

이공학도를 위한 확률 및 통계학

-7장 확률변수의 함수-

송 민 희(minhee@pel.sejong.ac.kr)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

목 차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

확률변수의 변수변환

- 변수변환(Transformation) (1/2)

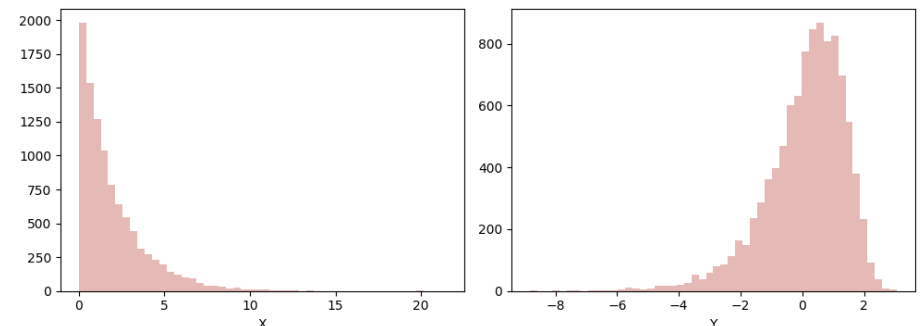
- 개요

- 확률변수 X 에 대해 함수 $g(X)$ 를 적용하여 새로운 확률변수 Y 를 정의하는 것
- X 의 확률분포가 주어졌을 때, $Y = g(X)$ 의 확률분포를 구하기 위해 사용

- 필요성 (1/2)

- 분포 형태의 단순화

- e.g., 일반적으로 오른쪽으로 치우친 초당 트래픽 분포에 $Y = \log X$ 를 적용하여 대칭적으로 변환



<그림 1> 변환 전 초당 트래픽 분포 <그림 2> 변환 후 초당 트래픽 분포

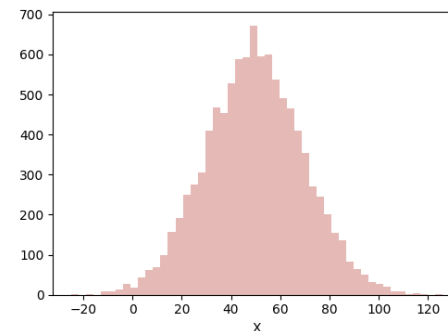
확률변수의 변수변환

- 변수변환 (2/2)

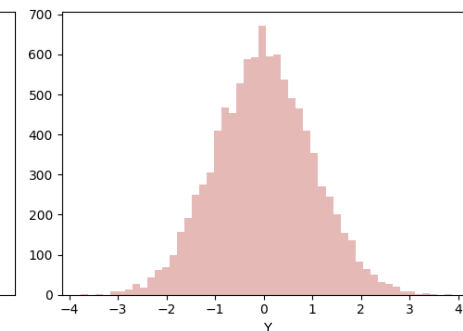
- 필요성 (2/2)

- 분석 안정성 확보

- e.g., 분산이 매우 큰 세션 길이 분포에 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 를 적용하여 평균 0, 분산 1로 정규화



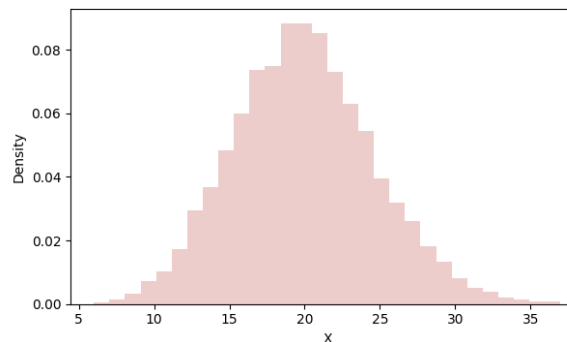
<그림 3> 변환 전 세션길이 분포



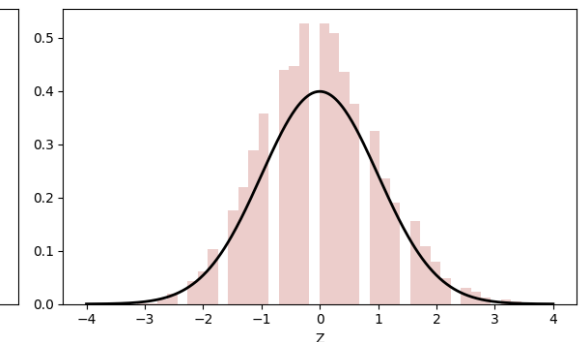
<그림 4> 변환 후 세션길이 분포

- 이론적 모델과의 비교 용이

- e.g., 웹 서버의 접속 요청 횟수 X를 $Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 로 변환하여 포아송 모형과 비교함으로써 트래픽 이상 여부를 판단



<그림 5> 변환 전 접속 요청 횟수



<그림 6> 변환 후 접속요청횟수

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환 (1/5)
 - 정리 7.1 - X 와 Y 가 1대1 대응인 경우

X 는 확률분포가 $f(x)$ 인 이산형 확률변수이고, X 와 Y 사이에는 $Y = u(X)$ 라는 1대1 대응관계가 성립하여 관계식 $y = u(x)$ 를 x 에 대하여 풀면 유일하게 $x = w(y)$ 로 될 때, Y 의 확률분포는

$$g(y) = f[w(y)]$$

가 된다.

확률변수의 변수변환

• 이산형 확률변수의 변수변환 (2/5)

• 예제 7.1

X 의 확률분포가 $f(x) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$, $x = 1, 2, 3, \dots$ 인 기하분포를 따를 때
 $Y = X^2$ 의 확률분포를 구하라.

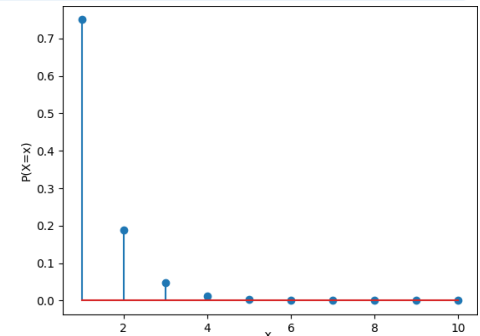
- $X > 0$ 이므로 x 와 y 는 1대1 대응관계

$$Y = X^2$$

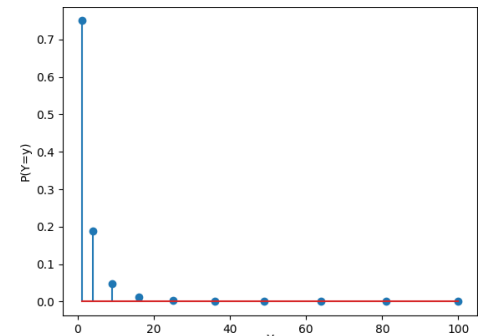
$$x = \sqrt{y} \quad \because (x > 0)$$

- $Y = X^2$ 의 확률분포 $g(y)$ 계산

$$g(y) \begin{cases} f(\sqrt{y}) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{y}-1}, & y = 1, 4, 9, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



<그림 7> X 의 확률분포



<그림 8> $Y = X^2$ 의 확률분포

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환 (3/5)
 - 정리 7.2 - (X_1, X_2) 와 (Y_1, Y_2) 가 1대1 대응인 경우

X_1 과 X_2 는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$ 인 이산형 확률변수이고, (x_1, x_2) 와 (y_1, y_2) 는 서로 1대1로 대응하여 식 $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ 와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ 를 x_1 과 x_2 에 대하여 풀면 유일하게 $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ 와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$ 로 될 때, $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ 와 $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ 라고 정의되는 새로운 확률변수 Y_1 과 Y_2 의 결합확률분포는

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]$$

가 된다.

- 주변화(Marginalization)
 - $h(y_1) = \sum_{y_2} g(y_1, y_2)$

확률변수의 변수변환

• 이산형 확률변수의 변수변환 (4/5)

• 예제 7.2 (1/2)

X_1 과 X_2 는 각각 μ_1, μ_2 의 모수를 가지는 포아송 분포를 따르는 확률변수로서 서로 독립일 때, 새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$ 의 확률분포를 구하라.

- X_1 과 X_2 는 서로 독립

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2) = \frac{e^{-\mu_1}\mu_1^{x_1}}{x_1!} \frac{e^{-\mu_2}\mu_2^{x_2}}{x_2!} = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}\mu_1^{x_1}\mu_2^{x_2}}{x_1!x_2!}$$

단, $x_1 = 0, 1, 2, \dots$, $x_2 = 0, 1, 2, \dots$

- 두 번째의 확률변수 $Y_2 = X_2$

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_2$$

- Y_1 과 Y_2 의 결합확률분포

$$g(y_1, y_2) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}}{(y_1 - y_2)! y_2!}$$

단, $y_1 = 0, 1, 2, \dots$, $y_2 = 0, 1, 2, \dots, y_1$

- $x_1 \geq 0$ 이므로 $x_1 = y_1 - x_2$ 에서 $y_2 (= x_2) \leq y_1$

확률변수의 변수변환

• 이산형 확률변수의 변수변환 (5/5)

• 예제 7.2 (2/2)

X_1 과 X_2 는 각각 μ_1, μ_2 의 모수를 가지는 포아송 분포를 따르는 확률변수로서 서로 독립일 때, 새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$ 의 확률분포를 구하라.

- Y_1 에 대한 주변확률분포

$$\begin{aligned} h(y_1) &= \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{\mu_1^{y_1-y_2} \mu_2^{y_2}}{(y_1 - y_2)! y_2!} \\ &= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{y_2! (y_1 - y_2)!} \mu_1^{y_1-y_2} \mu_2^{y_2} = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} \mu_1^{y_1-y_2} \mu_2^{y_2} \end{aligned}$$

- 합의 값은 $(\mu_1 + \mu_2)^{y_1}$ 의 이항전개와 동일

$$\therefore h(y_1) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)} (\mu_1 + \mu_2)^{y_1}}{y_1!}, \quad y_1 = 0, 1, 2, \dots$$

- $\therefore$ 모수가 μ_1 과 μ_2 인 포아송 분포를 따르는 서로 독립인 두 확률변수의 합은 $(\mu_1 + \mu_2)$ 의 모수를 가지는 포아송 분포를 따름

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (1/10)
 - 정리 7.3 - X 와 $Y = u(X)$ 가 1대1 대응인 경우 (1/3)

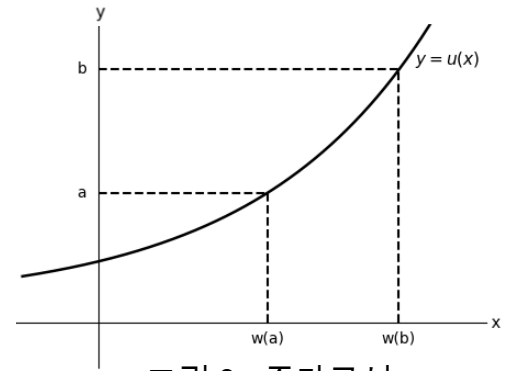
X 는 확률분포가 $f(x)$ 인 연속형 확률변수이고, X 와 Y 사이에는 $Y = u(X)$ 라는 1대1 대응관계가 성립하여 관계식 $y = u(x)$ 를 x 에 대하여 풀면 유일하게 $x = w(y)$ 로 될 때, Y 의 확률분포는

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

가 된다. 여기서 $J = w'(y)$ 이며, 이를 야코비안(Jacobian)이라고 부른다.

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (2/10)
 - 정리 7.3 - X 와 Y 가 1대1 대응인 경우 (2/3)
 - 증명 (1/2)



<그림 9> 증가곡선

먼저, $Y = u(x)$ 가 증가함수라면, Y 가 a 와 b 사이에 오게 되면 확률변수 X 는 $w(a)$ 와 $w(b)$ 사이에 와야 하므로, Y 가 a 와 b 사이에 속할 확률은

$$P(a < Y < b) = P[w(a) < X < w(b)] = \int_{w(a)}^{w(b)} f(x) dx$$

적분변수 x 를 y 로 변환시키려면 $x = w(y)$ 의 관계로부터 $dx = w'(y)dy$ 를 얻게 되고, 이를 적분식에 대입하면

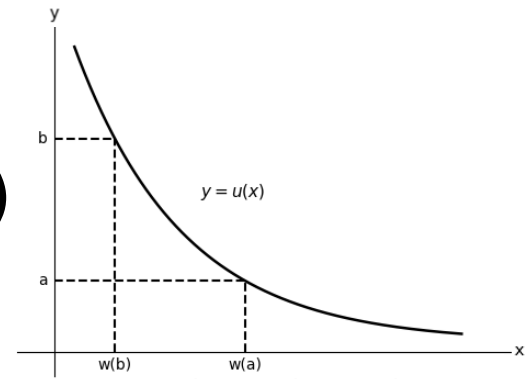
$$P(a < Y < b) = \int_a^b f[w(y)]w'(y) dy$$

이 적분값은 y 의 범위 안에서 $a < b$ 인 각각의 경우의 구하고자 하는 확률 값 따라서, Y 의 확률 분포 $g(y)$ 는

$$g(y) = f[w(y)]w'(y) = f[w(y)]J$$

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (3/10)
 - 정리 7.3 - X 와 Y 가 1대1 대응인 경우 (3/3)
 - 증명 (2/2)



<그림 10> 감소곡선

이어서, $Y = u(x)$ 가 감소함수라면, Y 가 a 와 b 사이에 오게 되면 확률변수 X 는 $w(b)$ 와 $w(a)$ 사이에 와야 하므로, Y 가 a 와 b 사이에 속할 확률은

$$P(a < Y < b) = P[w(b) < X < w(a)] = \int_{w(b)}^{w(a)} f(x) dx$$

적분변수 x 를 y 로 변환시키면

$$P(a < Y < b) = \int_b^a f[w(y)]w'(y) dy = - \int_a^b f[w(y)]w'(y) dy$$
$$g(y) = -f[w(y)]w'(y) = -f[w(y)]J$$

$u(x)$ 가 감소함수 이므로 기울기는 음이고 $J = -|J|$ 이므로 증가함수의 경우와 동일하게

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (4/10)

- 예제 7.3

X 가 연속형 확률변수이고 확률분포 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, 확률변수 $Y = 2X - 3$ 의 확률분포를 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12}, & 1 < x < 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 확률변수 정리

$$y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y + 3}{2}$$

- 정리

$$J = w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$$

- 확률변수 $Y = 2X - 3$ 의 확률분포 $g(y)$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{(y + 3)/2}{12} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{y + 3}{48}, & -1 < y < 7 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (5/10)
 - 정리 7.4 - (X_1, X_2) 와 (Y_1, Y_2) 가 1대1 대응인 경우

X_1 과 X_2 는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$ 인 연속형 확률변수이고, (x_1, x_2) 와 (y_1, y_2) 는 서로 1대1로 대응하여 식 $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ 와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ 를 x_1 과 x_2 에 대하여 풀면 유일하게 $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ 와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$ 로 될 때, Y_1 과 Y_2 의 결합확률 분포는

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]|J|$$

가 된다. 여기서 J 는 2×2 행렬식으로서

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

이다.

확률변수의 변수변환

• 연속형 확률변수의 변수변환 (6/10)

• 예제 7.4 (1/2)

X_1 과 X_2 는 연속형 확률변수이고 결합확률분포 $f(x)$ 가 다음과 같을 때,
 $Y_1 = X_1^2$ 과 $Y_2 = X_1X_2$ 의 결합확률분포를 구하라.

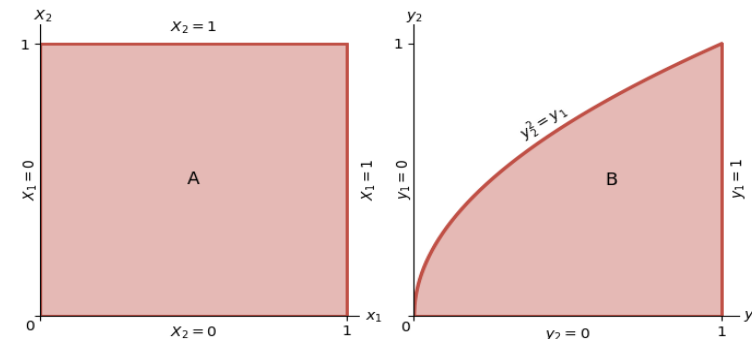
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

• 확률변수 정리

$$y_1 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{y_1}, \quad y_2 = x_1x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1}}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ -\frac{y_2}{2y_1^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{y_1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1}$$

- 집합 $A = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$
- 집합 $B = \{(y_1, y_2) \mid y_2^2 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1\}$
- A 와 B 는 1대1로 대응



<그림 11> 집합 A와 집합 B의 대응관계

확률변수의 변수변환

• 연속형 확률변수의 변수변환 (7/10)

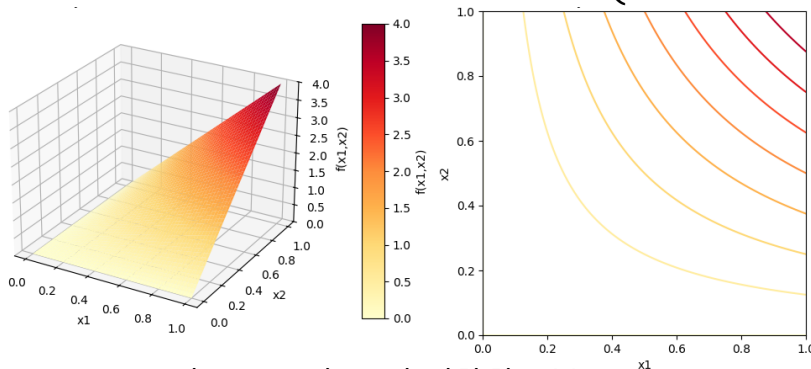
• 예제 7.4 (2/2)

X_1 과 X_2 는 연속형 확률변수이고 결합확률분포 $f(x)$ 가 다음과 같을 때,
 $Y_1 = X_1^2$ 과 $Y_2 = X_1X_2$ 의 결합확률분포를 구하라.

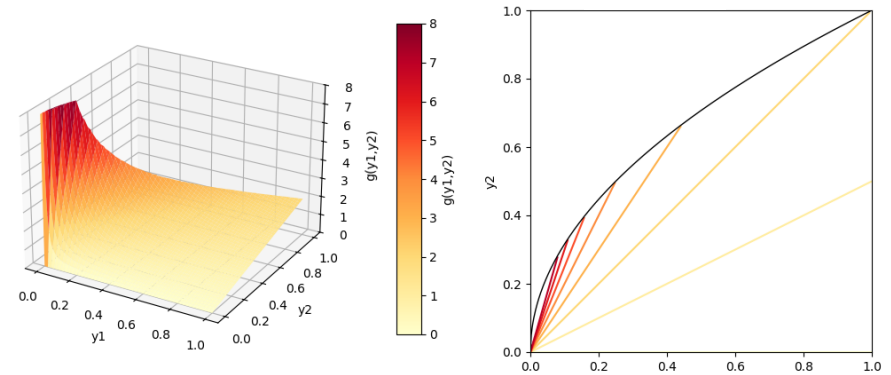
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

• Y_1 과 Y_2 의 결합 확률분포 $g(y_1, y_2)$

$$g(y_1, y_2) = 4(\sqrt{y_1}) \frac{y_2}{\sqrt{y_1}} \frac{1}{2y_1} = \begin{cases} \frac{2y_2}{y_1}, & y_2^2 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



<그림 12> X_1 과 X_2 의 결합확률분포



<그림 13> Y_1 과 Y_2 의 결합확률분포

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (8/10)
 - 정리 7.5 - X 와 $Y = u(X)$ 가 1대1 대응이 아닌 경우

X 는 확률분포 $f(x)$ 를 가지는 연속형 확률변수이고, $Y = u(X)$ 로 변수변환을 하려고 할 때 X 와 Y 가 1대1 대응관계를 만족하지 못한다고 하자. 이 경우 만일 $y = u(x)$ 와 k 개의 역함수 $x_1 = w_1(y), x_2 = w_2(y), \dots, x_k = w_k(y)$ 가 각각 1대1 대응관계를 가지도록 X 의 영역을 k 개의 서로 배반인 영역으로 분할시킬 수 있다면,

Y 의 확률분포는

$$g(y) = \sum_{i=1}^k f[w_i(y)]|J_i|$$

가 된다. 단, $J_i = w'_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, k$ 이다.

확률변수의 변수변환

• 연속형 확률변수의 변수변환 (9/10)

• 예제 7.5 (1/2)

X 가 평균이 μ , 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때, $Y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$ 은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름을 증명하라.

- 새로운 확률변수 $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ 는 표준정규분포를 따름

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty$$

- Y 를 Z 에 대해 정리

- $Y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} \Rightarrow y = z^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{y}$

- $z_1 = -\sqrt{y}, \quad z_2 = \sqrt{y} \Rightarrow J_1 = -\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad J_2 = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

- Y 의 분포에 대한 함수 $g(y)$ 유도

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \left| \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, \quad y > 0$$

확률변수의 변수변환

• 연속형 확률변수의 변수변환 (10/10)

• 예제 7.5 (2/2)

X 가 평균이 μ , 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때, $Y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$ 은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름을 증명하라.

- $g(y)$ 는 확률밀도함수임에 대한 검증

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

- $t = \frac{y}{2} \rightarrow y = 2t, dy = 2 dt$ 대입

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2t)^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} \cdot 2 dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 대입 (이에 대한 증명은 부록#1 참고)

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

$$\therefore Y \text{의 확률분포 } g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{는 자유도 1인 카이제곱분포를 따름}$$

목 차

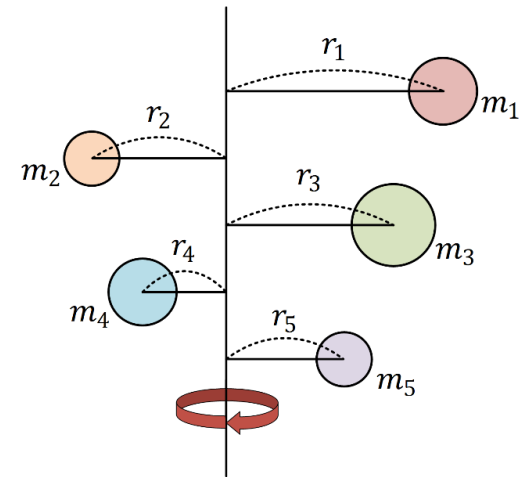
- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

적률과 적률 생성함수

- 적률(Moment) (1/2)

- 물리학에서의 정의

- 물체의 질량이나 힘이 특정 기준점 주위에 분포하는 방식을 나타내는 물리량
- e.g., 관성모멘트 $I = \sum m_i \cdot r_i^2$



<그림 13> 회전축 주변 질량 분포

- 수학에서의 정의

- 함수나 데이터의 분포 형태를 정량적으로 나타내는 척도
- e.g., <그림 7>에서 회전축 주변에 질량이 분포한다고 가정
 - 질량 m_i 는 확률의 가중치, 거리 r_i 는 확률변수 값에 해당
 - <그림 7>은 이산확률분포에 대응하는 수학적 구조
$$E[X^2] = \sum p_i x_i^2 \quad (p_i = \frac{m_i}{\sum m_i})$$

적률과 적률 생성함수

- 적률 (2/2)

- 정의 7.1

확률변수 X 의 원점에 대한 r 차 적률 μ'_r 은

$$\mu'_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x), & X \text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx, & X \text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

이다.

- 1차 적률 = 평균(위치) = $\mu'_1 = \mu = E(X)$
- 2차 중심적률 = 분산(퍼짐) = $\mu'_2 = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$
- 3차 표준화적률 = 왜도(비대칭) = $\mu'_3 = E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right] = \gamma_1$
- 4차 표준화적률 = 첨도(뾰족함) = $\mu'_4 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \text{Kurt}(X)$

적률과 적률 생성함수

- 적률 생성함수(MGF, Moment Generating Function) (1/7)

- 정의 7.2

확률변수 X 의 적률생성함수 $E(e^{tX})$ 를 $M_X(t)$ 로 표기하면,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x), & X \text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & X \text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

이다.

- 특징

- 생성한 적률생성함수가 적분 가능한 함수인 경우에만 사용
- $t = 0$ 을 포함하는 어떤 구간에서 $E(e^{tx})$ 가 유한한 값으로 수렴해야 존재함

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수 (2/7)

- 정리 7.6

확률변수 X 의 적률생성함수를 $M_X(t)$ 라 하면,

$$\left. \frac{d^r M_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = \mu'_r$$

이 된다.

- 증명 (부록#2)

$M_X(t)$ 를 이산형인 경우와 연속형인 경우 각각 t 에 대해 r 번 미분하면

$$\frac{d^r M_X(t)}{dt^r} = \begin{cases} \sum_x x^r e^{tx} f(x), & X \text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x) dx, & X \text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

가 된다.

여기서 $t = 0$ 을 대입하면 두 경우 모두 $E(X^r) = \mu'_r$ 이 된다.

적률과 적률 생성함수

• 적률 생성함수 (3/7)

• 예제 7.6

확률변수 X 가 이항분포를 따를 때 X 의 적률생성함수를 구하고, 이를 이용하여 $\mu = np, \sigma^2 = npq$ 가 됨을 증명하라.

- 정의 7.2를 통해 $M_X(t) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x}$
- 이항 정리를 통해 $M_X(t) = (pe^t + q)^n$ 로 정리 후 평균과 분산 계산

- 평균(μ'_1)

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = n(pe^t + q)^{n-1}pe^t$$

- 분산(μ'_2)

$$\frac{d^2M_X(t)}{dt^2} = np[e^t(n-1)(pe^t + q)^{n-2}pe^t + (pe^t + q)^{n-1}e^t]$$

- $t = 0$ 대입

$$\mu'_1 = n(p + q)^{n-1}p = np$$

$$\mu'_2 = np[(n-1)(p + q)^{n-2}p + (p + q)^{n-1}] = np[(n-1)p + 1]$$

- 최종계산 (5장 이항분포의 평균과 분산에 대한 증명은 부록#3 참고)

$$\mu = \mu'_1 = np, \quad \sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = np(1 - p) = npq$$

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수 (4/7)

- 예제 7.7 (1/2)

확률변수 X 가 평균이 μ , 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때,
 X 의 적률생성함수는 $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$ 이 됨을 유도하라.

- 정의 7.2를 통해

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right] dx \end{aligned}$$

- 지수항 정리

$$x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2 = [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \exp\left(\frac{2\mu t + \sigma^2 t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - (\mu + t\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\} dx \end{aligned}$$

적률과 적률 생성함수

- 적률 생성함수 (5/7)

- 예제 7.7 (2/2)

확률변수 X 가 평균이 μ , 분산이 σ^2 인 정규분포를 따를 때, X 의 적률생성함수는 $M_X(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$ 이 됨을 유도하라.

- $w = \frac{[x - (\mu + t\sigma^2)]}{\sigma}$ 로 치환 $\Rightarrow dx = \sigma dw$

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

- 표준정규분포의 면적 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 1$ 대입

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

적률과 적률 생성함수

- 적률 생성함수 (6/7)
- 정리 7.7 (유일성 정리)

두 확률변수 X 와 Y 의 적률생성함수가 각각 $M_X(t)$, $M_Y(t)$ 일 때, 모든 t 값에 대해 $M_X(t) = M_Y(t)$ 이면 X 와 Y 는 같은 확률분포를 가진다.

- 정리 7.8

$$M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$$

- 증명

$$M_{X+a}(t) = E[e^{t(X+a)}] = e^{at} E(e^{tX}) = e^{at} M_X(t)$$

- 정리 7.9

$$M_{aX}(t) = M_X(at)$$

- 증명

$$M_{aX}(t) = E[e^{t(aX)}] = E[e^{(at)X}] = M_X(at)$$

적률과 적률 생성함수

• 적률 생성함수 (7/7)

• 정리 7.10

확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 서로 독립이면서 각각의 적률 생성함수가 $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots, M_{X_n}(t)$ 이고 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 이면, Y 의 적률 생성함수는 $M_{Y(t)} = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$ 가 된다.

• 증명

연속형인 경우에 대해서

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E[e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned}$$

확률변수들은 서로 독립이므로 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$ 따라서

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_1} f_1(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_2} f_2(x_2) dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_n} f_n(x_n) dx_n \\ &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t) \end{aligned}$$

적률과 적률 생성함수

- 확률변수의 선형결합 (1/4)

- 정리 7.11

확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 서로 독립이면서 각각 평균이 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 이고 분산이 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ 인 정규분포를 따르면, $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ 은 평균이 $\mu_Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_n\mu_n$ 이고 분산이 $\sigma_Y^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2$ 인 정규분포를 따른다.

- 증명

확률변수 a_iX_i 의 적률생성함수는 정리 7.9에 따라

$$M_{a_iX_i}(t) = M_{X_i}(a_it) = \exp\left(\mu_i(a_it) + \frac{1}{2}\sigma_i^2(a_it)^2\right) = \exp\left(a_i\mu_it + \frac{1}{2}a_i^2\sigma_i^2t^2\right)$$

각각 독립이므로 $M_Y(t) = M_{a_1X_1+\dots+a_nX_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{a_iX_i}(t)$

이를 대입하여 정리하면

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^n \exp\left(a_i\mu_it + \frac{1}{2}a_i^2\sigma_i^2t^2\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_it + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2t^2\right)$$

정규분포 $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ 의 적률생성함수는 $\exp\left(\mu_Y t + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 t^2\right)$ 이므로

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i, \quad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2$$

적률과 적률 생성함수

- 확률변수의 선형결합 (2/4)

- 정리 7.12 (1/3)

확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 서로 독립이면서 각각 자유도가 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 인 카이제곱분포를 따른다면, $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 은 자유도가 $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ 인 카이제곱분포를 따른다.

- 증명

정리 7.10에 의해

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

자유도가 v 인 카이제곱분포의 적률생성함수(부록#4)는

$$M_{X_i}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{v_i}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

따라서

$$M_Y(t) = (1 - 2t)^{-\frac{v_1}{2}} (1 - 2t)^{-\frac{v_2}{2}} \dots (1 - 2t)^{-\frac{v_n}{2}} = (1 - 2t)^{-\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{2}}$$

이며, 이는 자유도 $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ 인 카이제곱분포의 적률생성함수

적률과 적률 생성함수

- 확률변수의 선형결합 (3/4)

- 정리 7.12 (2/3)

확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 서로 독립이면서 각각 자유도가 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 인 카이제곱분포를 따른다면, $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 은 자유도가 $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ 인 카이제곱분포를 따른다.

- 따름정리 7.1

확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 서로 독립이면서 평균이 μ , 분산이 σ^2 인 정규분포를 따른다면,

$$Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

은 자유도 $v = n$ 인 카이제곱 분포를 따른다.

적률과 적률 생성함수

- 확률변수의 선형결합 (4/4)

- 정리 7.12 (3/3)

확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 서로 독립이면서 각각 자유도가 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 인 카이제곱분포를 따른다면, $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 은 자유도가 $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ 인 카이제곱분포를 따른다.

- 따름정리 7.2

확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 서로 독립이면서 각각의 평균이 μ_i , 분산이 σ_i^2 인 정규분포를 따른다면,

$$Y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

은 자유도 $v = n$ 인 카이제곱분포를 따른다.

Thanks!

송 민 희(minhee@pel.sejong.ac.kr)

부록#1

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 증명 (1/3)

1. 감마함수 정의

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

여기서 $\alpha = \frac{1}{2}$ 대입하면

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

부록#1

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 증명 (2/3)

2. $t = x^2$ 치환

$t^{-\frac{1}{2}}$ 를 없애기 위해 $t = x^2$ 으로 치환

$$\begin{aligned} t &= x^2 &\Rightarrow & dt = 2x \, dx \\ t^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

이를 대입하면

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-x^2} \cdot 2x \, dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx \end{aligned}$$

부록#1

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 증명 (3/3)

3. 가우스 적분

해당 식에 가우스 적분을 계산하면

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

부록#2

• MGF 미분 증명 (정리 7.6)

MGF를 전개하면

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots$$

MGF를 한 번 미분하고 $t = 0$ 을 대입하면

$$M'_X(t) = E(X) + tE(X^2) + \frac{t^2 E(X^3)}{2!} + \dots$$
$$M'_X(0) = E(X)$$

MGF를 두 번 미분하고 $t = 0$ 을 대입하면

$$M''_X(t) = E(X^2) + tE(X^3) + \dots$$
$$M''_X(0) = E(X^2)$$

이에 따라 MGF를 r 번 미분하고 $t = 0$ 을 대입하면

$$M_X^r(0) = E(X^r)$$

부록#3

• 이항분포 $b(x; n, p)$ 의 평균과 분산 증명 (5장)

j 번째 시행에서의 결과를 베르누이 확률변수 I_j 로 표시하면 I_j 는 q 와 p 의 확률로 각각 0과 1의 값을 가짐. 따라서, 이항실험에서 성공횟수는 n 개의 독립된 베르누이 변수의 합으로 쓰여질 수 있음.

그러므로

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

I_j 의 평균은 $E(I_j) = (0)(q) + (1)(p) = p$ 이다.

$g(X, Y) = X$ 이고 $h(X, Y) = Y$ 라 했을 때 $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$ 를 이용하면, 이항분포의 평균은

$$\mu = E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \cdots + E(I_n) = \underbrace{p + p + \cdots + p}_{n\text{개}} = np$$

I_j 의 분산은

$$\sigma_{I_j}^2 = E[(I_j - p)^2] = E(I_j^2) - p^2 = (0)^2(q) + (1)^2(p) - p^2 = p(1 - p) = pq$$

서로 독립인 확률변수의 합의 분산은 각 분산의 합이므로 이항분포의 분산은

$$\sigma_X^2 = \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2 + \cdots + \sigma_{I_n}^2 = \underbrace{pq + pq + \cdots + pq}_{n\text{개}} = npq$$

부록#4

• 자유도가 ν 인 카이제곱분포의 적률생성함수 증명 (1/4)

1. $X^2(\nu)$ 의 밀도함수

카이제곱분포는 감마분포의 특수한 형태이므로

$$X \sim X^2(\nu) \Leftrightarrow X \sim \text{Gamma}\left(\alpha = \frac{\nu}{2}, \theta = 2\right)$$

카이제곱분포의 밀도함수는

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$

부록#4

• 자유도가 ν 인 카이제곱분포의 적률생성함수 증명 (2/4)

2. 적률생성함수의 정의로 적분 세우기

적률생성함수의 정의는

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

밀도함수를 대입하면

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

e 에 대한 지수를 정리하면

$$M_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\left(\frac{1}{2}-t\right)x} dx$$

여기서 적분이 수렴하기 위해서는 $\frac{1}{2} - t > 0$ 즉,
$$t < \frac{1}{2}$$

부록#4

• 자유도가 ν 인 카이제곱분포의 적률생성함수 증명 (3/4)

3. 감마적분 형태로 계산

감마함수의 성질은

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(a)}{b^a} \quad (a > 0, b > 0)$$

$a = \frac{\nu}{2}$, $b = \frac{1}{2} - t$ 이므로

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\left(\frac{1}{2}-t\right)x} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{\nu}{2}}}$$

이를 대입하면

$$M_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{\nu}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{\nu}{2}}}$$

부록#4

• 자유도가 ν 인 카이제곱분포의 적률생성함수 증명 (4/4)

4. 정리

$$\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - t\right)^{\frac{\nu}{2}}} = \left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{2} - t\right)}\right)^{\frac{\nu}{2}} = \left(\frac{1}{1 - 2t}\right)^{\frac{\nu}{2}} = (1 - 2t)^{-\frac{\nu}{2}}$$

따라서,

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{\nu}{2}} \quad \left(t < \frac{1}{2}\right)$$

부록#5

• 그림 1, 2

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. np.random.seed(0)

4. X = np.random.exponential(scale=2, size=10000)
5. Y = np.log(X + 1e-6)

6. fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,4))

7. axes[0].hist(X, bins=50)
8. axes[0].hist(X, bins=50, color="#E5B9B5")
9. axes[0].set_title("Before: Right-Skewed X")
10. axes[0].set_xlabel("X")

11. axes[1].hist(Y, bins=50)
12. axes[1].hist(Y, bins=50, color="#E5B9B5")
13. axes[1].set_title("After: Y = log X")
14. axes[1].set_xlabel("Y")

15. plt.tight_layout()
16. plt.show()
```

부록#6

• 그림 3, 4

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. np.random.seed(0)

4. X = np.random.normal(loc=50, scale=20, size=10000)
5. Z = (X - np.mean(X)) / np.std(X)

6. fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,4))

7. axes[0].hist(X, bins=50)
8. axes[0].hist(X, bins=50, color="#E5B9B5")
9. axes[0].set_title("Before: Session Length X")
10. axes[0].set_xlabel("X")

11. axes[1].hist(Z, bins=50)
12. axes[1].hist(Z, bins=50, color="#E5B9B5")
13. axes[1].set_title("After: Z = (X -  $\mu$ )/ $\sigma$ ")
14. axes[1].set_xlabel("Z")

15. plt.tight_layout()
16. plt.show()
```

부록#7

• 그림 5, 6

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. np.random.seed(0)
4. lam = 20
5. X = np.random.poisson(lam=lam, size=10000)
6. Z = (X - lam) / np.sqrt(lam)

7. fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(12,4))

8. axes[0].hist(X, bins=30, density=True,
color="#E5B9B5", alpha=0.7)

9. axes[0].set_title("Before: Poisson vs Normal
Approx")
10. axes[0].set_xlabel("X")
11. axes[0].set_ylabel("Density")

12. axes[1].hist(Z, bins=40, density=True,
color="#E5B9B5", alpha=0.7)

13. z_vals = np.linspace(-4,4,400)
14. std_normal_pdf = (1/np.sqrt(2*np.pi)) * np.exp(-
z_vals**2/2)
```

```
15. axes[1].plot(z_vals, std_normal_pdf, color="black",
linewidth=2)
16. axes[1].set_title("After: Standardized Z vs N(0,1)")
17. axes[1].set_xlabel("Z")

18. plt.tight_layout()
19. plt.show()
```

부록#8

• 그림 7

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. p = 3/4
4. x = np.arange(1, 11)
5. fx = p * (1 - p)**(x - 1)

6. plt.stem(x, fx)
7. plt.xlabel("x")
8. plt.ylabel("P(X=x)")
9. plt.title("PMF of X (Geometric Distribution)")
10. plt.show()
```

• 그림 8

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. p = 3/4
4. x = np.arange(1, 11)
5. y = x**2
6. gy = p * (1 - p)**(x - 1)

7. plt.stem(y, gy)
8. plt.xlabel("y")
9. plt.ylabel("P(Y=y)")
10. plt.title("PMF of Y = X^2")
11. plt.show()
```


부록#9

• 그림 9

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. def u(x):
4.     c = 0.18
5.     A = 0.42
6.     k = 0.62
7.     return c + A * np.exp(k * x)

8. x = np.linspace(-0.7, 3.3, 900)
9. y = u(x)
10. w_a = 1.55
11. w_b = 2.75
12. a = float(u(w_a))
13. b = float(u(w_b))

14. fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.0, 3.8))
15. ax.plot(x, y, color="black", lw=1.8)
16. ax.text(w_b + 0.15, b + 0.05, r"$y=u(x)$",
    fontsize=11)

17. ax.hlines([a, b], xmin=0, xmax=[w_a, w_b],
18.           colors="black", linestyle="dashed",
19.           lw=1.5)
20. ax.hlines([a, b], xmin=0, xmax=[w_a, w_b],
21.           colors="black", linestyle="dashed",
22.           lw=1.5)

23. ax.text(-0.2, a, "a", va="center")
24. ax.text(-0.2, b, "b", va="center")
25. ax.text(w_a, -0.2, "w(a)", ha="center")
26. ax.text(w_b, -0.2, "w(b)", ha="center")

19. ax.set_xticks([])
20. ax.set_yticks([])

21. ax.spines["right"].set_visible(False)
22. ax.spines["top"].set_visible(False)
23. ax.spines["left"].set_position(("data", 0))
24. ax.spines["bottom"].set_position(("data", 0))

25. ax.set_xlim(-0.9, 3.55)
26. ax.set_ylim(-0.45, b + 0.45)

27. ax.text(1.01, -0.02, "x", transform=ax.transAxes,
    ha="left", va="top")
28. ax.text(-0.02, 1.01, "y", transform=ax.transAxes,
    ha="right", va="bottom")

29. plt.tight_layout()
30. plt.show()
```

부록#10

• 그림 10

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. def u(x, A=4.2, k=0.75, c=0.12):
4.     return c + A * np.exp(-k * x)

5. x0 = 0.25
6. x_end = 5.0
7. x = np.linspace(x0, x_end, 900)
8. y = u(x)

9. w_b_target = 0.75
10. w_a_target = 2.35
11. b = float(u(w_b_target))
12. a = float(u(w_a_target))

13. w_b = np.interp(b, y[::-1], x[::-1])
14. w_a = np.interp(a, y[::-1], x[::-1])

15. fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.0, 3.8))

16. ax.plot(x, y, color="black", lw=1.8)
17. ax.text((w_b + w_a)/2 + 0.25, (a + b)/2 + 0.15,
18.         r"$y=u(x)$", fontsize=11)

19. ax.vlines([w_b, w_a], ymin=0, ymax=[b, a],
20.           colors="black", linestyle="dashed", lw=1.5)
21. ax.text(-0.2, b, "b", va="center")
22. ax.text(-0.2, a, "a", va="center")
23. ax.text(w_b, -0.2, "w(b)", ha="center")
24. ax.text(w_a, -0.2, "w(a)", ha="center")
25. ax.set_xticks([])
26. ax.set_yticks([])
27. ax.spines["right"].set_visible(False)
28. ax.spines["top"].set_visible(False)
29. ax.spines["left"].set_position(("data", 0))
30. ax.spines["bottom"].set_position(("data", 0))
31. ax.set_xlim(-0.45, x_end + 0.6)
32. ax.set_ylim(-0.28, y.max() + 0.25)
33. ax.text(1.01, 0, "x", transform=ax.transAxes,
34.         ha="left", va="top")
35. ax.text(0, 1.01, "y", transform=ax.transAxes,
36.         ha="right", va="bottom")

37. plt.tight_layout()
38. plt.show()
```

부록#11

• 그림 11 - A

```
1. import matplotlib.pyplot as plt
2. EDGE = "#C05046"
3. FILL = "#E5B9B5"
4. fig, ax = plt.subplots(figsize=(4, 4))
5. x = [0, 1, 1, 0, 0]
6. y = [0, 0, 1, 1, 0]
7. ax.fill(x, y, color=FILL, edgecolor=EDGE, linewidth=2)
8. ax.plot(x, y, color=EDGE, linewidth=2)
9. ax.set_xlim(0, 1.08)
10. ax.set_ylim(0, 1.08)
11. ax.set_xticks([0, 1])
12. ax.set_yticks([0, 1])
13. ax.set_xlabel(r"$x_1$")
14. ax.set_ylabel(r"$x_2$", rotation=0, labelpad=10)
15. ax.text(-0.06, 0.5, r"$x_1 = 0$", rotation=90, va="center")
16. ax.text(0.5, -0.08, r"$x_2 = 0$", ha="center")
17. ax.text(0.5, 1.03, r"$x_2 = 1$", ha="center", va="bottom")
18. ax.text(1.03, 0.5, r"$x_1 = 1$", va="center")
19. ax.text(0.5, 0.5, "A", ha="center", va="center", fontsize=12)
20. ax.set_aspect("equal")
21. ax.spines["top"].set_visible(False)
22. ax.spines["right"].set_visible(False)
23. plt.tight_layout()
24. plt.show()
```

부록#11

• 그림 11 - B

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. EDGE = "#C05046"
4. FILL = "#E5B9B5"
5. fig, ax = plt.subplots(figsize=(4, 4))
6. y1 = np.linspace(0, 1, 600)
7. y2 = np.sqrt(y1)
8. ax.fill_between(y1, 0, y2, color=FILL, edgecolor=EDGE, linewidth=2)
9. ax.plot(y1, y2, color=EDGE, linewidth=2)
10. ax.plot([0, 1], [0, 0], color=EDGE, linewidth=2) # y2=0
11. ax.plot([1, 1], [0, 1], color=EDGE, linewidth=2) # y1=1
12. ax.set_xlim(0, 1.08)
13. ax.set_ylim(0, 1.08)
14. ax.set_xticks([0, 1])
15. ax.set_yticks([0, 1])
16. ax.set_xlabel(r"$y_1$")
17. ax.set_ylabel(r"$y_2$", rotation=0, labelpad=10)
18. ax.text(-0.06, 0.5, r"$y_1 = 0$", rotation=90, va="center")
19. ax.text(0.5, -0.08, r"$y_2 = 0$", ha="center")
20. ax.text(0.0, 1.03, r"$y_2 = 1$", ha="left", va="bottom")
21. ax.text(1.03, 0.5, r"$y_1 = 1$", va="center")
22. ax.text(0.33, 0.65, r"$y_2^2 = y_1$", rotation=35)
23. ax.text(0.62, 0.48, "B", fontsize=12)

24. ax.set_aspect("equal")
25. ax.spines["top"].set_visible(False)
26. ax.spines["right"].set_visible(False)

27. plt.tight_layout()
28. plt.show()
```

부록#12

• 그림 12

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. x1 = np.linspace(0, 1, 250)
4. x2 = np.linspace(0, 1, 250)
5. X1, X2 = np.meshgrid(x1, x2)

6. F = 4 * X1 * X2

7. cmap = "YlOrRd"
8. vmin, vmax = 0, 4
9. levels = np.linspace(vmin, vmax, 9)

10. fig = plt.figure(figsize=(12, 5))

11. ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection="3d")
12. surf = ax1.plot_surface(X1, X2, F, cmap=cmap,
13.                         vmin=vmin, vmax=vmax,
14.                         edgecolor="none")

15. ax1.set_title("Joint PDF (3D Surface)")
16. ax1.set_xlabel("x1")
17. ax1.set_ylabel("x2")
18. ax1.set_zlabel("f(x1,x2)")
19. ax1.set_zlim(vmin, vmax)
20. ax1.view_init(elev=25, azimuth=-60)
```

```
21. ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2)
22. cont = ax2.contour(X1, X2, F,
23.                    levels=levels,
24.                    cmap=cmap,
25.                    vmin=vmin, vmax=vmax)

26. ax2.set_title("Joint PDF (Contour)")
27. ax2.set_xlabel("x1")
28. ax2.set_ylabel("x2")
29. ax2.set_aspect("equal")

30. fig.subplots_adjust(wspace=0.3)

31. cbar_ax = fig.add_axes([0.48, 0.15, 0.02, 0.7])
32. fig.colorbar(surf, cax=cbar_ax, label="f(x1,x2)")

33. plt.show()
```

부록#13

• 그림 13

```
1. import numpy as np
2. import matplotlib.pyplot as plt

3. y1 = np.linspace(1e-3, 1, 350)
4. y2 = np.linspace(0, 1, 350)
5. Y1, Y2 = np.meshgrid(y1, y2)

6. mask = (Y2**2 < Y1)

7. G = np.full_like(Y1, np.nan, dtype=float)
8. G[mask] = 2 * Y2[mask] / Y1[mask]

9. cmap = "YlOrRd"
10. vmin = 0.0
11. vmax = 8.0
12. levels = np.linspace(vmin, vmax, 9)

13. G_plot = np.clip(G, vmin, vmax)

14. fig = plt.figure(figsize=(12, 5))

15. ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection="3d")
16. surf = ax1.plot_surface(Y1, Y2, G_plot, cmap=cmap,
17.                          vmin=vmin, vmax=vmax,
18.                          edgecolor="none")
```

```
19. ax1.set_title("Joint PDF g(y1,y2) (3D Surface)")
20. ax1.set_xlabel("y1")
21. ax1.set_ylabel("y2")
22. ax1.set_zlabel("g(y1,y2)")
23. ax1.set_zlim(vmin, vmax)
24. ax1.view_init(elev=25, azimuth=-60)

25. ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2)
26. cont = ax2.contour(Y1, Y2, G_plot, levels=levels,
                      cmap=cmap, vmin=vmin, vmax=vmax)
27. ax2.set_title("Joint PDF g(y1,y2) (Contour)")
28. ax2.set_xlabel("y1")
29. ax2.set_ylabel("y2")
30. ax2.set_xlim(0, 1)
31. ax2.set_ylim(0, 1)
32. ax2.set_aspect("equal")

33. t = np.linspace(0, 1, 400)
34. ax2.plot(t, np.sqrt(t), color="black", linewidth=1)

35. fig.subplots_adjust(wspace=0.3)
36. cbar_ax = fig.add_axes([0.48, 0.15, 0.02, 0.7])
37. fig.colorbar(surf, cax=cbar_ax, label="g(y1,y2)")

38. plt.show()
```