실제로 가장 많이 쓰이는 알고리즘은 2차 체 알고리즘과 정수체 체 알고리즘임
  - 현재는 100자리 이하의 소인수분해는 2차 체 알고리즘을 주로 사용하고 100자리 이상의 소인수분해는 정수체 체 알고리즘을 주로 사용함

방법	복잡도
전수 나눔(Trial Division)	$O(2^{n_b/2})$
페르마(Fermat)	$O(2^{n_b/2})$
Pollard $p-1$	$O(e^{\sqrt{\log(p)\times\log(\log(p))}})$
Pollard Rho	$O(2^{n_b/4})$
2차 체(Quadratic Sieve)	$O(e^{\sqrt{n_b\times\log(n_b)}})$
정수체 체(Number Field Sieve)	$O(e^{n_b^{1/3}\times\log^{2/3}(n_b)})$



소인수분해

- 복잡도 (2/2)
  - 현재까지 알려진 소인수분해 알고리즘의 비트-연산 복잡도는 대부분 지수적이거나 부지수적인 형태를 가짐
  - 소인수분해 하려는 수가 커질수록 결과를 얻기 위해 걸리는 시간이 급격히 증가함
    - e.g., 초당 2^{30}번의 연산을 하는 컴퓨터로 1024 비트의 수를 Pollard rho, 2차 체, 정수체 체 알고리즘으로 소인수분해 시도 시 대략 $4.1 \times 10^{60}, 6.3 \times 10^{19}, 4.4 \times 10^{19}$년의 시간이 걸림

방법	복잡도
전수 나눔(Trial Division)	$O(2^{n_b/2})$
페르마(Fermat)	$O(2^{n_b/2})$
Pollard $p-1$	$O(e^{\sqrt{\log(p)\times\log(\log(p))}})$
Pollard Rho	$O(2^{n_b/4})$
2차 체(Quadratic Sieve)	$O(e^{\sqrt{n_b\times\log(n_b)}})$
정수체 체(Number Field Sieve)	$O(e^{n_b^{1/3}\times\log^{2/3}(n_b)})$

- 복잡도 (2/2)
  - 현재까지 알려진 소인수분해 알고리즘의 비트-연산 복잡도는 대부분 지수적이거나 부지수적인 형태를 가짐
  - 소인수분해 하려는 수가 커질수록 결과를 얻기 위해 걸리는 시간이 급격히 증가함
    - e.g., 초당 2^{30}번의 연산을 하는 컴퓨터로 1024 비트의 수를 Pollard rho, 2차 체, 정수체 체 알고리즘으로 소인수분해 시도 시 대략 $4.1 \times 10^{60}, 6.3 \times 10^{19}, 4.4 \times 10^{19}$년의 시간이 걸림

목 차

- 보충
- 소인수분해(Factorization)
- 중국인의 나머지 정리(Chinese Remainder Theorem)
- 2차 합동(Quadratic Congruence)

중국인의 나머지 정리

- 정리
  - 서로소인 모듈로를 갖는 연립 합동 방정식은 $0 \leq x < M$의 범위에서 유일한 해를 가짐
    - 연립 합동 방정식은 $\begin{cases} x \equiv a_1 \, mod \, m_1 \\ x \equiv a_2 \, mod \, m_2 \\ \vdots \\ x \equiv a_n \, mod \, m_n \end{cases}$ 로 표현됨
  - a_n, M 등을 이용하여 연립 합동 방정식의 해 x를 구함
    - $x \equiv \sum_{i=1}^{n} a_n \times M_n \times {M_n}^{-1} \; mod \, M$

표기	설명
a_n	임의의 정수
m_n	서로소인 모듈로
M	모든 m_n의 곱 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$
M_n	m_n을 제외한 나머지 모듈로의 곱 M/m_n
${M_n}^{-1}$	M_n의 모듈로 m_n에서의 곱셈 역원

중국인의 나머지 정리

- 예제 9.5

다음 합동방정식의 해를 구하라

$$x \equiv 2 \; mod \; 3$$
$$x \equiv 3 \; mod \; 5$$
$$x \equiv 2 \; mod \; 7$$

$M = m_1 \times m_2 \times m_3 = 3 \times 5 \times 7 = 105$

$M_1 = M/m_1 = 105/3 = 35$
$M_2 = M/m_2 = 105/5 = 21$
$M_3 = M/m_3 = 105/7 = 15$

$M_1 \times {M_1}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 3 = 35 \times {M_1}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 3 \rightarrow \; {M_1}^{-1} = 2$
$M_2 \times {M_2}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 5 = 21 \times {M_2}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 5 \rightarrow \; {M_2}^{-1} = 1$
$M_3 \times {M_3}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 7 = 15 \times {M_3}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 7 \rightarrow \; {M_3}^{-1} = 1$

$x \equiv \left(a_1 \times M_1 \times {M_1}^{-1}\right) + \left(a_2 \times M_2 \times {M_2}^{-1}\right) + \left(a_3 \times M_3 \times {M_3}^{-1}\right) mod \; M$
$\equiv (2 \times 35 \times 2) + (3 \times 21 \times 1) + (2 \times 15 \times 1) \; mod \; 105 \equiv 23 \; mod \; 105$

$\therefore x \equiv 23 \; mod \; 105$

중국인의 나머지 정리

- 응용 (1/2)
  - 큰 정수를 작은 정수로 나누어 빠르게 계산할 수 있음
    - e.g., 큰 수 x를 x보다 작은 여러 개의 $mod\ m_k$의 연립 합동 방정식으로 나누어 계산할 수 있음
  - $x^2 \equiv a\ mod\ n$ 꼴의 2차 합동 문제를 해결하는 데 사용함
    - e.g., $n = p \times q$를 소인수분해 하여 모듈로 p와 모듈로 q에 대한 해를 구하고, 이를 연립하여 모듈로 n에서의 해를 구할 수 있음

중국인의 나머지 정리

- 응용 (2/2)
  - 예제 9.6

사용하는 시스템의 능력이 100보다 작은 수만 입력받을 수 있다고 가정하고 $x = 123$, $y = 334$일 때, $z = x \times y$를 중국인의 나머지 정리를 이용하여 구하라

- 임의의 m_1, m_2, m_3인 99,98,97을 선택하여 x, y, z를 표현함

$x \equiv 24 \; mod \; 99$ $\quad$ $y \equiv 37 \; mod \; 99$ $\quad$ $x \times y \equiv 96 \; mod \; 99 \rightarrow \; \boldsymbol{z \equiv 96 mod \; 99}$

$x \equiv 25 \; mod \; 98$ $\quad$ $y \equiv 40 \; mod \; 98$ $\quad$ $x \times y \equiv 20 \; mod \; 98 \rightarrow \; \boldsymbol{z \equiv 20 \; mod \; 98}$

$x \equiv 26 \; mod \; 97$ $\quad$ $y \equiv 43 \; mod \; 97$ $\quad$ $x \times y \equiv 51 \; mod \; 97 \rightarrow \; \boldsymbol{z \equiv 51 \; mod \; 97}$

- 중국인의 나머지 정리로 계산

$M = 99 \times 98 \times 97 = 941094$

$M_1 = 941094/99 = 9506$

$M_2 = 941094/98 = 9603$

$M_3 = 941094/97 = 9702$

$M_1 \times {M_1}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 3 = 9506 \times {M_1}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 3 \rightarrow \; {M_1}^{-1} = 50$

$M_2 \times {M_2}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 5 = 9603 \times {M_2}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 5 \rightarrow \; {M_2}^{-1} = 97$

$M_3 \times {M_3}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 7 = 9702 \times {M_3}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 7 \rightarrow \; {M_3}^{-1} = 49$

$z \equiv (96 \times 9506 \times 50) + (20 \times 9603 \times 97) + (51 \times 9702 \times 49) \; mod \; 941094 \equiv 88503918 \; mod \; 941094$

$\equiv 41082 \; mod \; 941094$

$\therefore \; z \equiv 41082 \; mod \; 941094$

목 차

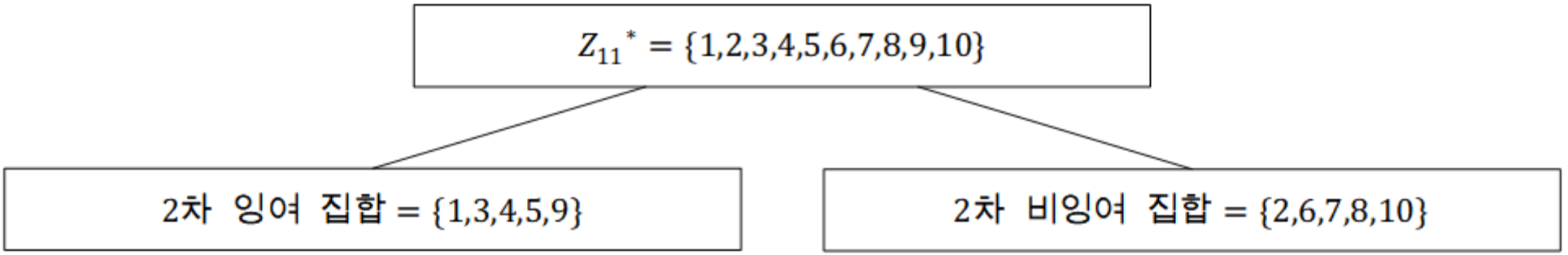
- 보충
- 소인수분해(Factorization)
- 중국인의 나머지 정리(Chinese Remainder Theorem)
- 2차 합동(Quadratic Congruence)

2차 합동

- 정의
  - $Ax^2 + Bx + C \equiv 0 \, mod \, n$의 형태를 갖는 합동 방정식
- 특징
  - 일반적인 2차 방정식과 다르게 해가 존재하지 않을 수도 있음
    - e.g., $x^2 \equiv 2 \, mod \, 3$의 해는 존재하지 않음
  - 합동식이 $x^2 \equiv a \, mod \, n$의 형태를 가지고 n이 소인수분해가 어려운 합성수일 경우 단방향 함수의 성격을 띔
    - x를 통해 $x^2 \, mod \, n \equiv a$를 구하기는 쉬우나 a를 통해 x를 구하는 것은 상대적으로 더 오랜 시간이 걸림

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (1/6)
  - 2차 잉여(QR, Quadratic Residue)
    - $x^2 \equiv a \; mod \; p$에서 x가 해를 가지게 되는 a
      - e.g., $x^2 \equiv 3 \; mod \; 11 \rightarrow x \equiv 5 \; mod \; 11, x \equiv 6 \; mod \; 11$
        $\therefore 3$은 $mod \; 11$에서 2차 잉여
  - 2차 비잉여(QNR, Quadratic Nonresidue)
    - $x^2 \equiv a \; mod \; p$에서 x가 해를 가지지 않는 a
      - e.g., $x^2 \equiv 2 \; mod \; 11 \rightarrow$ 해가 존재하지 않음
        $\therefore 2$는 $mod \; 11$에서 2차 비잉여



2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (2/6)
  - 오일러 판정법(Euler's Criterion)
    - a와 p가 서로소일 때 $a^{(p-1)/2} \; mod \; p$의 결과로 a의 2차 잉여 여부를 판단함
      - $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \; mod \; p$라면, a는 2차 잉여
        - e.g., $3^{(11-1)/2} \; mod \; 11 \equiv 3^5 \; mod \; 11 \equiv 243 \; mod \; 11 \equiv 1 \; mod \; 11$
          $\therefore$ 3은 mod 11에서 2차 잉여
      - $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \; mod \; p$라면, a는 2차 비잉여
        - e.g., $2^{(11-1)/2} \; mod \; 11 \equiv 2^5 \; mod \; 11 \equiv 32 \; mod \; 11 \equiv 10 \; mod \; 11 \equiv -1 \; mod \; 11$
          $\therefore$ 2은 mod 11에서 2차 비잉여

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (3/6)
  - 방정식 풀이
    - 오일러 판정법을 이용하여 해가 존재하는지 확인함
      - e.g., $x^2 \equiv 3 \, mod \, 11, 3^5 \equiv 1 \, mod \, 11 \rightarrow 3$은 $mod \, 11$에서 2차 잉여
    - $x \equiv \pm a^{(p+1)/4} \, mod \, p$를 이용하여 해를 구함
      - e.g., $x \equiv \pm 3^{11+1/4} \, mod \, 11 \equiv \pm 3^3 \, mod \, 11 \equiv \pm 27 \, mod \, 11 \equiv \pm 5 \, mod \, 11$
    - $p \equiv 3 \, mod \, 4 (p = 4k + 3)$ 형태가 아닌 경우 올바른 해가 나오지 않으므로 Tonelli-Shanks 알고리즘을 사용하여 해를 구함
      - e.g., $x^2 \equiv 10 \, mod \, 13$은 $x \equiv \pm 10^{7/2} \, mod \, 13$으로 올바른 해가 나오지 않으므로 Tonelli-Shanks 알고리즘을 사용하여 해를 구해야 함

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (4/6)
  - 방정식 풀이
    - Tonelli-Shanks 알고리즘 (1/3)
      - 정의
        - 3 이상의 소수 p에 대해 2차 합동 방정식 $x^2 \equiv a \; mod \; p$의 해 x를 구하는 알고리즘
      - 특징
        - $p = 4k + 1$과 $p = 4k + 3$ 형태 모두 사용 가능함
        - a는 p에 대해 2차 잉여이어야 함
        - $O(\log^2(p))$의 복잡도를 가짐

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (5/6)
  - 방정식 풀이
    - Tonelli-Shanks 알고리즘 (2/3)
      - 과정
        1. 양의 정수 중 소수 p에 대해 $p-1=Q\times 2^S$를 만족하는 Q와 S를 구함(Q는 홀수)
        2. 모듈로 p에 대해 2차 비잉여인 임의의 z를 구함
        3. 변수를 $M=S, c=z^Q, t=a^Q, R=a^{Q+1/2}$로 초기화함
        4. 변수 t가 1이 될 때까지 $b=c^{2^{M-i-1}}, M=i, c=b^2, t=tb^2, R=Rb$를 반복

```python
def E_Criterion(a, p): ## 오일러 판정법
    return pow(a, (p - 1) // 2, p)

def Tonelli_Shanks(a, p):
    if E_Criterion(a, p) != 1:
        return -1
    if a == 0:
        return 0
    if p == 2:
        return a

    # 1단계 : p - 1 = Q * 2^S 꼴로 분해
    Q = p - 1
    S = 0
    while Q % 2 == 0:
        Q //= 2
        S += 1

    # 2단계 : 2차 비잉여 z 찾기
    for z in range(2, p):
        if E_Criterion(z, p) == p - 1:
            break

    # 3단계 : 초기값 설정
    M = S
    c = pow(z, Q, p)
    t = pow(a, Q, p)
    R = pow(a, (Q + 1) // 2, p)

    # 4단계 : 반복
    while t != 1:
        i = 1
        t2i = pow(t, 2, p)
        while t2i != 1: # t^(2^i) == 1인 i의 최소값 계산
            t2i = pow(t2i, 2, p)
            i += 1
        b = pow(c, 2 ** (M - i - 1), p)
        M = i
        c = pow(b, 2, p)
        t = (t * pow(b, 2, p)) % p
        R = (R * b) % p

    return R

a = int(input('a : '))
p = int(input('p : '))
x = Tonelli_Shanks(a, p)

if(x == -1):
    print('a is not QR')
elif(pow(x,1,p) == pow(x*-1,1,p)):
    print(f'x = {x}')
else:
    print(f"x ≡ {x} mod {p}")
    print(f"x ≡ {-x % p} mod {p}")
```

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (6/6)
  - 방정식 풀이
    - Tonelli-Shanks 알고리즘 (3/3)
      - 예제 9.8

Tonelli-Shanks 알고리즘을 이용하여 다음 2차 합동방정식들의 해를 구하라

1. $x^2 \equiv 2 \, mod \, 11$
2. $x^2 \equiv 3 \, mod \, 23$
3. $x^2 \equiv 10 \, mod \, 13$

- 결과
  1. $x^2 \equiv 2 \, mod \, 11 \rightarrow$ 해가 존재하지 않음

```
a : 2
p : 11
a is not QR
```

  2. $x^2 \equiv 3 \, mod \, 23 \rightarrow x \equiv \pm 16 \, mod \, 23$

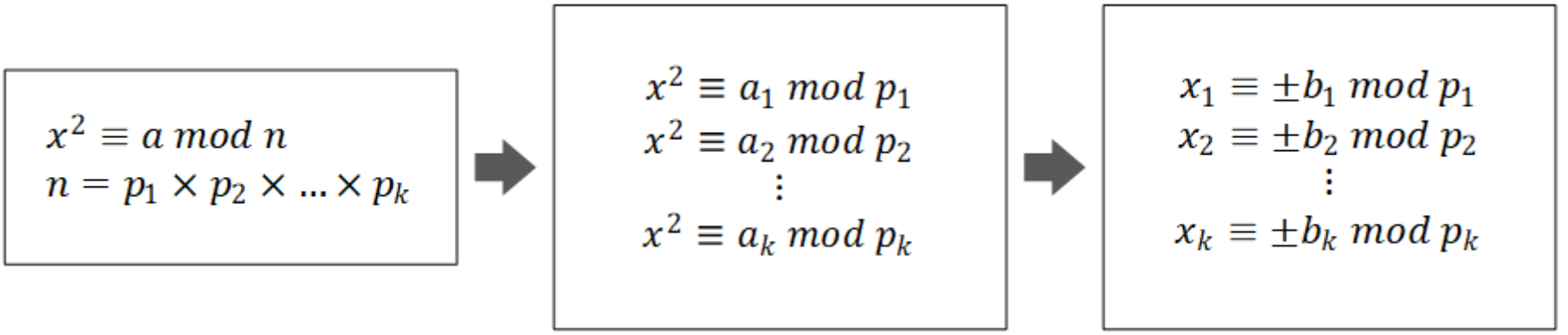
```
a : 3
p : 23
x ≡ 16 mod 23
x ≡ 7 mod 23
```

  3. $x^2 \equiv 10 \, mod \, 13 \rightarrow x \equiv \pm 7 \, mod \, 13$

```
a : 10
p : 13
x ≡ 7 mod 13
x ≡ 6 mod 13
```

2차 합동

- 모듈로가 합성수인 2차 합동
  - 방정식 풀이 (1/2)
    - $x^2 \equiv a \, mod \, n$에서 n을 소인수분해하여 나온 p_k를 이용하여 여러 개의 $x^2 \equiv a_k \, mod \, p_k$로 분해한 후 연립 합동 방정식으로 만들어 해를 구함
      - e.g., $x^2 \equiv 36 \, mod \, 77$에서 $n = 77 = 7 \times 11$이므로 $x^2 \equiv 36 \, mod \, 7 \equiv 1 \, mod \, 7, x^2 \equiv 36 \, mod \, 11 \equiv 3 \, mod \, 11$로 나누어 $mod \, 7$과 $mod \, 11$에서의 해를 구한 후 중국인의 나머지 정리를 이용하여 $mod \, 77$에서의 해를 구함



2차 합동

- 모듈로가 합성수인 2차 합동
  - 방정식 풀이 (2/2)
    - 예제 9.7

$77 = 7 \times 11$임을 이용하여 $x^2 \equiv 36 \, mod \, 77$의 해를 구하라

- $x^2 \equiv 36 \, mod \, 77$을 $x^2 \equiv 36 \, mod \, 7 \equiv 1 \, mod \, 7$과 $x^2 \equiv 36 \, mod \, 11 \equiv 3 \, mod \, 11$로 나눔
- $1^3 \equiv 1 \, mod \, 7$이고 $3^5 \equiv 1 \, mod \, 11$이므로 해가 존재함
- $x \equiv \pm 1 \, mod \, 7$와 $x \equiv \pm 5 \, mod \, 11$를 이용하여 연립 합동 방정식을 만듦

$$1. \begin{cases} x \equiv 1 \, mod \, 7 \\ x \equiv 5 \, mod \, 11 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x \equiv 1 \, mod \, 7 \\ x \equiv 6 \, mod \, 11 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x \equiv 6 \, mod \, 7 \\ x \equiv 5 \, mod \, 11 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x \equiv 6 \, mod \, 7 \\ x \equiv 6 \, mod \, 11 \end{cases}$$

- 각 연립 합동 방정식을 중국인의 나머지 정리를 이용하여 해를 구함

$1. \, x \equiv 71 \, mod \, 77 \quad 2. \, x \equiv 50 \, mod \, 77 \quad 3. \, x \equiv 27 \, mod \, 77 \quad 4. \, x \equiv 6 \bmod 77$

$\therefore x^2 \equiv 36 \, mod \, 77$의 해 $x = \pm 6 \, mod \, 77, \pm 27 \, mod \, 77$

Thanks!

이 성 현(dltjdgus2166@naver.com)

부록#1

- 2차 체(Quadratic Sieve) 실제 동작(1/2)
  - 파이썬 코드 전문

```python
import math

# 소수 판별 함수
def is_prime(p):
    if p < 2:
        return False
    for i in range(2, math.isqrt(p) + 1):
        if p % i == 0:
            return False
    return True

# 팩터 베이스
def prime_range(a, b, n):
    res = []
    res.append(2)
    for i in range(a,b):
        if (is_prime(i)) and ((n**((i-1)/2))%i==1):
            res.append(i)
    return res

# 최대공약수
def gcd(a, b):
    while b != 0:
        a, b = b, a % b
    return a

# B-smooth 확인
def is_B_smooth(n, factor_base):
    exponents = []

    neg = 0
    if n < 0:
        n = -n
        neg = 1  # -1에 대한 지수 저장
    exponents.append(neg)

    for p in factor_base:
        count = 0
        while n % p == 0:
            n //= p
            count += 1
        exponents.append(count)
    return (n == 1), exponents if n == 1 else None

# 선형 종속 관계 찾기
def Linear_Dependent(EV):
    n = len(EV)
    m = len(EV[0])
    mat = [row[:] for row in EV]
    deps = [[int(i == j) for j in range(n)] for i in range(n)]
    used = [False] * n
    result = []

    for col in range(m):
        pivot = -1
        for row in range(n):
            if mat[row][col] == 1 and not used[row]:
                pivot = row
                break
        if pivot == -1:
            continue
        used[pivot] = True
        for row in range(n):
            if row != pivot and mat[row][col] == 1:
                for k in range(m):
                    mat[row][k] ^= mat[pivot][k]
                for k in range(n):
                    deps[row][k] ^= deps[pivot][k]

    for i in range(n):
        if all(x == 0 for x in mat[i]):
            result.append(deps[i])  # 선형 종속된 해 저장

    return result
```

```python
# Quadratic Sieve
def quadratic_sieve(n, B, max_relations, max_attempts):
    sqrt_n = math.isqrt(n)

    factor_base = prime_range(2, B, n)

    print('Factor Base :',factor_base)

    smooth_relations = []  # 지수 벡터
    x_list = []            # x 값 저장
    attempts = 0
    x = sqrt_n + 1

    while len(smooth_relations) < max_relations and attempts < max_attempts:
        qx = x * x - n  # Q(x) 계산
        Bsmooth, expo = is_B_smooth(qx, factor_base)  # B-smooth 확인
        if Bsmooth:
            smooth_relations.append(expo)
            x_list.append(x)
        x += 1
        attempts += 1

    # 루프 방지
    if len(smooth_relations) < max_relations:
        print("B-smooth Failure")
        return None

    print('Exponent Vector :')
    for i in range(len(smooth_relations)):
        print(smooth_relations[i])
    print('x_i :')
    for i in range(len(x_list)):
        print(x_list[i])

    # 지수 벡터 mod 2 연산
    Ex_Vect_Mod2 = [[e % 2 for e in row] for row in smooth_relations]

    print('Exponent Vector Mod 2 :')
    for i in range(len(Ex_Vect_Mod2)):
        print(Ex_Vect_Mod2[i])

    # ④ 선형 종속 벡터들로부터 x^2 ≡ y^2 (mod n) 만들기
    LD = Linear_Dependent(Ex_Vect_Mod2)

    print('Selected x_i :')

    for dep in LD:
        X = 1
        Y = 1
        Selected_x = []
        for i in range(len(dep)):
            if dep[i]:
                X *= x_list[i]  # x_i들을 곱함
                Selected_x.append(x_list[i])
        print(Selected_x)
        exps = [0] * len(smooth_relations[0])
        for i in range(len(dep)):
            if dep[i]:
                for j in range(len(exps)):
                    exps[j] += smooth_relations[i][j]
        for j in range(len(exps)):
            base = -1 if j == 0 else factor_base[j - 1]
            Y *= pow(base, exps[j] // 2)  # 지수의 절반으로 Y 구성

        X %= n
        Y %= n

        print('x :',X)
        print('y :',Y)
```

```python
        dm = gcd(X - Y, n)

        print('gcd(x-y,n) :',dm)

        dp = gcd(X + Y, n)

        print('gcd(x+y,n) :',dp)

        if 1 < dm < n:
            return dm, n // dm

        if 1 < dp < n:
            return dp, n // dp

    return None

n = 1219
result = quadratic_sieve(n, 30, 20, 500000)
print(f"n = {n}의 인수: {result}")
```

부록#1

- 2차 체(Quadratic Sieve) 실제 동작(2/2)
  - 실행 결과

```
Factor Base : [2, 3, 5, 7, 11]
Exponent Vector :
[0, 1, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 1]
[0, 1, 1, 2, 0, 0]
[0, 0, 2, 2, 0, 0]
[0, 1, 1, 0, 1, 1]
[0, 1, 2, 1, 1, 0]
[0, 1, 2, 1, 0, 1]
[0, 0, 3, 1, 0, 1]
[0, 0, 1, 3, 1, 0]
[0, 1, 0, 3, 0, 1]
[0, 1, 4, 1, 1, 0]
[0, 1, 1, 2, 1, 1]
[0, 0, 1, 1, 1, 2]
[0, 1, 1, 0, 4, 0]
[0, 1, 3, 4, 0, 0]
[0, 0, 3, 1, 3, 0]
[0, 1, 2, 1, 2, 1]
[0, 1, 1, 0, 1, 3]
[0, 1, 5, 0, 0, 2]
[0, 0, 3, 1, 2, 1]
x_i :
35
36
37
38
41
43
47
52
62
63
83
113
118
125
187
218
223
239
245
272
```

```
Exponent Vector Mod 2 :
[0, 1, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 1, 1]
[0, 1, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 1, 1, 0, 1, 1]
[0, 1, 0, 1, 1, 0]
[0, 1, 0, 1, 0, 1]
[0, 0, 1, 1, 0, 1]
[0, 0, 1, 1, 1, 0]
[0, 1, 0, 1, 0, 1]
[0, 1, 0, 1, 1, 0]
[0, 1, 1, 0, 1, 1]
[0, 0, 1, 1, 1, 0]
[0, 1, 1, 0, 0, 0]
[0, 1, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 1, 1, 0]
[0, 1, 0, 1, 0, 1]
[0, 1, 1, 0, 1, 1]
[0, 1, 1, 0, 0, 0]
[0, 0, 1, 1, 0, 1]
Selected x_i :
[35, 37]
x : 76
y : 30
gcd(x-y,n) : 23
gcd(x+y,n) : 53
n = 1219의 인수: (23, 53)
```

$n = 1219, B = 30$

Factor Base $= \{2,3,5,7,11\}$

$x_i = \{35,36,37,38,41,43,47,52,62,63,83,113,118,125,$
$187,218,223,239,245,272\}$

선형 종속 관계인 $x_i = \{35,37\}$

$\because Q(35) + Q(37) = (2^1 \times 3^1) + (2^1 \times 3^1 \times 5^2)$
$= (0,1,1,0,0,0) + (0,1,1,2,0,0)$
$= (0,1,1,0,0,0) + (0,1,1,0,0,0)$
$= (0,2,2,0,0,0) = (0,0,0,0,0,0)$

$x = \prod x_i \ mod\ 1219 = 35 \times 37\ mod\ 1219 = 76$

$y = \sqrt{\prod Q(x_i)}\ mod\ 1219 = \sqrt{6 \times 150}\ mod\ 1219 = 30$

$1 < \gcd(76 - 30, 1219) < 1219 \rightarrow 23$은 소인수

$1 < \gcd(76 + 30, 1219) < 1219 \rightarrow 53$은 소인수