2026/05/28, 2026 보안 기초 세미나

암호학과 네트워크 보안

-9장 암호수학-

김 민 식 (ms6127@naver.com)

세종대학교 프로토콜공학연구실

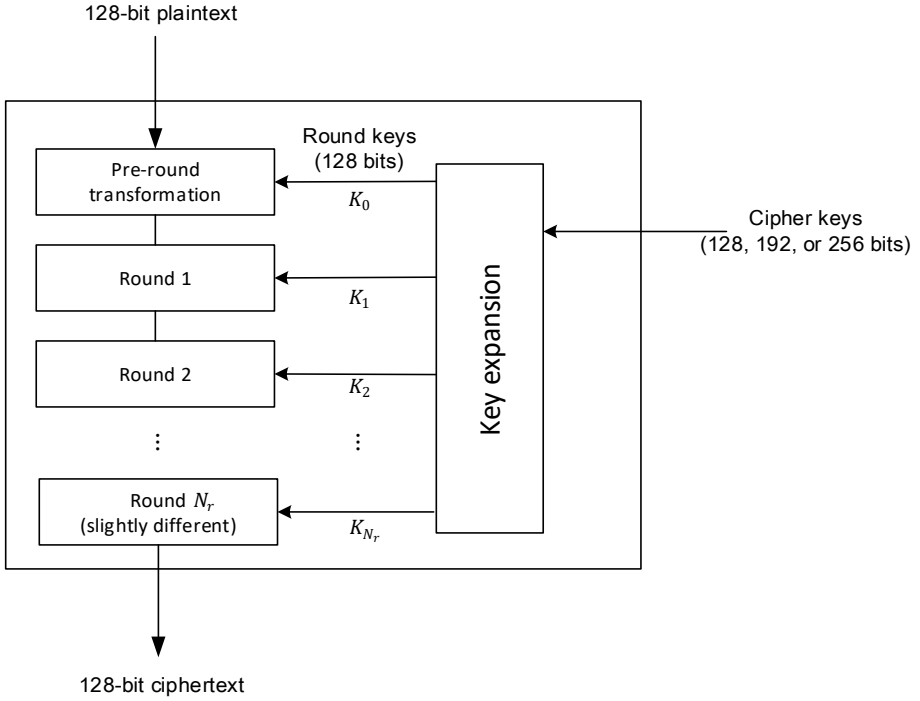
목 차

보충

- AES (Advanced Encryption Standard)
  - 정의
    - 128비트 블록 단위의 데이터를 암호화하는 대칭 키 블록 암호 알고리즘임
  - 특징
    - 128비트 평문 블록을 128비트 암호문으로 변환함
    - 키 길이에 따라 AES-128, AES-192, AES-256으로 구분됨
    - Feistel 구조가 아닌 SPN(Substitution-Permutation Network) 구조를 기반으로 함
      - SubBytes, ShiftRows, MixColumns, AddRoundKey를 반복 수행함

보충

- AES 구조
  - AES는 128비트 블록을 처리하는 SPN 구조의 대칭키 블록 암호 알고리즘임
  - 생성한 라운드 키의 수는 총 라운드 수보다 하나 더 많음
    - 라운드 키의 수 = $N_r + 1$

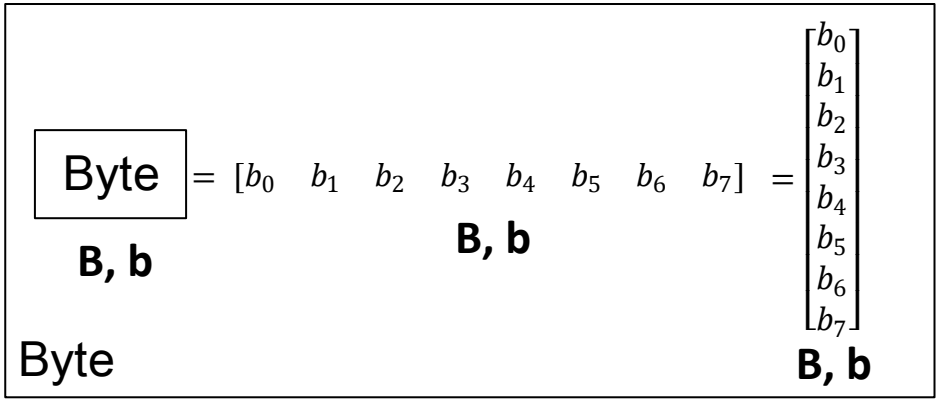


N_r	Key size
10	128
12	192
14	256

AES는 128, 192, 256비트 키를 사용하고 키 길이에 따라 각각 10, 12, 14 라운드를 갖는 3가지 버전이 있음

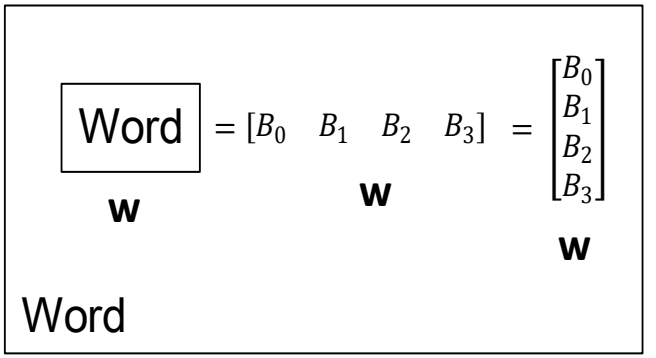
보충

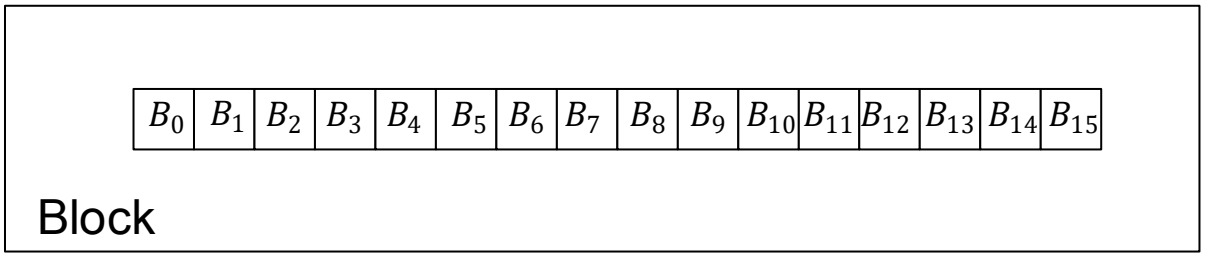
- AES 데이터 단위
  - 비트(Bit)
    - 0 또는 1을 나타내는 가장 작은 데이터 단위임
    - 표현 시, 소문자로 표현
      - e.g., b_1, b_2
  - 바이트(Byte)
    - 8개의 비트로 구성된 단위임
    - 비트를 원소로 하는 행 행렬(1×8) 또는 열 행렬(8×1)로 표현
    - 표현 시, 볼드 체 문자로 표현
      - e.g., **b, B**



보충

- AES 데이터 단위
  - 워드(Word)
    - 4개의 바이트로 구성된 32비트 단위임
    - 바이트를 원소로 하는 행 행렬 (1×4) 또는 열 행렬(4×1)로 표현
    - 표현 시, 볼드 체의 소문자 **w** 사용
      - e.g., **w**
  - 블록(Block)
    - 128비트(16바이트)로 이루어진 단위
    - 16바이트를 원소로 하는 행 행렬(1×16)로 표현





보충

- AES 데이터 단위
  - 상태(State)
    - 16바이트를 원소로 가지는 4×4행렬로 표현
      - 상태의 각 원소는 $\boldsymbol{S_{r,c}}$로 표현함($\boldsymbol{r}$은 행으로, $\boldsymbol{c}$는 열로서 0에서 3까지 사용함)
    - 각 열 4바이트를 하나의 워드로 볼 수 있음
      - State는 4개의 워드 $\boldsymbol{w_0, w_1, w_2, w_3}$로 표현 가능함
    - 표현 시, $\boldsymbol{S}$라 나타내며 임시 상태일 시에는 $\boldsymbol{T}$로 표현

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{0,0} & S_{0,1} & S_{0,2} & S_{0,3} \\ S_{1,0} & S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} \\ S_{2,0} & S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} \\ S_{3,0} & S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} \end{bmatrix} = [w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3]$$

State

보충

- AES 데이터 단위
  - 예제 7.1

16개의 문자로 이루어진 블록이 어떻게 4×4 행렬로 표현되는지 살펴본다. 주어진 문자가 “AES uses a matrix” 라고 가정하자

- 마지막에 가짜 문자를 추가하여 16개의 문자를 얻음

A	E	S	U	S	E	S	A	M	A	T	R	I	X	Z	Z

- 각 문자를 00과 25 사이의 정수로 나타내고 이를 16진수로 표현함

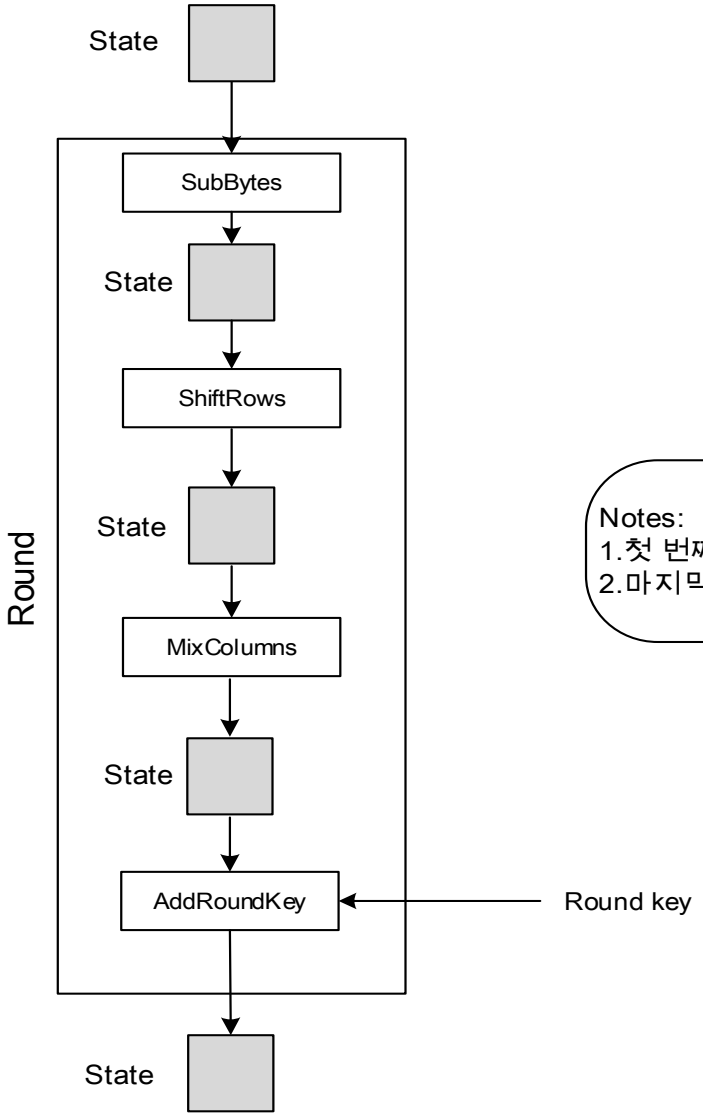
00 04 12 14 12 04 12 00 0C 00 13 11 08 23 19 19

- 왼쪽 문자열부터 한 열씩 채움

$$\begin{bmatrix} 00 & 12 & 0C & 08 \\ 04 & 04 & 00 & 23 \\ 12 & 12 & 13 & 19 \\ 14 & 00 & 11 & 19 \end{bmatrix}$$

보충

- AES 라운드(Round)
  - 구조



Notes:
1.첫 번째 라운드 전에 AddRoundKey가 한 번 적용됨
2.마지막 라운드에서는 세 번째 변환이 빠짐

보충

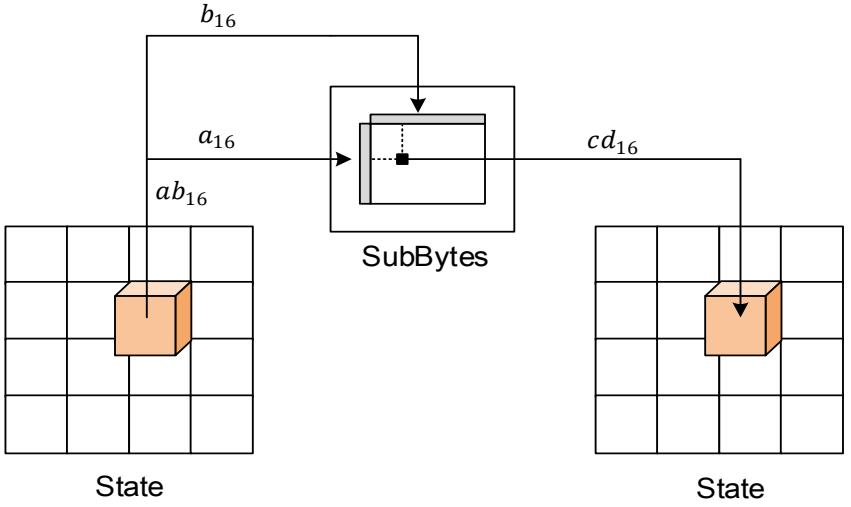
- AES 라운드
  - AES의 라운드 함수는 4가지 형태의 변환을 사용함
    - 대치(Substitution)
      - 입력 값을 정해진 규칙에 따라 다른 값으로 바꾸는 변환
      - SubBytes, InvSubBytes
    - 치환(Permutation)
      - 데이터 값 자체는 바꾸지 않고, 위치만 재배열하는 변환
      - ShiftRows
    - 뒤섞음(Mixing)
      - 여러 바이트 값을 서로 섞어서, 한 바이트의 변화가 여러 바이트에 영향을 주도록 만드는 변환
      - MixColumns, InvMixColumns
    - 키 덧셈(Key-Adding)
      - 상태(State) 배열과 라운드 키(Round Key)를 XOR 연산하여 결합하는 변환
      - AddRoundKey

보충

- AES 라운드
  - 대치(Substitution)
    - SubBytes (1/5)
      - 정의
        - State의 각 바이트를 S-box를 이용해 다른 바이트 값으로 대치하는 변환임
      - 특징
        - 16개의 바이트에 독립적으로 적용됨
        - 바이트의 위치는 변하지 않고 값만 변경됨
        - 모든 바이트 변환에 하나의 S-box 테이블을 사용함
        - 비선형 변환으로 혼돈 효과를 제공함
        - 복호화에서는 역변환인 InvSubBytes를 사용함

보충

- AES 라운드
  - 대치(Substitution)
    - SubBytes (2/5)
      - SubBytes 변환 표 참조 과정
        1. 입력 바이트를 16진수 두 자리로 표현함
           - ab_{16}
        2. 앞자리 a는 S-Box의 행을 선택하고 뒷 자리 b는 S-Box의 열을 선택함
        3. 선택된 행과 열이 만나는 값 cd_{16} 이 새로운 출력 바이트가 됨
        4. 변환된 바이트는 State의 같은 위치에 저장됨



보충

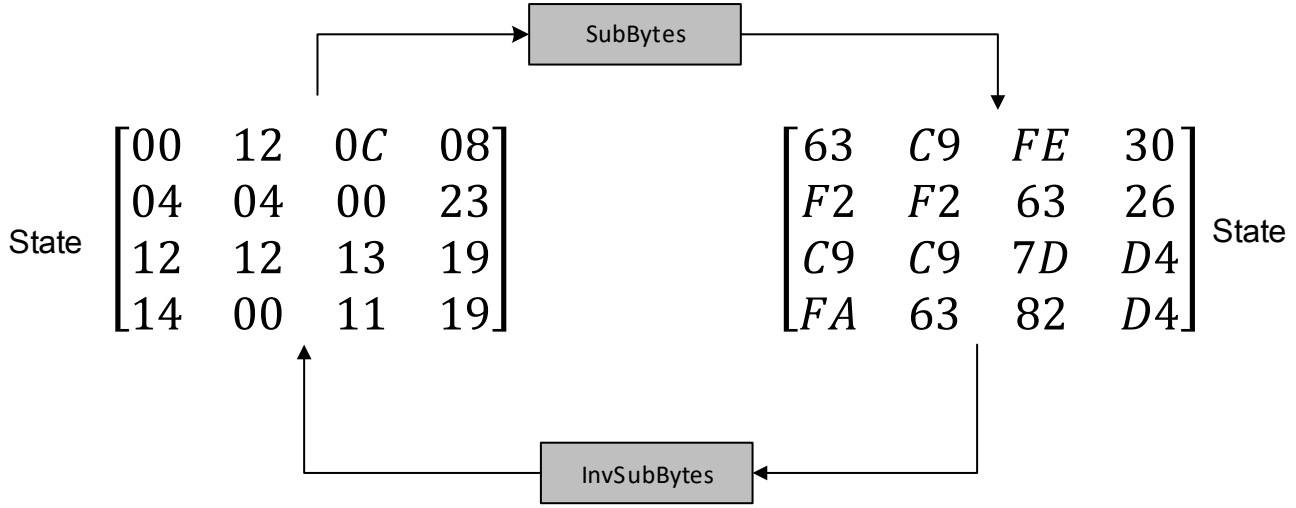
- AES 라운드
  - 대치(Substitution)
    - SubBytes (3/5)
      - SubBytes 변환 표 참조 과정

<SubBytes 변환표>

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	F	E	F
0	63	7C	77	7B	F2	6B	6F	C5	30	01	67	2B	FE	D7	AB	76
1	CA	82	C9	7D	FA	59	47	F0	AD	D4	A2	AF	9C	A4	72	C0
2	B7	FD	93	26	36	3F	F7	CC	34	A5	E5	F1	71	D8	31	15
3	04	C7	23	C3	18	96	05	9A	07	12	80	E2	EB	27	B2	75
4	09	83	2C	1A	1B	6E	5A	A0	52	3B	D6	B3	29	E3	2F	84
5	53	D1	00	ED	20	FC	B1	5B	6A	CB	BE	39	4A	4C	58	CF
6	D0	EF	AA	FB	43	4D	33	85	45	F9	02	7F	50	3C	9F	A8
7	51	A3	40	8F	92	9D	38	F5	BC	B6	DA	21	10	FF	F3	D2
8	CD	0C	13	EC	5F	97	44	17	C4	A7	7E	3D	64	5D	19	73
9	60	81	4F	DC	22	2A	90	88	46	EE	B8	14	DE	5E	0B	DB
A	E0	32	3A	0A	49	06	24	5C	C2	D3	AC	62	91	95	E4	79
B	E7	CB	37	6D	8D	D5	4E	A9	6C	56	F4	EA	65	7A	AE	08
C	BA	78	25	2E	1C	A6	B4	C6	E8	DD	74	1F	4B	BD	8B	8A
D	70	3E	B5	66	48	03	F6	0E	61	35	57	B9	86	C1	1D	9E
E	E1	F8	98	11	69	D9	8E	94	9B	1E	87	E9	CE	55	E8	DF
F	8C	A1	89	0D	BF	E6	42	68	41	99	2D	0F	B0	54	BB	16

보충

- AES 라운드
  - 대치(Substitution)
    - SubBytes (4/5)
      - SubBytes 변환 표 참조 과정
        - InvSubBytes를 통해서 원래의 값으로 복원할 수 있음



보충

- AES 라운드
  - 대치(Substitution)
    - SubBytes (5/5)
      - $GF(2^8)$을 이용한 변환 방법
        - 변환 원리
          - 입력 바이트를 $GF(2^8)$의 원소로 보고 역원을 구함
          - 구한 역원에 아핀 변환을 적용함
          - 최종 8비트 값이 SubBytes 출력 값이 됨
        - 구성 요소
          - $S_{r,c}$: State의 r행 c열에 위치한 입력 바이트임
          - $(S_r, c)^{-1}$: 입력 바이트의 곱셈 역원임
          - X: AES에서 정해진 고정 행렬임
          - y: AES에서 정해진 고정 벡터임
          - d: SubBytes 변환 후 생성되는 출력 바이트임
        - 관계식
          - SubByte: $d = X(S_r, c)^{-1} \oplus y$
          - InvSubByte: $[X^{-1}(d \oplus y)]^{-1} = [X^{-1}(X(S_r, c)^{-1} \oplus y \oplus y)]^{-1} = S_r, c$

*아핀 변환:역원으로 바뀐 값을 AES가 정한 방식으로 한 번 더 섞어 최종 S-box 출력 값을 만드는 과정임

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

고정 행렬 X

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

고정 벡터 y

보충

- AES 라운드
  - 대치(Substitution)
    - 부분바이트 (SubBytes)
      - 예제 7.3

16진수 $0C$가 SubByte 통해 FE로 계산되는 과정을 계산해라

- SubBytes
  1. $GF(2^8)$체에서 $0C_{16}(00001100_2)$의 곱셈에 대한 역원을 구함 $(0C_{16})^{-1} = B0_{16} = 10110000_2$
  2. 행렬 X와 곱셈 연산 후 값은 10011101_2이 됨
  3. XOR 연산 후의 값은 $\boldsymbol{d} = 11111110_2$이 됨, 이는 FE_{16}의 비트 단위 표현임

보충

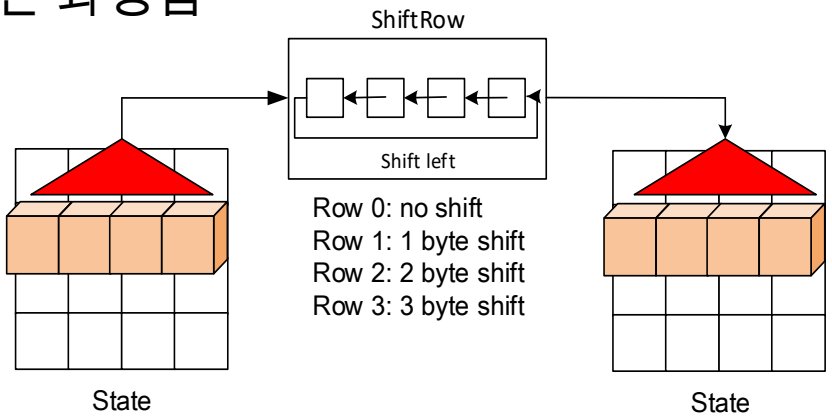
- AES 라운드
  - 대치(Substitution)
    - 부분바이트 (SubBytes)
      - 예제 7.3

InSubByte를 통해 다시 $0C$로 계산하는 과정을 설명하라(역부분바이트 관계식)

- InvSubBytes
  1. XOR 연산 후의 값으로 10011101_2임
  2. 행렬X^{-1}를 곱한 이후 값은 10110000_2 또는 $B0$가 됨
  3. $B0$의 곱셈에 대한 역원은 $0C$가 됨

보충

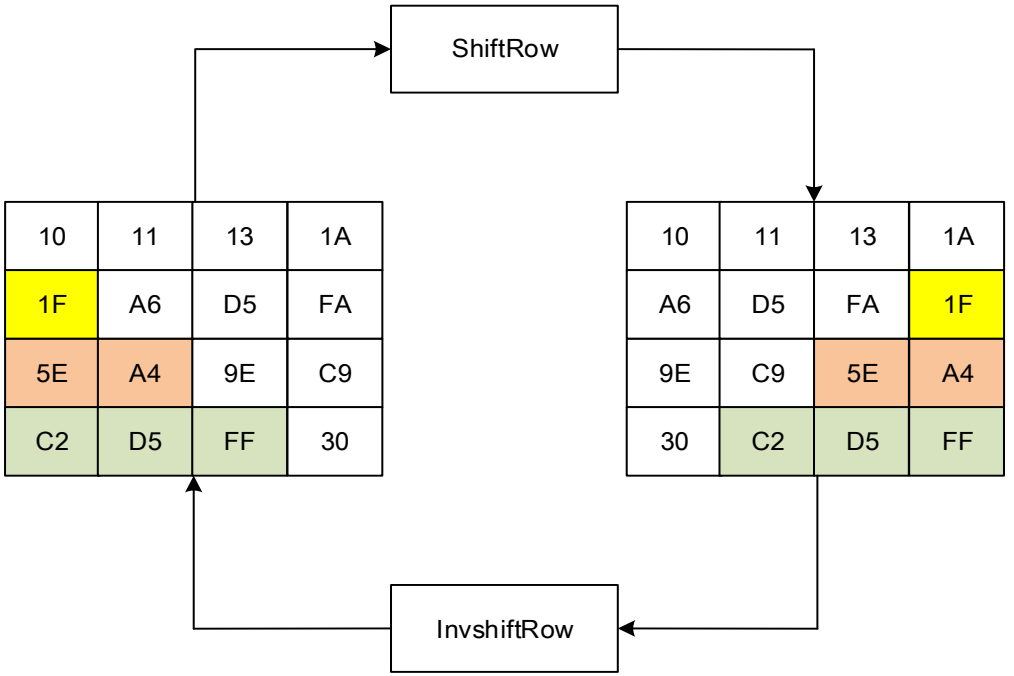
- AES 라운드
  - 치환(Permutation) 또는 이동 연산(Shifting)
    - ShiftRows
      - 정의
        - State의 각 행을 왼쪽으로 순환 이동하는 과정임
      - 이동 방식
        - 0번째 행: 이동하지 않음
        - 1번째 행: 왼쪽으로 1바이트 이동함
        - 2번째 행: 왼쪽으로 2바이트 이동함
        - 3번째 행: 왼쪽으로 3바이트 이동함
      - 특징
        - 바이트 값은 변하지 않고 행렬 상의 위치만 이동함
        - 이동된 바이트는 사라지지 않고 반대쪽 끝으로 이동함
        - 바이트의 위치를 재배열하여 한 열의 값들이 여러 열로 퍼지게 하기 때문에 확산성을 확보함
        - InvShiftRows는 복호화 과정에서 사용하고 오른쪽으로 이동을 수행함
          - ShitfRows와 InvShiftRows는 서로 역관계임



보충

- AES 라운드
  - 치환(Permutation) 또는 이동 연산(Shifting)
    - 예제 7.4

다음 상태(State)에 대해 ShiftRows 변환과 InvShiftRows 변환을 수행하시오.



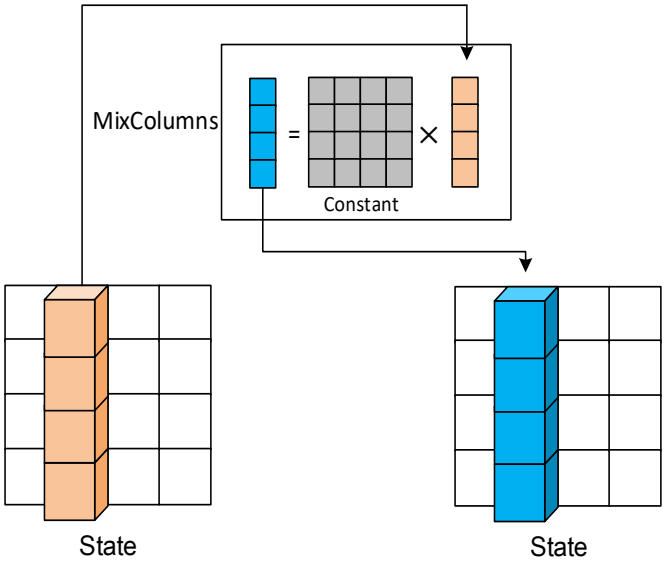
보충

- AES 라운드
  - 뒤섞음(Mixing)
    - MixColumns
      - 정의
        - State의 각 열을 고정 행렬과 곱하여 새로운 열로 변환하는 과정임

$$\begin{vmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{vmatrix}$$

AES 고정 행렬

      - 변환 방식
        - 각 열을 AES에서 정한 고정 행렬과 곱함
        - 이때 곱셈은 $GF(2^8)$에서 수행되며, 덧셈은 XOR로 처리함

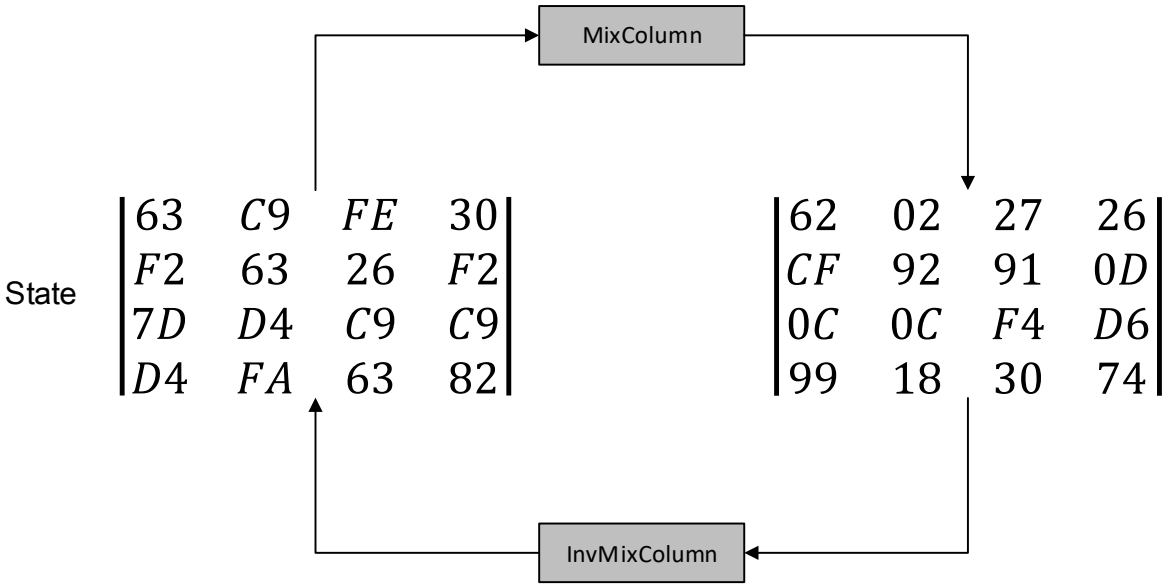


      - 특징
        - AES의 확산 효과를 높이는 역할임
        - 키나 평문에 따라 고정 행렬은 바뀌지 않음
        - InvMixColumns는 MixColumns의 역변환임
          - 암호화 과정에서 섞인 State의 각 열을 복호화 과정에서 다시 되돌리는 변환임

보충

- AES 라운드
  - 뒤섞음(Mixing)
    - MixColumns

다음 상태(State)를 MixColumns 변환과 InvMixColumns 변환을 수행하시오.



$$\begin{vmatrix} 63 & C9 & FE & 30 \\ F2 & 63 & 26 & F2 \\ 7D & D4 & C9 & C9 \\ D4 & FA & 63 & 82 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 62 & 02 & 27 & 26 \\ CF & 92 & 91 & 0D \\ 0C & 0C & F4 & D6 \\ 99 & 18 & 30 & 74 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0E & 0B & 0D & 09 \\ 09 & 0E & 0B & 0D \\ 0D & 09 & 0E & 0B \\ 0B & 0D & 09 & 0E \end{vmatrix}$$

고정 행렬 고정 행렬의 역행렬

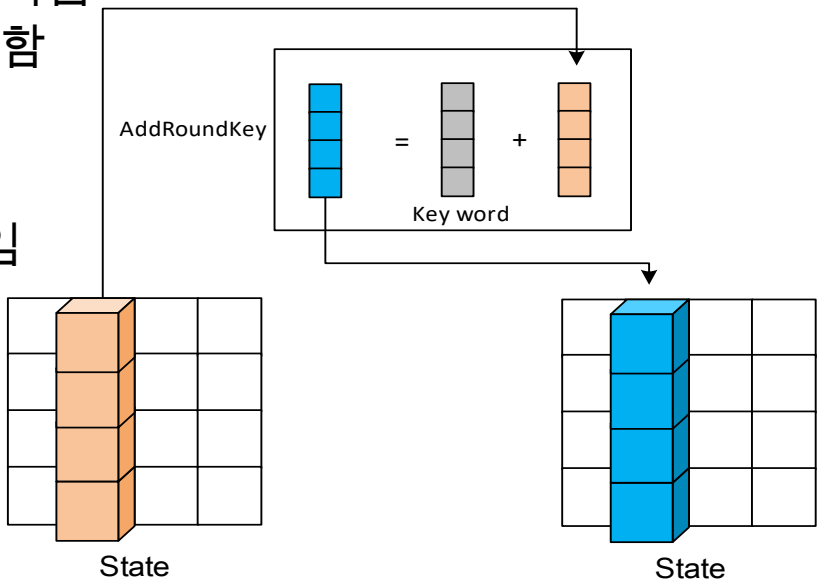
State

$$\begin{vmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} 63 \\ F2 \\ 7D \\ D4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ CF \\ 0C \\ 99 \end{bmatrix}$$

$$62 = (02 \cdot 63) \oplus (03 \cdot F2) \oplus (01 \cdot 7D) \oplus (01 \cdot D4)$$

보충

- AES 라운드
  - 키 덧셈(Key-Adding)
    - AddRoundKey
      - 정의
        - State와 라운드 키를 XOR하여 키를 결합하는 변환임
      - 변환 과정
        - 키 확장으로 생성된 라운드 키를 사용함
        - State의 각 열과 라운드 키 word를 대응시킴
        - 대응되는 바이트끼리 XOR 연산을 수행함
        - XOR 결과가 새로운 State 값이 됨
      - 특징
        - 실제 암호 키가 State에 반영되는 단계임
        - XOR은 자기 자신의 역연산 이므로 복호화에서도 같은 연산을 사용함



보충

- AES 암호화 과정
  - (1단계)
    - 평문 블록을 State 배열로 초기화
  - (2단계)
    - 초기 암호 키를 여러 라운드 키로 확장
  - (3단계)
    - 라운드 수행
      - SubBytes
      - ShiftRows
      - MixColumns
      - AddRoundKey

보충

- AES 암호화 과정
  - (1단계)State 초기화
    - 128비트 평문 블록을 4×4 State 배열로 변환하는 과정임
    - AES는 128비트(16바이트) 단위로 데이터를 처리함
    - 16바이트를 4×4 행렬 형태로 배치함
    - 왼쪽부터 한 열씩 채워 구성함

$$\text{State} = \begin{bmatrix} S_{0,0} & S_{0,1} & S_{0,2} & S_{0,3} \\ S_{1,0} & S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} \\ S_{2,0} & S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} \\ S_{3,0} & S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} \end{bmatrix}$$

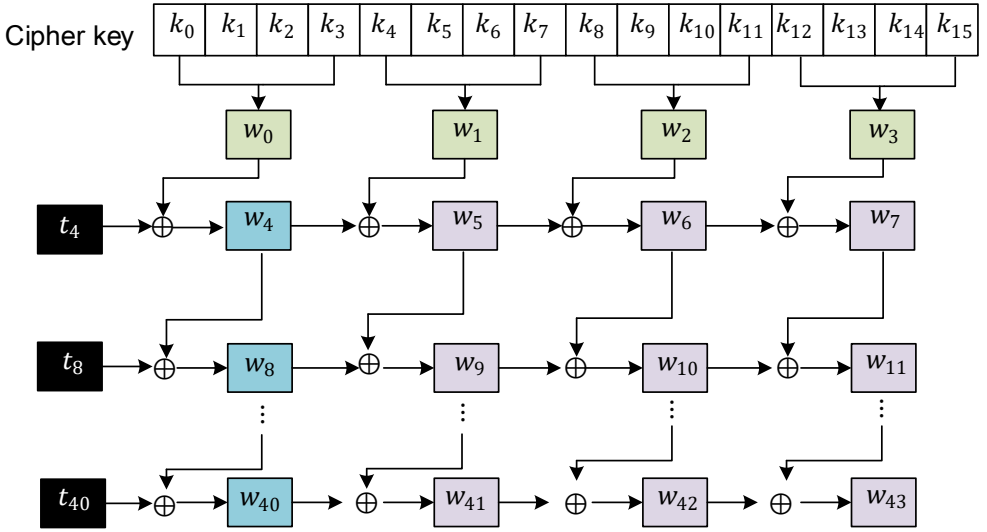
보충

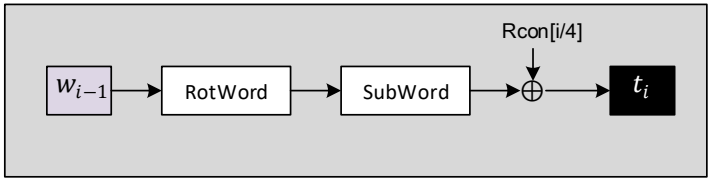
- AES 암호화 과정
  - (2단계)키 확장
    - n(128, 192, 256)비트 암호 키로부터 $N_r + 1$개의 n비트 라운드 키를 생성(N_r은 라운드 수)
    - 워드가 4개의 바이트들로 이루어진다고 할 때, 각 라운드는 워드 단위로 라운드 키를 생성함
      - $4 \times (N_r + 1)$개의 워드를 생성함
        - e.g., AES-128는 라운드 수가 10임($N_r = 10$)
          필요한 워드 수는 $4 \times (10 + 1) = 44$

Round	Words
Pre-Round	$\boldsymbol{w_0}$ $\boldsymbol{w_1}$ $\boldsymbol{w_2}$ $\boldsymbol{w_3}$
1	$\boldsymbol{w_4}$ $\boldsymbol{w_5}$ $\boldsymbol{w_6}$ $\boldsymbol{w_7}$
2	$\boldsymbol{w_8}$ $\boldsymbol{w_9}$ $\boldsymbol{w_{10}}$ $\boldsymbol{w_{11}}$
…	…
N_r	$\boldsymbol{w_{4N_r}}$ $\boldsymbol{w_{4N_r+1}}$ $\boldsymbol{w_{4N_r+2}}$ $\boldsymbol{w_{4N_r+3}}$

보충

- AES 암호화 과정
  - (2단계)키 확장
    - AES-128은 총 44개의 워드를 생성함





- 처음 네 개의 워드 $\boldsymbol{w_0}$, $\boldsymbol{w_1}$, $\boldsymbol{w_2}$, $\boldsymbol{w_3}$는 암호 키로 부터 만들어짐
- 암호 키를 16개의 바이트 k_0부터 k_{15}까지 구성된 배열로 간주함
- $\boldsymbol{w_0}$, $\boldsymbol{w_1}$, $\boldsymbol{w_2}$, $\boldsymbol{w_3}$를 하나로 연결하면 이것이 암호 키임
- $i\ mod 4 \neq 0$일 경우
  - $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_{i-1} \oplus \boldsymbol{w}_{i-4}$
- $i\ mod 4 = 0$일 경우
  - $\boldsymbol{w}_i = t \oplus \boldsymbol{w}_{i-4}$
  - t =SubWord(RotWord(w_{i-1})) $\oplus$ $\mathrm{RCon}_{i/4}$

보충

- AES 암호화 과정
  - (2단계) 키 확장
    - RotWord
      - 워드 안의 바이트 위치를 왼쪽으로 한 칸 순환 이동하는 연산임
    - SubWord
      - RotWord 결과의 각 바이트를 S-box를 이용해 다른 값으로 바꾸는 연산임
    - Rcon
      - 라운드마다 넣어주는 고정 상수값임
      - RC_i라고 불리는 라운드 상수는 4바이트 값이며, 표 또는 체 $GF(2^8)$를 이용하여 상수들의 최상위 바이트들을 계산하여 얻을 수 있음
      - RC_i라 불리는 라운드 상수의 최상위 바이트들은 x^{i-1}로 표현되고 i는 라운드 수를 뜻하고 기약다항식 $x^8 + x^4 + x^3 + 1$를 사용함

보충

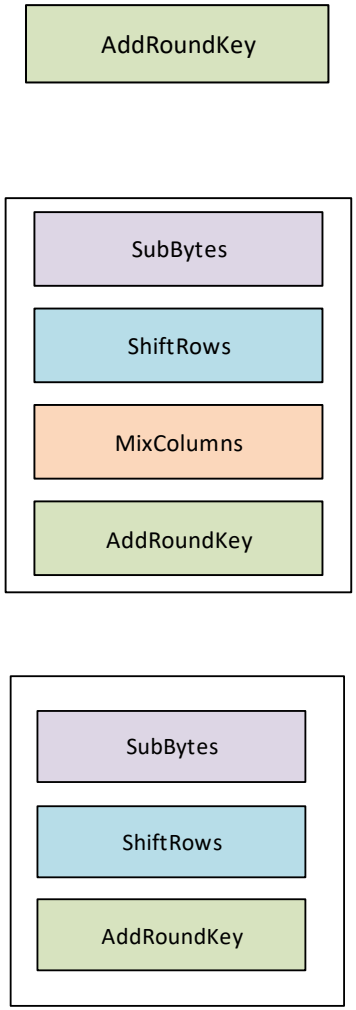
- AES 암호화 과정
  - (2단계) 키 확장
    - Rcon
      - e.g ., AES-128 키

$$RC_1 \rightarrow x^{1-1} = x^0 \; mod \; prime \; = \; 1 \rightarrow \; 00000001 \; \rightarrow \; 01_{16}$$
$$RC_5 \rightarrow x^{5-1} = x^4 \; mod \; prime \; = x^4 \rightarrow \; 00010000 \rightarrow \; 10_{16}$$
$$RC_9 \rightarrow x^{9-1} = x^8 \; mod \; prime \; = x^4 + x^3 + x + 1 \rightarrow 0001101 \rightarrow 1\mathrm{B}_{16}$$

Round	RCon	Round	RCon
1	$(\mathbf{01}\ 00\ 00\ 00)_{16}$	6	$(\mathbf{20}\ 00\ 00\ 00)_{16}$
2	$(\mathbf{02}\ 00\ 00\ 00)_{16}$	7	$(\mathbf{40}\ 00\ 00\ 00)_{16}$
3	$(\mathbf{03}\ 00\ 00\ 00)_{16}$	8	$(\mathbf{80}\ 00\ 00\ 00)_{16}$
4	$(\mathbf{08}\ 000000)_{16}$	9	$(\mathbf{1B}\ 00\ 00\ 00)_{16}$
5	$(\mathbf{10}\ 000000)_{16}$	10	$(\mathbf{36}\ 00\ 00\ 00)_{16}$

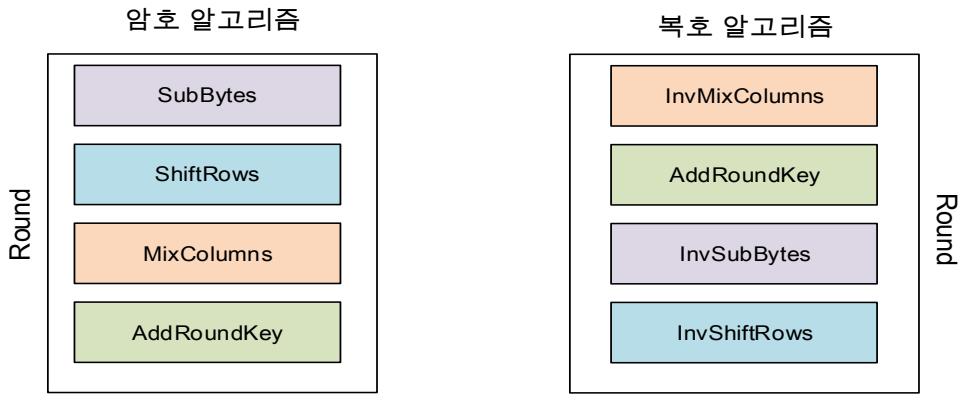
보충

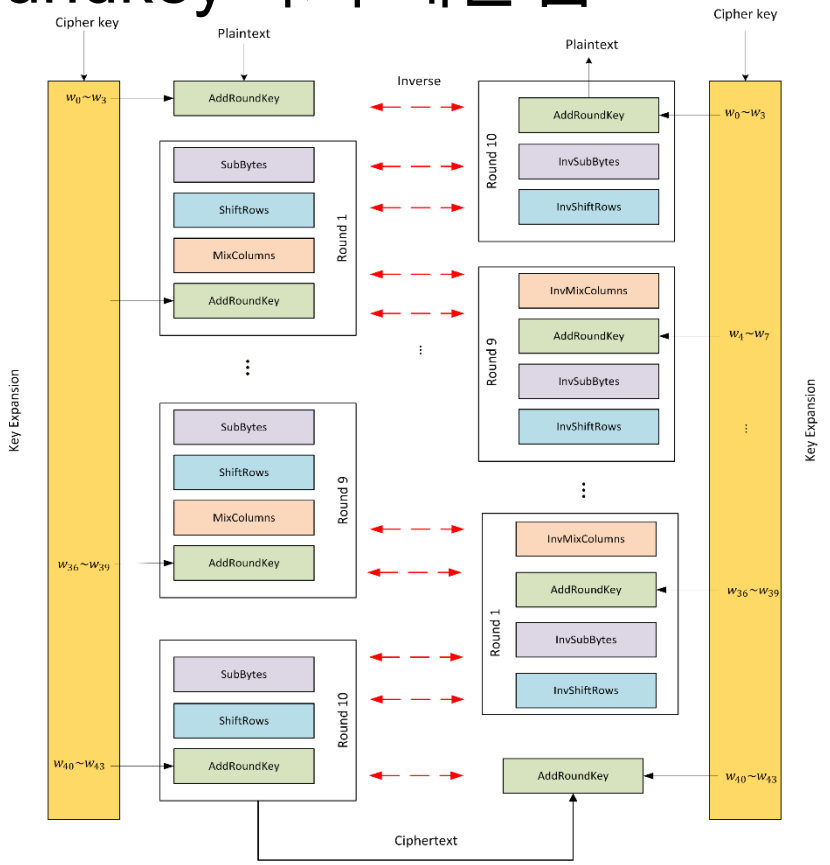
- AES 암호화 과정
  - (3단계)라운드 수행
    - 초기 라운드
      - AddRoundKey
    - 일반 라운드
      - SubBytes
      - ShiftRows
      - MixColumns
      - AddRoundKey
    - 최종 라운드
      - SubBytes
      - ShiftRows
      - AddRoundKey



보충

- AES 복호화 과정
  - 라운드 키는 암호화와 반대로 역순으로 사용함
  - 암호화의 마지막 라운드 키로 AddRoundkey를 수행함
    - 암호화의 마지막 단계가 AddRoundkey이기 때문임
  - 이후 중간 라운드에서는 아래 그림과 같은 순서로 수행함



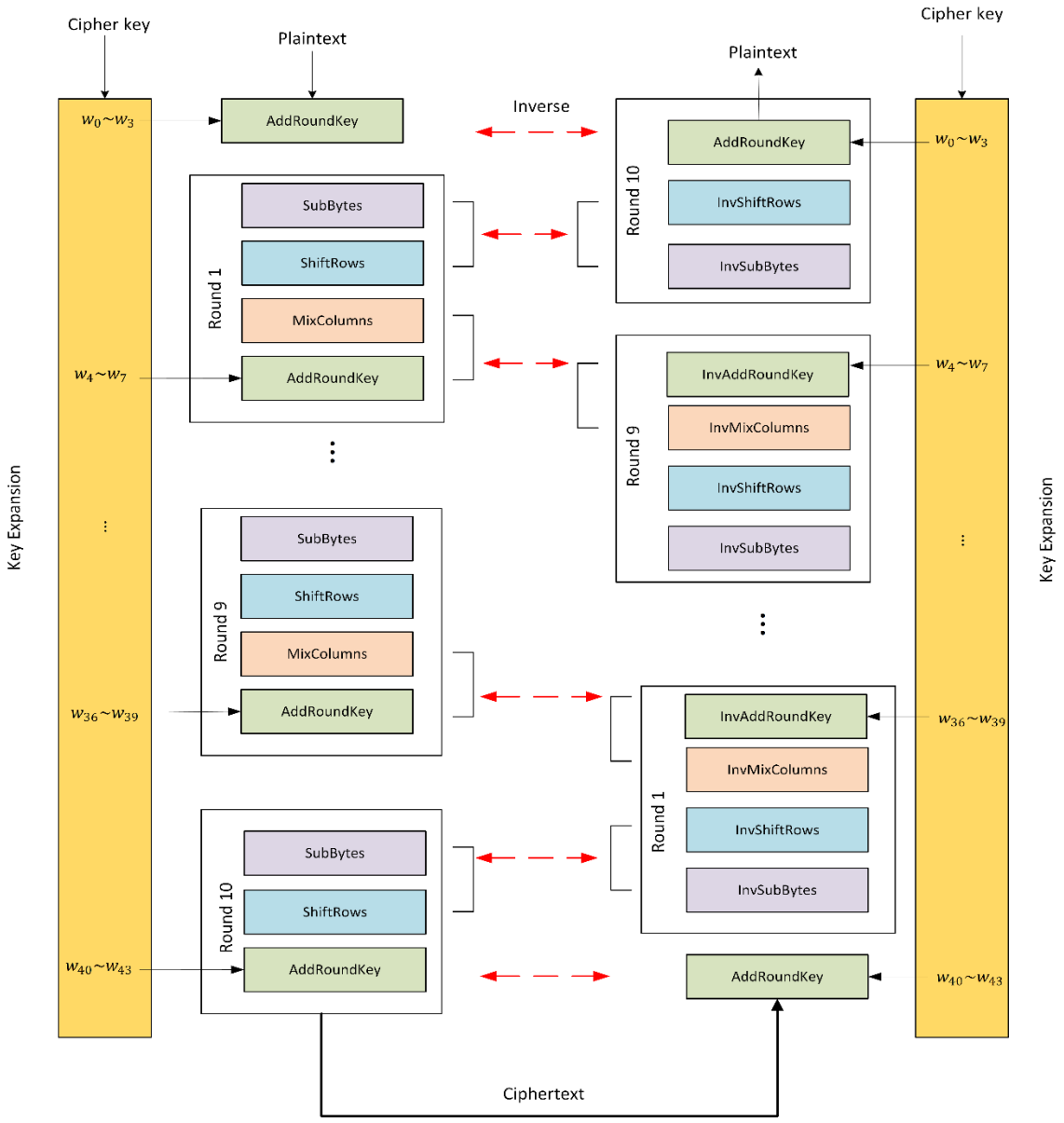


보충

- AES 구조
  - 대체 설계 버전
    - 복호화 과정을 암호화 과정과 유사한 구조로 표현하기 위한 구현 방식임
    - 보안성 향상 목적이 아니라, 암호화/복호화 구조를 통일하고 구현을 효율적으로 하기 위해 사용함
      - 원래 버전
        - 암호화: $SubBytes \rightarrow ShiftRows \rightarrow MixColumns \rightarrow AddRoundKey$
          복호화: $AddRoundKey \rightarrow InvMixColumns \rightarrow InvShiftRows \rightarrow InvSubBytes$
      - 대체 설계 버전
        - 암호화: 원래 버전과 동일함
        - 복호화:
          $InvSubBytes \rightarrow InvShiftRows \rightarrow InvMixColumns \rightarrow InvAddRoundKey$

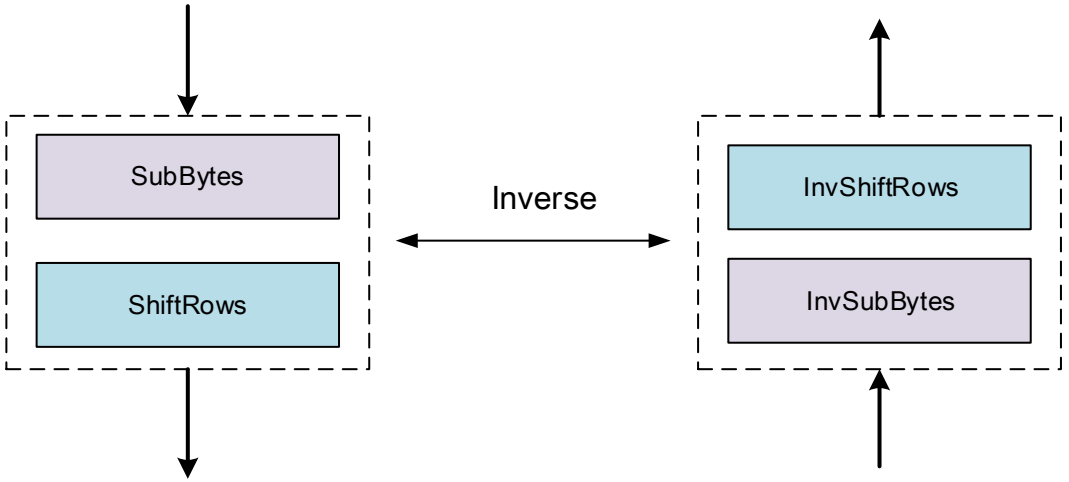
보충

- AES 구조
  - 대체 설계 버전



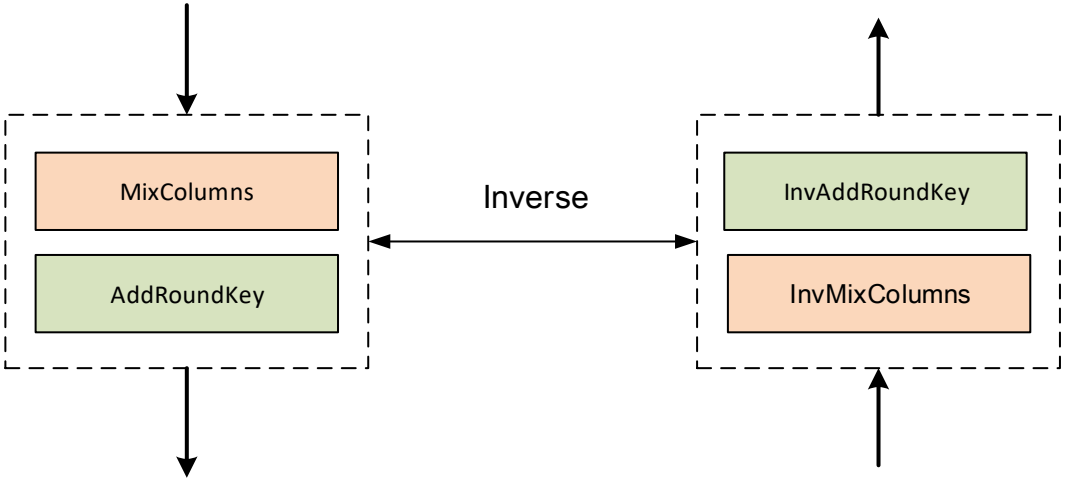
보충

- AES 구조
  - 대체 설계 버전
    - SubBytes와 ShiftRow
      - SubBytes는 바이트의 순서를 변경하지 않고 각 바이트의 값을 변경함
      - ShiftRows에서 바이트 값을 변경하지 않고 순서만 변경함
      - 서로 독립적이기 때문에 변경 가능함



보충

- AES 구조
  - 대체 설계 버전
    - MixColumns과 AddRoundKey
      - MixColumns와 AddRoundKey에서 사용된 상수 행렬의 역행렬을 키 행렬에 곱한다면, 서로 역함수 관계가 되는데 이렇게 생성된 새로운 변환을 InvAddRoundKey라고 함
      - MixColumns가 선형 변환이므로, 라운드 키에도 InvMixColumns를 적용하면 두 연산의 순서를 바꿔 표현할 수 있음



보충

- AES 보안성 (1/2)
  1. 큰 키 공간(128, 192, 256 비트)
     - 현재 컴퓨터 성능 기준으로, 128/192/256비트 키 모두 전수조사 공격이 어려움
  2. 키 확장 과정의 혼돈과 확산
     - SubWord의 S-Box 연산으로 라운드 키 생성 과정에 혼돈을 부여함
     - RotWord는 바이트 위치를 순환 이동시켜 키 바이트가 서로 다른 위치로 전달되도록 하여 확산을 제공함
     - Rcon은 라운드마다 다른 고정 상수를 적용하여 라운드 키 간의 반복 패턴과 대칭성을 방지함
     - 이를 통해 라운드 키 간의 관계 분석을 어렵게 만들어 보안성을 높임

보충

- AES 보안성 (2/2)

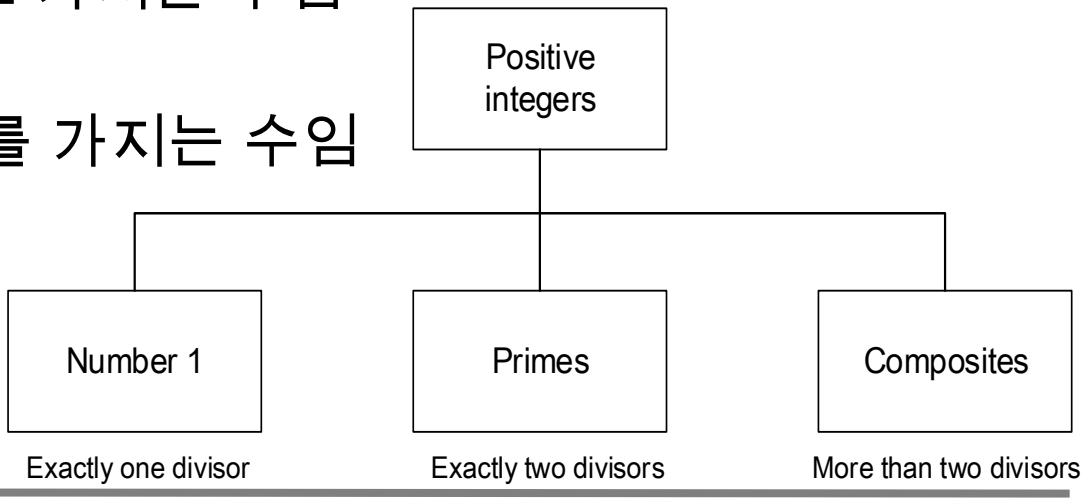
3. 라운드 함수의 혼돈과 확산
   - SubBytes는 평문, 키, 암호문 사이의 관계를 비선형적으로 만들어 혼돈을 제공함
   - ShiftRows와 MixColumns를 통해 한 바이트의 변화가 여러 바이트로 퍼지도록 하여 확산을 제공함
   - 이를 통해 입력의 작은 변화가 암호문 전체에 영향을 미치게 하여 평문과 암호문 간의 관계 분석을 어렵게 만듦

목 차

- 보충
- 기초 개념
- 소수
- 소수 판정
- 소인수분해

기초 개념

- 양의 정수
  - 정의
    - 0보다 큰 정수이며, 자연수와 같은 의미로 사용됨
  - 분류
    - 1
      - 소수도 합성수도 아님
    - 소수
      - 1과 자기 자신만을 약수로 가지는 수임
    - 합성수
      - 1과 자기 자신 외의 약수를 가지는 수임



기초 개념

- 서로 소(Relatively Prime, Coprime)
  - 정의
    - 두 정수의 최대공약수가 1인 관계임
  - 특징
    - 1 이외의 공통 약수를 가지지 않음
    - p가 소수라면 1부터 $p-1$까지의 모든 정수는 p와 서로 소가 됨
      - e.g ., $p = 7$ 이면 1, 2, 3, 4, 5, 6은 모두 7과 서로 소

목 차

- 보충
- 기초 개념
- 소수
- 소수 판정
- 소인수분해

소수

- 집합의 크기
  - 무한히 많은 소수
    - 증명
      - 소수의 개수가 유한개라고 가정
      - 가장 큰 소수를 p라고 둠
      - 유한개의 소수를 모두 곱한 수를 $P = 2 \times 3 \times \cdots \times p$임
      - P는 모든 소수로 나누어떨어지지만, $P + 1$은 기존 소수들로 나누면 항상 나머지가 1임 그러므로 $P + 1$은 새로운 소수를 가지거나, 자기 자신이 새로운 소수임
      - 가장 큰 소수 p가 있다는 가정과 모순되므로, 소수의 개수는 무한함

*p:가장 큰 소수
*P:유한개의 소수를 모두 곱한 수
*q: p보다 작거나 같은 소수

소수

- 집합의 크기
  - 예제 9.3

소수 전체 집합이 {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17}이라고 가정하자.

1. 위 소수들을 모두 곱한 수 P를 구하시오.
2. $P + 1$을 계산하시오.
3. $P + 1$의 소인수분해 결과를 통해, 17보다 큰 소수가 존재함을 보이시오.

  - 풀이
    1. $P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 = 510510$
    2. $P + 1 = 510511$
    3. $510511 = 19 \times 97 \times 277$ 로 표현됨
       - 17보다 큰 소수가 3개 존재함

소수

- 집합의 크기
  - 소수의 개수
    - 함수 $\pi(n)$은 n보다 작거나 같은 소수의 개수를 나타냄
      - $\pi(1) = 0,\ \pi(2) = 1, \pi(3) = 2, \pi(10) = 4, \pi(20) = 8$
    - n의 값이 커지게 된다면 근사 값으로 구할 수 있음
      - $\left[\frac{n}{(\ln n)}\right] < \pi(n) < \left[\frac{n}{(\ln n - 1.08366)}\right]$

소수

- 집합의 크기
  - 소수의 개수
    - 예제 9.4

1,000,000보다 작은 소수의 개수를 구하시오.

- 풀이
  - $\left\lceil \frac{n}{(\ln n)} \right\rceil < \pi(n) < \left\lceil \frac{n}{(\ln n - 1.08366)} \right\rceil$ 이 범위에 들어오는 소수의 개수는 72,383에서 78,543개 사이의 수임
  - 실제 1,000,000보다 작은 소수 개수는 78,498개임

소수

- 판정
  - 방법
    - 나눔 검증
      - 주어진 수 n이 $\sqrt{n}$보다 작은 소수로 나누어지는지 확인하는 방법
        - 하나라도 나누어지면 합성수, 아무것도 나누어지지 않으면 소수
    - 에라토스테네스의 체
      - 일정 범위 안의 소수를 한 번에 찾는 방법
  - 필요성
    - 공개키 암호를 만들 때 큰 소수를 사용하기 위함
      - 큰 소수를 사용하여 소인수분해를 어렵게 만들고, 암호의 안전성을 확보하기 위함

소수

- 판정
  - 나눔 검증
    - 예제 9.5

수 97은 소수인가?

      - 풀이
        - $9 < \sqrt{97} < 10$이므로 $\sqrt{97}$보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7임
        - 2, 3, 5, 7은 97을 나누지 못하므로 97은 소수임
    - 예제 9.6

수 301은 소수인가?

      - 풀이
        - $17 < \sqrt{301} < 18$이므로 $\sqrt{301}$보다 작은 소수는 2,3,5,7,11,13,17임
        - 2, 3, 5, 11, 13, 17은 301을 나누지 못하지만 7은 301을 나누므로 301은 소수가 아님

소수

- 판정
  - 에라토스테네스의 체(Sieve of Eratosthenes)
    - 예제 9.7

100보다 작은 모든 소수를 구하시오

1. 2부터 100까지 모든 수를 씀
2. $\sqrt{100} = 10$이므로 10보다 작은 소수 2, 3, 5, 7로 나누어지는 수는 아래 표에서 모두 지우고 2, 3, 5, 7은 남겨둠
3. 지워지지 않고 남아있는 수가 소수임

<에라토스테네스의 체를 적용한 표>

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

소수

- 생성
  - 메르센 소수(Mersenne Prime)
    - 정의
      - 메르센 수(Mersenne number) $M_n = 2^n - 1$ 중에서 소수인 수

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$
$M_3 = 2^3 - 1 = 7$
$M_5 = 2^5 - 1 = 31$
$M_7 = 2^7 - 1 = 127$
$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$(이 수는 소수가 아님. $2047 = 23 \times 89$)
$M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$
$M_{17} = 2^{17} - 1 = 131071$

소수

- 생성
  - 페르마 소수(Fermat Prime)
    - 정의
      - 페르마 수(Fermat Number) $F_n = 2^{2^n} + 1$ 중에서 소수인 수

$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$
$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$
$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$
$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$
$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$
$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ (이 수는 소수가 아님)

소수

- 오일러 함수 φ (Euler's Phi-function)
  - 정의
    - 1부터 n까지의 정수 중 n과 서로소인 양의 정수의 개수를 구하는 함수
  - 성질
    - $\varphi(1) = 1$
    - $\varphi(p) = p - 1, p$는 소수일 때
      - e.g., $\varphi(13) = 13 - 1 = 12$
    - $\varphi(m \times n) = \varphi(m) \times \varphi(n), m$과 n이 서로 소일 때
      - e.g., $\varphi(10) = \varphi(2) \times \varphi(5) = (2-1) \times (5-1) = 1 \times 4 = 4$
    - $\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1},\ p$는 소수일 때
      - e.g., $\varphi(240) = \varphi(2^4) \times \varphi(3) \times \varphi(5) = (2^4 - 2^3) \times (3-1) \times (5-1) = 64$

소수

- 오일러 함수 φ (Euler's Phi-function)
  - 활용
    - 만약 n의 소인수분해꼴이 ${p_1}^{e_1} \times {p_2}^{e_2} \times \cdots \times {p_k}^{e_k}$ 의 경우

$\varphi(n) = \left({p_1}^{e_1} - {p_1}^{e_1-1}\right) \times \left({p_2}^{e_2} - {p_2}^{e_2-1}\right) \quad \times \cdots \quad \times \left({p_k}^{e_k} - {p_k}^{e_k-1}\right)$ 로 $\varphi(n)$ 값을 구할 수 있음

- e.g ., $n = 60 \quad 60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

$$\varphi(60) = (2^2 - 2^{2-1})(3^1 - 3^{1-1})(5^1 - 5^{1-1})$$
$$= (4-2)(3-1)(5-1) = 2 \times 2 \times 4 = 16$$

소수

- 오일러 함수 φ (Euler's Phi-function)
  - 예제 9.11

> 집합 $Z_{14}{}^{*}$에 속하는 원소의 개수는 몇 개인가?

    - 풀이
      - $\varphi(14) = \varphi(7) \times \varphi(2) = 6 \times 1 = 6$임
      - 실제 이 집합의 원소는 1, 3, 5, 9, 11, 13으로 총 6개임

소수

- 페르마의 리틀 정리(Fermat's Little Theorem)
  - 필요성
    - RSA는 암호화와 복호화 과정에서 모듈러 거듭제곱 연산을 사용하므로 소수 모듈러에서 큰 거듭제곱의 나머지를 효율적으로 계산하는 데 필요함
  - 정의
    - 첫 번째 버전
      - 만약 p가 소수이고 a가 하나의 어떤 정수로서 p는 a를 나누지 못한다면 $a^{p-1} \equiv 1 \, mod \, p$가 성립함
    - 두 번째 버전
      - 만약p가 소수이고 a가 정수라면, $a^p \equiv a \, mod \, p$가 성립됨

소수

- 페르마의 리틀 정리(Fermat's Little Theorem)
  - 첫 번째 버전
    - 예제 9.12

$6^{10}\ mod\ 11$을 계산하시오.

- 풀이
  - 첫 번째 버전 $a^{p-1} \equiv 1\ mod\ p$
  - $a = 6,\ p = 11$
    $6^{p-1} = 6^{10} \equiv 1\ mod\ 11$
    $6^{10}\ mod\ 11 = 1$임

소수

- 페르마의 리틀 정리(Fermat's Little Theorem)
  - 두 번째 버전
    - 예제 9.13

$3^{12}\ mod\ 11$을 계산하시오.

- 풀이
  - 두 번째 버전 $a^p \equiv a\ mod\ p$
  - $p = 11, a = 3$
    - $3^{11} \equiv 3 \bmod 11$
  - $3^{12}\ mod\ 11 = (3^{11} \times 3)\ mod\ 11 = (3^{11}\ mod\ 11)(3\ mod\ 11)$ $= (3 \times 3)\ mod\ 11 = 9$

소수

- 페르마의 리틀 정리(Fermat's Little Theorem)
  - 곱에 대한 역원
    - 페르마 정리를 응용하면 모듈로 값이 소수일 경우 곱에 관한 역원을 구할 수 있음
      - 가정
        - 만약 p가 소수이고 a가 정수로서 p로 나누어지지 않는 수임

$$a^{-1} \, mod \, p = a^{p-2} \, mod \, p$$

        - e.g ., $p = 7, a = 3 \; \gcd(3, 7) = 1$
          $3^{-1} \equiv 3^{7-2} \, mod \, 7 \quad 3^5 = 243 \quad 243 \equiv 5 \, mod \, 7 \quad 3^{-1} \equiv 5 \, mod \, 7$
      - 증명

$$a \times a^{-1} \, mod \, p = a \times a^{p-2} \, mod \, p = a^{p-1} \, mod \, p = 1 \, mod \, p$$

        - e.g ., $3 \times 3^{-1} \, mod \, 7 \; = 3 \times 3^{7-2} \, mod \, 7 = 3^6 \, mod \, 7 = 729 \, mod \, 7 = 1 \, mod \, 7$

소수

- 페르마의 리틀 정리(Fermat's Little Theorem)
  - 예제 9.14

    모듈로 값이 소수일 때 곱에 관한 역원을 계산하시오.

    - 풀이

      a. $8^{-1}\ mod\ 17 = 8^{17-2} mod\ 17 = 8^{15} mod\ 17 = 15\ mod\ 17$

      - $8^{15} = 8^8 \times 8^4 \times 8^2 \times 8^1 \equiv 1 \times 16 \times 13 \times 8 \equiv 15\ mod\ 17$

        $8^2 = 64 \equiv 13\ mod\ 17$

        $8^4 = 13^2 = 169\ \equiv 16\ mod\ 17$

        $8^8 \equiv 16^2 = 256\ \equiv 1\ mod\ 17$

      b. $60^{-1} mod\ 101 = 60^{101-2}\ 101 = 60^{99} mod\ 101 = 32\ mod\ 101$

      - $60^{99} = 60^{64} \times 60^{32} \times 60^2 \times 60^1 \equiv 84 \times 36 \times 65 \times 60 \equiv 32\ mod\ 101$

        ⋮

      - $60^{64} \equiv 36^2 = 1296 \equiv 84\ mod\ 101$

    - 실제 역원 계산은 확장 유클리드 알고리즘이 더 효율적임

소수

- 오일러 정리(Euler's Theorem)
  - 필요성
    - RSA에서는 $n = p \times q$처럼 두 소수의 곱인 합성수를 사용하기 때문에 합성수 모듈러에서 성립하는 오일러 정리가 필요함
  - 정의
    - 첫 번째 버전
      - a와 p가 서로소라면, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \; mod \; n \; (\gcd(a, n) = 1)$
        - e.g ., $6^{24} \; mod \; 35 = 6^{\varphi(35)} \; mod \; 35 = 1$
    - 두 번째 버전
      - $a^{k \times \varphi(n)+1} \equiv a \; (mod \; n) \; (n = p \times q, a < n, k \; \epsilon \; \mathrm{Z})$
        - e.g ., $20^{62} \; mod \; 77$을 구할 때 $k = 1$이라고 한다면

          $n = 77, \; a = 20$

          $\varphi(77) = \varphi(7) \times \varphi(11) = 6 \times 10 = 60$

          $20^{62} \; mod \; 77 = (20 \; mod 77) \; (20^{60+1} \; mod 77) = (20)(20) \; mod \; 77 = 15$

소수

- 오일러 정리(Euler's Theorem)
  - 첫 번째 버전 증명 (1/2)
    - n과 서로소인 수들의 집합을 S라 둠
      - $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_{\varphi(n)}\}$
    - 각 원소에 a를 곱한 집합을 aS라 둠
      - $aS = \{as_1, as_2, \cdots, as_{\varphi(n)}\}$
        - e.g ., $3S = \{3 \times 1, 3 \times 3, 3 \times 7, 3 \times 9\} = \{3, 9, 21, 27\}$
    - a와 n이 서로소 이므로, aS의 원소들도 n과 서로소임
    - aS의 원소들을 n으로 나눈 나머지는 서로 중복되지 않음
      - e.g ., 각각 10으로 나눈 나머지
        $3\ mod\ 10 = 3, 9\ mod\ 10 = 9,\ 21\ mod\ 10 = 1,\ 27\ mod\ 10 = 7$
    - 따라서 aS는 S와 같은 원소들을 순서만 바꾼 집합임
      - e.g ., 나머지 집합은 $\{3, 9, 1, 7\}$ S와 원소는 같고 순서만 다름

소수

- 오일러 정리(Euler's Theorem)
  - 첫 번째 버전 증명 (2/2)
    - 두 집합의 모든 원소를 곱하면
      - $(as_1)(as_2)\cdots(as_{\varphi(n)}) \equiv s_1 s_2 \cdots s_{\varphi(n)} \; mod \; n$
        - e.g ., $(3 \times 1)(3 \times 3)(3 \times 7)(3 \times 9) \equiv 1 \times 3 \times 7 \times 9 \; mod \; 10$
    - 왼쪽을 정리하면
      - $a^{\varphi(n)} s_1 s_2, \cdots, s_{\varphi(n)} \equiv s_1 s_2, \cdots, s_{\varphi(n)} \; mod \; n$
    - $s_1 s_2, \cdots, s_{\varphi(n)}$ 는 n과 서로소이므로 약분 가능함
      - $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \; mod \; n$
        - e.g ., $1 \times 3 \times 7 \times 9 = 189, \; \gcd(189, 10) = 1$
    - 따라서 오일러 정리가 성립함
      - e.g ., $34 = 81 \equiv 1 \; mod \; 10$

소수

- 오일러 정리(Euler's Theorem)
  - 두 번째 버전 증명 (1/3)
    - 경우 1
      - a가 p와 q의 배수가 아닌 경우, $gcd(a, n) = 1$

$$a^{k\times\varphi(n)+1}\ mod\ n = \left(a^{\varphi(n)}\right)^{k} \times a\ mod\ n\ =\ 1^{k} \times a\ mod\ n\ = a\ mod\ n$$

      - e.g ., $n = 15 = 3 \times 5,\ \varphi(15) = 8, k = 1, a = 2$
        $2^{1\times 8+1} \equiv (2^{8})^{1} \times 2\ mod\ 15$
        $2^{8} = 256 \equiv 1\ mod\ 15$ 따라서 $2^{9} \equiv 1^{1} \times 2\ \equiv 2\ mod\ 15$
        따라서 $a^{k\times\varphi(n)+1} \equiv a\ mod\ n$ 이 성립함

소수

- 오일러 정리(Euler's Theorem)
  - 두 번째 버전 증명 (2/3)
    - 경우 2
      - a가 p의 배수 가 되어 $a = i \times p$이지만 q의 배수는 아니라고 함

$$a^{\varphi(n)} \bmod q = \left(a^{\varphi(q)} \bmod q\right)^{\varphi(p)} \bmod q = 1 \rightarrow a^{\varphi(n)} \bmod q = 1$$
$$a^{k\times\varphi(n)} \bmod q = \left(a^{\varphi(n)} \bmod q\right)^{k} \bmod q = 1 \rightarrow a^{k\times\varphi(n)} \bmod q = 1$$
$$a^{k\times\varphi(n)} \bmod q \; 1 \rightarrow a^{k\times\varphi(n)} = 1 + j \times q$$
$$a^{k\times\varphi(n)+1} = a \times (1 + j \times q) = a + j + q \times a = a + (i \times j) \times q \times p = a + (i \times j) \times n$$
$$a^{k\times\varphi(n)+1} = a + (i \times j) \times n \rightarrow a^{k\times\varphi(n)+1} = a \bmod n$$

- e.g .,$k = 1$ $n = 77 = 7 \times 11$이고, $a = 14$라고 할 때 a와 11은 서로소이므로, 오일러 정리 적용가능함 $14^{\varphi(11)} \equiv 1 \bmod 11$
  $\varphi(11)$은 10 이므로, $14^{10} \bmod 11$에서 1과 같음
  $n = 77 = 7 \times 11$일 때 $\varphi(77) = 60$ 따라서 $14^{60} \equiv 1 \bmod 11$
  여기서 $a = 14$를 한번 더 곱하면 $14^{61} \equiv 14 \bmod 11$
  14는 7의 배수이므로, 14^{61}과 14는 둘 다 $\bmod 7$에서 0임
  14^{61}과 14는 $\bmod 7$에서도 같고, $\bmod 11$에서도 같음

소수

- 오일러 정리(Euler's Theorem)
  - 두 번째 버전 증명 (3/3)
    - 경우 3
      - 만약 a가 q의배수로서 $a = i \times q$이지만 p의 배수는 아니라고 함
        - 증명은 2의 경우와 동일함(위 증명에서 p와 q의 역할만 바뀜)

목 차

- 보충
- 기초 개념
- 소수
- 소수 판정
- 소인수분해

소수 판정

- 개요
  - 큰 정수가 주어졌을 때 이 수가 소수인지 합성수인지 정확하고 효율적인 판단 방법
- 종류
  - 결정적 알고리즘(Deterministic algorithm)
  - 확률적 알고리즘(Probabilistic algorithm)

소수 판정

- 결정적 알고리즘 (Deterministic algorithm)
  - 정의
    - 주어진 정수 n에 대해 정해진 절차로 소수 여부를 판별하는 알고리즘임
  - 종류
    - 나눔 알고리즘
    - AKS 알고리즘

소수 판정

- 결정적 알고리즘 (Deterministic algorithm)
  - 나눔 알고리즘
    - 정의
      - 2부터 $\sqrt{n}$보다 작은 수까지 차례로 나누어, n의 약수가 존재하는지 확인하는 소수 판정 알고리즘임
    - 의사 코드

```
Divisibility_Test (n)        //n 에 대해서 소수 검증을 한다.
{
  r ← 2
  while(r < √n)
  {
   if(r | n) return "a composite"
   r ← r + 1
  }
  return "a prime"
}
```

소수 판정

- 결정적 알고리즘 (Deterministic algorithm)
  - 나눔 알고리즘
    - 비트-연산 복잡도
      - $f(n_b) = \sqrt{2^{n_b}} = 2^{n_b/2}$
        - n_b는 n을 2진수로 변경하였을 때 비트 수임
        - Big-O 기호를 사용하여 표현하면 시간 복잡도 $O(2^{n_b})$임
          - 나눔 알고리즘은 n_b가 커지면 실용적이지 못함

소수 판정

- 결정적 알고리즘 (Deterministic algorithm)
  - 나눔 알고리즘
    - 예제 9.18

n의 비트 수가 200이라고 가정하자. 나눔 알고리즘을 수행한다고 한다면 비트 연산 회수는 얼마나 되는가?

- 풀이
  - 비트-연산 복잡도는$2^{n_b/2}$으로 2^{100}번의 비트 연산을 수행해야 함
  - 초당 2^{30}번의 비트 연산을 수행할 수 있는 컴퓨터를 사용하는 경우, 이 알고리즘을 이용해서 소수 검증을 수행하는데 2^{70}초가 걸림
    - 2^{70}초는 거의 영원한 시간이므로 비효율적임

소수 판정

- 결정적 알고리즘 (Deterministic algorithm)
  - AKS 알고리즘(Agrawal-Kayal-Saxena algorithm)
    - 정의
      - 다항식 합동식을 이용해 소수 여부를 판정하는 결정적 소수 판정 알고리즘
    - 동작 과정
      1. $(x-a)^n \equiv (x^n - a)\ mod\ n$ 성립 여부를 확인함
      2. 성립하면 소수 조건을 만족하고, 성립하지 않으면 합성수로 판정함
         - e.g ., $n = 5, a = 1$
           $(x-1)^5$ 을 전개하면 $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$임
           중간 계수들$(-5, 10, -10, 5)$ 모두 5로 나누어 떨어져 중간항 사라짐
           $(x-1)^5 \equiv x^5 - 1(mod\ 5)$ 이므로 성립함

소수 판정

- 결정적 알고리즘 (Deterministic algorithm)
  - AKS 알고리즘(Agrawal-Kayal-Saxena algorithm)
    - 알고리즘 복잡도
      - $O((\log_2 n_b)^{12})$인 다항식 비트-연산 시간을 가짐
    - 예제 9.19

n의 비트 수가 200이라고 가정하자. AKS 알고리즘을 수행한다고 한다면 비트 연산 회수는 얼마나 되는가?

      - 풀이
        - 이 알고리즘의 비트-연산 복잡도는 $(\log_2 n_b)^{12}$으로 $(\log_2 200)^{12} = 39{,}547{,}615{,}483$번의 비트 연산을 수행하는 경우, 이 수가 소수인지 아닌지를 알아낼 수 있음

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 정의
    - 확률적 알고리즘은 임의로 선택한 밑수나 난수를 이용해 주어진 수가 소수인지 합성수인지 판정하는 알고리즘임
  - 종류
    - 페르마 검증(Fermat Primality Test)
    - 제곱근 검증(Square Root Primality Test)
    - 밀러-라빈 검증 (Miller-Rabin Primality Test)

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 규칙
    - 만약 검증하려는 정수가 실제로 소수라면, 이 알고리즘은 반드시 소수라고 판정함
    - 만약 검증하려는 정수가 실제로 합성수인 경우, 이 알고리즘은 이 수를 합성수라고 판정할 확률이 $1 - \varepsilon$이고, 소수라고 판정할 확률이 ε이 됨
      - 여기서 ε은 한 번 검증했을 때 합성수를 소수로 잘못 판단할 확률임
      - 이 알고리즘을 m번 수행한다면, 실수할 확률은 ε^m으로 줄어듦

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 페르마 검증
    - 정의
      - 페르마의 리틀 정리 (n이 소수면 $a^{n-1} \equiv 1 \, mod \, n$)를 이용해 소수 여부를 확률적으로 판정하는 알고리즘
    - 성질

> 만약 n이 소수라면, $a^{n-1} \equiv 1 \, mod \, n$임
> 만약 n이 합성수라면, $a^{n-1} \equiv 1 \, mod \, n$일 수도 있음

      - 소수는 페르마 검증을 해보면 소수로 판정되지만 합성수가 소수라고 판정 날 확률이 ε임
      - 여러 가지의 밑수를 사용해서 검증하면 오류 확률을 더 작게 줄일 수 있음

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 페르마 검증
    - 예제 9.20

수 561을 페르마 검증하면 어떻게 되는가?

- 풀이
  - 2를 밑수로 사용할 경우 $2^{561-1} \equiv 1 \, mod \, 561$을 만족하므로 페르마 검증을 통과함
  - 3을 밑수로 사용할 경우 $3^{561-1} \equiv \ 375 \, mod \, 561$이므로 $1 \, mod \, 561$을 만족하지 않아서 페르마 검증을 통과하지 못함
  - 5를 밑수로 사용할 경우 $5^{561-1} \equiv 1 \, mod \, 561$을 만족하므로 페르마 검증을 통과함
  - 7을 밑수로 사용할 경우 $7^{561-1} \equiv 1 \, mod \, 561$을 만족하므로 페르마 검증을 통과함

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 제곱근 검증
    - 정의
      - 모듈로 계산에서 1의 제곱근이 ± 1인지 확인하는 소수 판정 알고리즘
    - 성질

      만약 n이 소수라면, $\sqrt{1} \bmod n = \pm 1$
      만약 n이 합성수라면, $\sqrt{1} \bmod n = \pm 1$이며 다른 값들을 가질 수도 있다
    - 특징
      - 합성수 판정에 활용 가능함
      - 모듈로 연산에서 -1이 의미하는 것은 $n-1$이라는 것에 유의
        - e.g., $-1 \equiv 4 \bmod 5$

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 제곱근 검증
    - 예제 9.21

n이 7(소수)이라면 모듈로 n으로 1의 제곱근은 무엇인가?

- 풀이
  - $1^2 = 1 \; mod \; 7$ $\quad (-1)^2 = 1 \; mod \; 7$
    $2^2 = 4 \; mod \; 7$ $\quad (-2)^2 = 4 \; mod \; 7$
    $3^2 = 2 \; mod \; 7$ $\quad (-3)^2 = 2 \; mod \; 7$
    $4^2 = 2 \; mod \; 7$ $\quad (-4)^2 = 2 \; mod \; 7$
    $5^2 = 4 \; mod \; 7$ $\quad (-5)^2 = 4 \; mod \; 7$
    $6^2 = 1 \; mod \; 7$ $\quad (-6)^2 = 1 \; mod \; 7$
  - 1과 $6(= n - 1)$을 제외한 수들을 제곱하여 모듈로 연산을 하면 1이 나오는 값이 존재하지 않음 그러므로 7은 소수일 가능성이 높음

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 제곱근 검증
    - 예제 9.22

n이 8이라면 모듈로 n으로 1의 제곱근은 무엇인가?

- 풀이
  - $1^2 = 1\ mod\ 8$ $\quad (-1)^2 = 1\ mod\ 8$
    $3^2 = 1\ mod\ 8$ $\quad 5^2 = 1\ mod\ 8$
  - 근을 4개 가짐 그 근은 $1, 3, 5, 7$(이것이 -1임)

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 제곱근 검증
    - 예제 9.23

n이 17이라면 모듈로 n으로 1의 제곱근은 무엇인가?

- 풀이
  - $1^2 = 1 \; mod \; 17$ $\quad (-1)^2 = 1 \; mod \; 17$
    $2^2 = 4 \; mod \; 17$ $\quad (-2)^2 = 4 \; mod \; 17$
    $3^2 = 9 \; mod \; 17$ $\quad (-3)^2 = 9 \; mod \; 17$
    $4^2 = 16 \; mod \; 17$ $\quad (-4)^2 = 16 \; mod \; 17$
    $5^2 = 8 \; mod \; 17$ $\quad (-5)^2 = 8 \; mod \; 17$
    $6^2 = 2 \; mod \; 17$ $\quad (-6)^2 = 2 \; mod \; 17$
    $7^2 = 15 \; mod \; 17$ $\quad (-7)^2 = 15 \; mod \; 17$
    $8^2 = 13 \; mod \; 17$ $\quad (-8)^2 = 13 \; mod \; 17$
    $9^2 = 13 \; mod \; 17, \cdots$ 로 앞의 값들과 중복됨
  - $mod \; 17$에서 1의 제곱근은 1과 $-1(16)$ 2개의 근을 가짐

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 밀러-라빈 검증(Miller-Rabin Primality Test)
    - 정의
      - 페르마 검증과 제곱근 검증을 결합한 확률적 소수 판정 방법

$n-1 = m \times 2^k$로 분해하면 단계적으로 계산할 수 있음

- e.g ., $n = 21$, 밑수 $a = 2$
  $20 = 5 \times 2^2$이므로 $m = 5, k = 2$임
- 밑수 a를 사용한 페르마 검증은 다음과 같이 나타냄

$$a^{n-1} = a^{m \times 2^k} = (a^m)^{\underbrace{2^{\cdots 2}}_{\text{K times}}}$$

- $a^{n-1} \, mod \, n$을 계산할 때 1단계로 하는 대신 $k+1$단계로 할 수 있음
  - 각 단계에서 제곱근 검증을 할 수 있어서 유리함
  - e.g ., $2^5 \, mod \, 21 = 32 \, mod \, 21 = 11$
    $11^2 = 121 \; 121 \, mod \, 21 = 16 \; 16^2 = 256 \; 256 \, mod \, 21 = 4 \cdots, 2^{20} mod \, 21 = 4$
    최종 값이 1이 아니므로 21은 합성수임

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 밀러-라빈 검증(Miller-Rabin Primality Test)
    - 초기화 단계
      - 밑수 a를 선택하고 $T = a^m \ mod \ n$을 구함(여기서 $m = (n-1)/2^k$)
        a. 만약 T가 $+1$이거나 -1이라면 n은 해당 밑수 a에 대한 검증을 통과함
           - 페르마 검증과 제곱근 검증 2가지를 통과했다고 간주함
           - 소수로 확정된 것은 아니며 실제 합성수라면 강한 의사소수라고 함

        b. 만약 T가 그 외의 값을 가진다면 n이 소수인지 합성수인지 판단할 수 없기에 다음 단계로 넘어가게 됨

*T:현재 검사 중인 중간 값
*강한 의사소수:실제로는 합성수이지만 밀러-라빈 검증을 통과한 수

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 밀러-라빈 검증(Miller-Rabin Primality Test)
    - T를 제곱하는 단계(1 단계)
      a. 만약 제곱한 결과가 $+1$이라면, n을 합성수로 판단함
         - 소수라면 $x^2 \equiv 1 \ mod\, n$의 해는 $x \equiv 1$또는 $x \equiv -1$뿐이어야 함 하지만 합성수에서는 $1, -1$이 아닌 값도 제곱하면 1이 될 수 있음
           - e.g ., $mod\ 15$을 보면
             $1^2 = 1 \equiv 1\ mod\ 15$ $(-1)^2 \equiv 14^2 = 196 \equiv 1\ mod\ 15$은 정상 제곱근임
             $4^2 = 16 \equiv 1\ mod\ 15$ $11^2 = 121 \equiv 1\ mod\ 15$도 제곱 결과가 1이 됨
             $4, 11$은 1도 아니고 -1도 아니므로 제곱근 검증을 통과하지 못함
      b. 만약 제곱한 결과가 -1이 된다면, 해당 밑수에 대한 밀러-라빈 검증을 통과함
         - 페르마 검증과 제곱근 검증 모두 통과하였기 때문임
           - e.g ., $mod\ 5$에서
             $2^2 = 4 \equiv -1\ mod\ 5$ 따라서 제곱 결과가 -1이므로 밑수 검증을 통과함
      c. 만약 제곱한 결과가 ± 1이 아닌 다른 값을 갖는 경우, n이 소수인지 아닌지 알 수 없으므로 다음 단계로 넘어감

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 밀러-라빈 검증(Miller-Rabin Primality Test)
    - 2단계에서 $k-1$단계
      - 해당 단계에서 부터 $k-1$까지는 모두 1단계와 같음
    - k단계
      - 이 단계는 결론에 이르지 못하면 더 이상 의미가 없음
      - 이 단계의 결과가 1이라면, 페르마 검증은 통과하지만 앞 단계의 결과가 ± 1이 아니었기 때문에 제곱근 검증은 통과하지 못함
        - $k-1$번째 단계 후까지 절차가 끝나지 않았다면 n을 합성수라고 함

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 밀러-라빈 검증(Miller-Rabin Primality Test)
    - 의사코드

Miller_Rabin_Test (n, a) //n은 수이고, a는 밑수이다.
{
  Find m and k such that $n - 1 \equiv m \times 2^k$
  $T \leftarrow a^m mod\ n$
  if ($T = \pm 1$) return "***a prime***"
    for ($i \leftarrow 1\ to\ k - 1$) // $k-1$은 최대 단계 수임
  {
    $T \leftarrow T^2\ mod\ n$
    if($T = +1$) return "***a composite***"
    if($T = -1$) return "***a prime***"
  }
  return "***a composite***"
}

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 밀러-라빈 검증(Miller-Rabin Primality Test)
    - 예제 9.25

수 561은 밀러-라빈 검증을 통과하는가?

- 풀이
  - 밑수 a를 2로 사용하면, $561 - 1 = 35 \times 2^4$로 표현되어 $m = 35, k = 4, a = 2$ 임
  - 초기화 $T = 2^{35} \; mod \; 561 = 263 \; mod \; 561$
  - $k = 1$: $T = 263^2 \; mod \; 561 = 166 \; mod \; 561$
  - $k = 2$: $T = 166^2 \; mod \; 561 = 67 \; mod \; 561$
  - $k = 3$: $T = 67^2 \; mod \; 561 = +1 \; mod \; 561 \rightarrow$ 합성수

소수 판정

- 확률적 알고리즘(Probabilistic Algorithm)
  - 밀러-라빈 검증(Miller-Rabin Primality Test)
    - 예제 9.26

27은 소수가 아닌 것을 알고 있다. 밀러-라빈 검증을 하시오.

- 풀이
  - 밑수 2이면 $27 - 1 = 13 \times 2^1$이므로 $m = 13,\ k = 1,\ a = 2$임
  - $k - 1 = 0$ 이므로 초기화 단계만 수행하면
    $T = 2^{13}\ mod\ 27\ =\ 11\ mod\ 27$

소수 판정

- 나눔 검증과 밀러-라빈 검증을 조합한 검증
  - 정의
    - 나눔 검증과 밀러-라빈 검증을 조합한 혼합형 소수 판정 방식
      - 현재 가장 많이 사용되는 소수 검증 방법

1. 홀수 정수를 하나 선택함
   - 2를 제외한 짝수는 모두 합성수임
2. 알려진 작은 소수들로 먼저 나누어 합성수 후보를 제거함
   - 나누어떨어지면 합성수이므로 탈락, 통과하면 밀러-라빈 검증으로 넘어감
3. 검증을 하기 위해서 밑수로 사용할 수들의 집합을 결정함
   - 밑수를 여러 개 사용할수록 오류 확률이 줄어듦
4. 각 밑수로 밀러-라빈 검증을 실시하고 통과했다면 그 수를 소수일 가능성이 높은 수로 판단함

소수 판정

- 나눔 검증과 밀러-라빈 검증을 조합한 검증
  - 예제 9.28

4033은 37×109이므로 합성수이다. 이 수는 위에 언급한 추천하는 소수 검증을 통과하는가?

  - 풀이
    1. 나눔 검증을 실시함
       - $2,3,5,7,11,17,23$은 4033의 약수가 아님
    2. 밑수를 2로 사용하여 밀러-라빈 검증을 실시함
       - $4033 - 1 = 63 \times 2^6$이므로 $m = 63, k = 6$임
       - 초기화: $T = 2^{63} \; mod \; 4033 = 3521 \; mod \; 4033$
       - $k = 1$: $T = 3521^2 \; mod \; 4033 = -1 \; mod \; 4033 \rightarrow$ 통과

소수 판정

- 나눔 검증과 밀러-라빈 검증을 조합한 검증
  - 예제 9.28

4033은 37×109이므로 합성수이다. 이 수는 위에 언급한 추천하는 소수 검증을 통과하는가?

  - 풀이
    3. 검증의 신뢰도를 높이기 위해 밑수 3을 추가로 사용함
       - 초기화: $T = 3^{63} \; mod 4033 \; = 3551 \; mod \; 4033$

$k = 1$: $T = 3551^2 \; mod \; 4033 \; = \; 2443 \; mod \; 4033$

$k = 2$: $T = 2443^2 \; mod \; 4033 \; = 3442 \; mod \; 4033$

$k = 3$: $T = 3442^2 \; mod \; 4033 \; \equiv \; 2443 \; mod \; 4033$

$k = 4$: $T = 2443^2 \; mod \; 4033 \; \equiv 3442 \; mod \; 4033$

$k = 5$: $T = 3442^2 \; mod \; 4033 \; \equiv \; 2443 \; mod \; 4033 \rightarrow$ 실패(합성수)

목 차

- 보충
- 기초 개념
- 소수
- 소수 판정
- 소인수분해

소인수분해

- 산술 기본 정리
  - 1보다 큰 모든 자연수는 소수들의 곱으로 표현됨

$$n = {p_1}^{e1} \times {p_2}^{e2} \times \cdots {p_k}^{ek}$$

  - 최대 공약수나 최소 공배수를 구할 때 편리함
    - 최대 공약수(gcd)

$$a = {p_1}^{a1} \times {p_2}^{a2} \times \cdots \times {p_k}^{ak} \quad b = {p_1}^{b1} \times {p_2}^{b2} \times \cdots {p_k}^{bk}$$
$$\gcd(a,b) = {p_1}^{\min(a_1,b_1)} \times {p_2}^{\min(a_2,b_2)} \times \cdots {p_k}^{\min(a_k,b_k)}$$

      - 공통 소인수의 지수 중 작은 값을 선택함
    - 최소 공배수(lcm)

$$a = {p_1}^{a1} \times {p_2}^{a2} \cdots {p_k}^{ak} \quad b = {p_1}^{b1} \times {p_2}^{b2} \times \cdots {p_k}^{bk}$$
$$lcm(a,b) = {p_1}^{max(a_1,\, b_1)} \times {p_2}^{\max(a_2,\, b_2)} \times \cdots {p_k}^{max(a_k,\, b_k)}$$

      - 각 소인수의 지수 중 큰 값을 선택함
      - $lcm(a,b) \times \gcd(a,b) = a \times b$ 관계가 있음

소인수분해

- 방법
  - 전수 나눔 소인수분해 방법
  - 페르마 방법
  - Pollard $p-1$ 방법
  - Pollard rho 방법

소인수분해

- 전수 나눔 소인수분해 (1/2)
  - 정의
    - 2부터 $\sqrt{n}$까지 n을 나누는 수를 찾아내는 방법
  - 의사코드

```
Trial_Division_Factorization(n)        //n은 인수분해를 하려고 하는 수이다
{
  a ← 2
  while(a ≤ √n)
  {
      output a                         // 인수가 하나 하나 추출된다
      n = n/a
  }
  a ← a + 1
}
if(n > 1)output n                      // n은 더 이상 인수가 없다
}
```

1. $a = 2$부터 시작
2. $a \leq \sqrt{n}$ 동안 반복
3. n이 a로 나누어지면 a를 인수로 출력
4. n을 a로 나누어 더 작은 문제로 바꿈
5. a를 1 증가시켜 다음 수로 검사
6. 마지막에 n이 1보다 크면 남은 n도 인수로 출력

  - 복잡도
    - $n < 2^{10}$인 경우에 효과가 있음
    - 2^{10}이상의 큰 정수를 소인수분해 하는 것은 효율성이 떨어짐

소인수분해

- 전수 나눔 소인수분해 (2/2)
  - 예제 9.29

    1233을 소인수분해하기 위해서 전수 나눔 알고리즘을 사용하시오.

    - 풀이
      - 알고리즘에 따라 프로그램을 실행하면 $1233 = 3^2 \times 137$ 이라는 결과를 얻음
  - 예제 9.30

    1523357784를 소인수분해하기 위해서 전수 나눔 알고리즘을 사용하시오.

    - 풀이
      - 알고리즘에 따라 프로그램을 실행하면 $1523357784 = 2^3 \times 3^2 \times 13 \times 37 \times 43987$이라는 결과를 얻음

소인수분해

- 페르마 방법 (1/2)
  - 정의
    - 정수 n을 $x^2 - y^2$ 형태로 표현하여 $n = (x-y)(x+y)$로 인수분해 하는 방법
  - 의사코드

```
Feramat_Factorization(n)        //n은 인수분해를 하려고 하는 수이다
{
  x ← √n                        //√n보다 큰 수중 가장 작은 정수
  while(x < n)
  {
   w ← x^2 − n

   if(w is perfect square)  y ← √w;  a ← x + y;  b ← x − y;  return a and b
   x ← x + 1
  }

}
```

1.x를 $\sqrt{n}$ 이상인 가장 작은 정수로 설정함
2. $w = x^2 - n$ 계산함
3.w가 완전제곱수인지 확인함
4. 완전제곱수이면 $y = \sqrt{w}$를 구함
5. $n = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$이므로 두 인수 $x-y, x+y$를 반환함
6.w가 완전제곱수가 아니면 x를 1 증가시키고 반복함

  - 복잡도
    - 두 인수가 가까우면 빠르지만, 차이가 크면 비효율적임

소인수분해

- 페르마 방법 (2/2)
  - 기본 원리
    - 만약 $n = x^2 - y^2$ 을 만족하는 x와 y를 찾을 수 있다면 다음이 성립됨

$n = x^2 - y^2 = a \times b$ 여기서 $a = x + y$ 이고 $b = x - y$

  - 탐색 과정
    - 서로 크기가 비슷한 두 정수 a, b를 찾음
    - 먼저 $x = \sqrt{n}$보다 크거나 같은 가장 작은 정수에서 시작함
    - $y^2 = x^2 - n$을 만족하는 다른 정수 y를 구함
    - 각 반복마다 $x^2 - n$ 값을 계산함 y를 찾을 수 있으면 a와 b를 계산해내고 루프로부터 빠져나옴
    - 완전제곱수가 아니면 x를 1 증가시켜 다시 반복함

소인수분해

- Pollard $p-1$ 방법 (1/3)
  - 정의
    - $p-1$의 인수 구조를 이용해 합성수 n의 소인수 p를 찾는 방법

$$p = \gcd(2^{B!} - 1, n)$$

  - 의사코드

Pollard_($p-1$)_Factorization(n, B) $//n$은 인수분해를 하려고 하는 수이다

```
{
  a ← 2
  e ← 2
  while(e ≤ B)
  {
    a ← a^e mod n
    e ← e + 1
  }
  p ← gcd(a − 1, n)
  if 1 < p < n   return p
  return failure
}
```

1. 기준값 B를 정하고 $a \leftarrow 2$, e $\leftarrow 2$로 설정함
2. e가 B이하인 동안 반복함
   $(a \leftarrow a^e \bmod n\ ,\ e \leftarrow e+1)$
3. 반복이 끝나면 a는 $2^{B!} \bmod n$ 형태가 됨
4. $p \leftarrow \gcd(a-1, n)$ 을 계산함
5. $1 < p < n$이면 p는 n의 소인수이므로 반환함
6. 조건을 만족하지 않으면 실패로 판단함

소인수분해

- Pollard $p-1$ 방법 (2/3)
  - 복잡도
    - $B-1$번의 지수 연산$(a = a^e \, mod \, n)$이 필요함
    - $\gcd(a-1, n)$ 계산을 통해 소인수 후보를 찾고 B가 적절하지 않으면 소인수를 찾지 못하고 실패할 수 있음
    - B가 $\sqrt{n}$에 충분히 가깝지 않으면 성공 확률이 낮음

소인수분해

- Pollard $p-1$ 방법 (3/3)
  - 예제 9.31

> 57247159의 소인수를 구하기 위해서 Pollard $p-1$ 소인수분해 방법을 사용하시오. 여기서 $B=8$을 사용하시오

    - 풀이
      - 알고리즘에 따라 프로그램을 실행하면 $p=421$을 찾아낼 수 있음
      - $57247159 = 421 \times 135979$ 이고 421은 소수이고 $p-1=421-1$은 8보다
        큰 인수를 갖지 않음 $(420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7)$

소인수분해

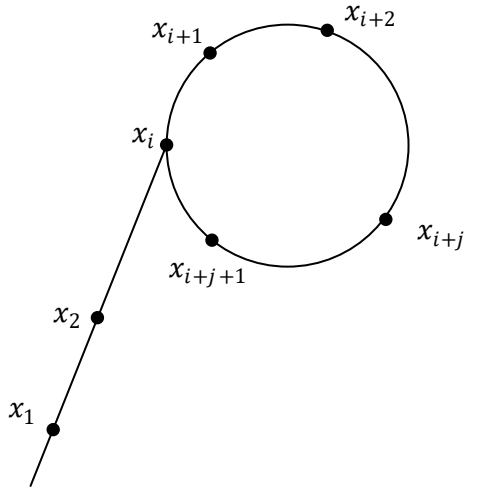
- Pollard rho 방법 (1/4)
  - 정의
    - 반복 수열의 충돌을 이용해 $\gcd(x-y,n)$으로 소인수를 찾는 방법
  - 전제 사실
    a. 두 개의 정수x_1과 x_2가 존재해서 p가 $x_1 - x_2$를 나누지만, n은 $x_1 - x_2$을 나누지 못한다고 가정함
    b. $p = \gcd(x_1 - x_2, n)$을 증명 할 수 있음
       - p가 $x_1 - x_2$를 나누기 때문에 $x_1 - x_2 = q \times p$
       - n은 $x_1 - x_2$을 나누지 못하기 때문에 q는 n을 나누지 못하고 이것은 $\gcd(x_1 - x_2, n)$ 이 1이거나 n의 인수라는 말임

소인수분해

- Pollard rho 방법 (2/4)
  - 과정
    1. 종자(seed)라고 부르는 랜덤한 정수 x_1을 선택함
    2. n은 $x_1 - x_2$을 나누지 못하게 하는 x_2를 계산하기 위해 $x_2 = f(x_1) = {x_1}^2 + a$ 함수를 사용함(여기서 a는 1임)
    3. $\gcd(x_1 - x_2, n)$을 계산함
       - 이 값은 1이 아니면 그 값은 n의 인수임
    4. 만약 이 값이 1이면 1 단계로 돌아가서 x_2를 가지고 반복함
       - 예제 9.32

$f(x) = x^2 + 1, x_1 = 2$ 일 때 Pollard's Rho 알고리즘을 이용하여 91의 인수를 구하시오.

1. seed로 $x_1 = 2$ 선택
2. $x_2 = f(2) = 2^2 + 1 = 5$ 계산
3. $gcd(|\ 2 - 5\ |, 91) = \gcd(3, 91) = 1$ 이므로 인수 발견 실패
4. $x_1 = 5$로 다시 반복
   $x_2 = f(5) = 26, \gcd(|\ 5 - 26\ |, 91) = \gcd(21, 91) = 7$



소인수분해

- Pollard rho 방법 (3/4)
  - 의사코드

```
Pollard_rho_Factorization(n, B)        //n은 인수분해를 하려고 하는 수이다
{
  x ← 2
  y ← 2
  p ← 1
  while(p = 1)
  {
    x ← f(x) mod n
    y ← f(f(y) mod n) mod n
    p ← gcd(x − y, n)
  }
  return p                             // 만약 p = n 이라면 프로그램은 실패이다.
}
```

1. x, y 를 같은 초기값 2로 설정함
2. p를 1로 설정하고, p가 1인 동안 반복함
3. x는 한 번 이동: $x \leftarrow f(x) \bmod n$
4. y는 두 번 이동: $y \leftarrow f(f(y) \bmod n)$
5. $p \leftarrow \gcd(x - y, n)$을 계산함
6. p가 1보다 크고 n보다 작으면 p는 n의 인수임

  - 복잡도
    - $\sqrt{p}$정도의 연산 양이 필요하지만 p는 $\sqrt{n}$과 같거나 이보다 작은 값이기 때문에 대략 $n^{1/4}$ 정도의 연산 양이 필요함
    - Pollard rho는 전수 나눔보다 빠르지만, 비트-연산 복잡도는 여전히 지수적(2의 거듭제곱 형태로 증가)이므로 큰 수에서는 한계가 있음

소인수분해

- Pollard rho 방법 (4/4)
  - 예제 9.32

어떤 컴퓨터가 초당 2^{30}(거의 10억 번)번 정도의 비트 연산을 할 수 있다고 하자. 다음과 같은 크기의 정수를 소인수분해 할 때 걸리는 시간이 대략 어느정도 되는가?
a. 60자리 10진수
b. 100자리 10진수

  - 풀이
    a. 60자리를 갖는 10진수를 2진수로 바꿔보면 비트 수가 약 200자리 정도가 됨
    복잡도($2^{n_b/4}$)는 대략 2^{50}이고 초당 2^{30} 연산 능력을 가진 컴퓨터를 이용하면 2^{20}초인 약 12일 정도 걸림
    b. 100자리를 갖는 10진수를 2진수로 바꿔보면 비트 수가 약 300자리 정도가 됨
    복잡도 ($2^{n_b/4}$)는 대략 2^{75}이고 초당 2^{30} 연산 능력을 가진 컴퓨터를 이용하면 2^{45}초가 걸림

소인수분해

- 더 효율적인 방법
  - 2차 체
    - $x^2 \, mod \, n$ 의 값을 구함
    - 100자리 이상인 정수를 인수분해 가능
    - 복잡도 $O(e^c)$이고 $C \approx (\ln n \ln\ln n)^{1/2}$임
      - 부지수적인 복잡도를 가짐
  - 정수체 체
    - $x^2 = y^2 \, mod \, n$ 의 값을 구함
    - 120자리 이상인 정수 소인수 분해가 빠름
    - 복잡도 $O(e^c)$이고 $C \approx (\ln n)^{1/3}(\ln\ln n)^{2/3}$
      - 부지수적인 복잡도를 가짐

소인수분해

- 더 효율적인 방법
  - 예제 9.34

어떤 컴퓨터가 초당 2^{30}(거의 10억 번)번 정도의 비트 연산을 할 수 있다고 하자. 다음과 같은 방법을 사용했을 때 100자리 10진 정수를 소인수분해 하는데 걸리는 시간이 대략 얼마나 걸리는가?

a. 2차 체 방법
b. 정수체 체 방법

  - 풀이
    - 자릿수가 100인 10진 정수는 대략 2진수로 바꿔보면 비트 수가 약 300자리 정도임
      - $n = 2^{300}$이고, $\ln(2^{300}) = 207$이고 $\ln\ln(2^{300}) = 5$임

a. 2차 체 방법을 사용하면 $(207)^{1/2} \times (5)^{1/2} \approx 14 \times 2.23 \approx 32$임
   - e^{32}번의 비트연산이 필요하고 주어진 컴퓨터를 이용하면 약 20시간 정도 걸림

b. 정수체 체 방법을 사용하면 $2 \times (207)^{1/3} \times (5)^{2/3} = 2 \times 5.9 \times 2.9 \approx 34$임
   - e^{34}번의 비트연산이 필요하고 주어진 컴퓨터를 이용하면 약 140시간 정도 걸림

Thanks!

김 민 식(ms6127@naver.com)