2026/06/15, 2026 보안 기초 세미나

암호학과 네트워크 보안

- 9장 암호수학(2) -

김 민 식 (ms6127@naver.com)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

보충

- AES 보안성 (1/2)

1. 큰 키 공간(128, 192, 256 비트)
   - 현재 컴퓨터 성능 기준으로, 128/192/256비트 키 모두 전수조사 공격이 어려움

2. 키 확장 과정의 혼돈과 확산
   - SubWord의 S-Box 연산으로 라운드 키 생성 과정에 혼돈을 부여함
   - RotWord는 바이트 위치를 순환 이동시켜 키 바이트가 서로 다른 위치로 전달되도록 하여 확산을 제공함
   - Rcon은 라운드마다 다른 고정 상수를 적용하여 라운드 키 간의 반복 패턴과 대칭성을 방지함
   - 이를 통해 라운드 키 간의 관계 분석을 어렵게 만들어 보안성을 높임

보충

- AES 보안성 (2/2)

3. 라운드 함수의 혼돈과 확산
   - SubBytes는 평문, 키, 암호문 사이의 관계를 비선형적으로 만들어 혼돈을 제공함
   - ShiftRows와 MixColumns를 통해 한 바이트의 변화가 여러 바이트로 퍼지도록 하여 확산을 제공함
   - 이를 통해 입력의 작은 변화가 암호문 전체에 영향을 미치게 하여 평문과 암호문 간의 관계 분석을 어렵게 만듦

목 차

- 보충
- 중국인의 나머지 정리
- 2차 합동
- 지수와 로그

중국인의 나머지 정리

- 정리
  - 모듈로 값들이 서로소만 된다면 연립 합동 방정식이 유일한 해를 갖는다는 것을 보인 정리
    - 연립 합동 방정식 $(0 \leq x < M)$

$$x \equiv a_1 \, mod \, m_1$$
$$x \equiv a_2 \, mod \, m_2$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_k \, mod \, m_k$$

- 필요성
  - 큰 모듈러 계산을 작은 모듈러 계산으로 나누고, 그 결과를 다시 결합하기 위해 사용됨
  - RSA에서는 $n = p \times q$ 구조를 이용해 $(mod \, p)$, $(mod \, q)$에서 계산함으로써 복호화 연산을 더 빠르게 수행 가능함

중국인의 나머지 정리

- 방법

1. 공통 모듈로로 사용할 $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$을 구함
2. $M_1 = M/m_1, M_2 = M/m_2, \cdots, M_k = M/m_k$를 구함
3. 각 M_i의 m_i에 대한 곱셈 역원 M_i^{-1}을 구함
4. 각 값을 공식에 대입하여 최종 해 x를 구함
   $x \equiv \left(a_1 \times M_1 \times {M_1}^{-1}\right) + \left(a_2 \times M_2 \times {M_2}^{-1}\right) + \left(a_k \times M_k \times {M_k}^{-1}\right) mod\ M$

*연립 합동 방정식:
$$x \equiv a_1\ mod\ m_1$$
$$x \equiv a_2\ mod\ m_2$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_k\ mod\ m_k$$

중국인의 나머지 정리

- 예제 9.1

다음 합동방정식의 해를 구하라

$$x \equiv 2 \; mod \; 3$$
$$x \equiv 3 \; mod \; 5$$
$$x \equiv 2 \; mod \; 7$$

- 풀이
  1. $M = m_1 \times m_2 \times m_3 = 3 \times 5 \times 7 = 105$
  2. $M_1 = M/m_1 = 105/3 = 35$
     $M_2 = M/m_2 = 105/5 = 21$
     $M_3 = M/m_3 = 105/7 = 15$
  3. 곱에 대한 역원은 $35 \times {M_1}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 3 \rightarrow {M_1}^{-1} = 2$
     $21 \times {M_2}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 5 \rightarrow {M_2}^{-1} = 1$
     $15 \times {M_3}^{-1} \equiv 1 \; mod \; 7 \rightarrow {M_3}^{-1} = 1$
  4. $x \equiv (2 \times 35 \times 2) + (3 \times 21 \times 1) + (2 \times 15 \times 1) \; mod \; 105 \equiv 23 \; mod \; 105$

중국인의 나머지 정리

- 예제 9.2 (1/2)

사용하는 시스템의 능력이 100보다 작은 수만 입력받을 수 있다고 가정하고 $x = 123$, $y = 334$일 때, $z = x + y$를 중국인의 나머지 정리를 이용하여 구하라

- 풀이
  - $x \equiv 24 \; mod \; 99$ $\quad$ $y \equiv 37 \; mod \; 99$
    $x \equiv 25 \; mod \; 98$ $\quad$ $y \equiv 40 \; mod \; 98$
    $x \equiv 26 \; mod \; 97$ $\quad$ $y \equiv 43 \; mod \; 97$
  - $x + y \equiv 61 \; mod \; 99 \rightarrow z \equiv 61 \; mod \; 99$
    $x + y \equiv 65 \; mod \; 98 \rightarrow z \equiv 65 \; mod \; 98$
    $x + y \equiv 69 \; mod \; 97 \rightarrow z \equiv 69 \; mod \; 97$

중국인의 나머지 정리

- 예제 9.2 (2/2)

사용하는 시스템의 능력이 100보다 작은 수만 입력받을 수 있다고 가정하고 $x = 123$, $y = 334$일 때, $z = x + y$를 중국인의 나머지 정리를 이용하여 구하라

- 풀이
  1. $M = 99 \times 98 \times 97 = 941094$
  2. $M_1 = 941094/99 = 9506$
     $M_2 = 941094/98 = 9603$
     $M_3 = 941094/97 = 9702$
  3. $9506 \times {M_1}^{-1} \equiv 1 \, mod \, 99 \rightarrow \ {M_1}^{-1} = 50$
     $9603 \times {M_2}^{-1} \equiv 1 \, mod \, 98 \rightarrow \ {M_2}^{-1} = 97$
     $9702 \times {M_3}^{-1} \equiv 1 \, mod \, 97 \rightarrow \ {M_3}^{-1} = 49$
  4. $z \equiv (61 \times 9506 \times 50) + (65 \times 9603 \times 97) + (69 \times 9702 \times 49) mod \, 941094 \equiv 122342677 \, mod \, 941094 \equiv 457 \, mod \, 941094$
     $\therefore \ z = 457$

목 차

- 보충
- 중국인의 나머지 정리
- 2차 합동
- 지수와 로그

2차 합동

- 정의
  - $a_2x^2 + a_1x + a_0 \equiv 0 \ (mod\ n)$의 형태를 갖는 합동 방정식
    - 암호수학에서는 주로 $x^2 \equiv a \ (mod\ n)$ 형태를 가짐

- 필요성
  - Rabin 공개키 암호의 복호화 과정에서는 암호문 c가 주어졌을 때 $x^2 \equiv c \ mod\ n$을 만족하는 모듈러 제곱근 x를 찾아야 하므로, 2차 합동 개념이 직접적으로 사용됨

2차 합동

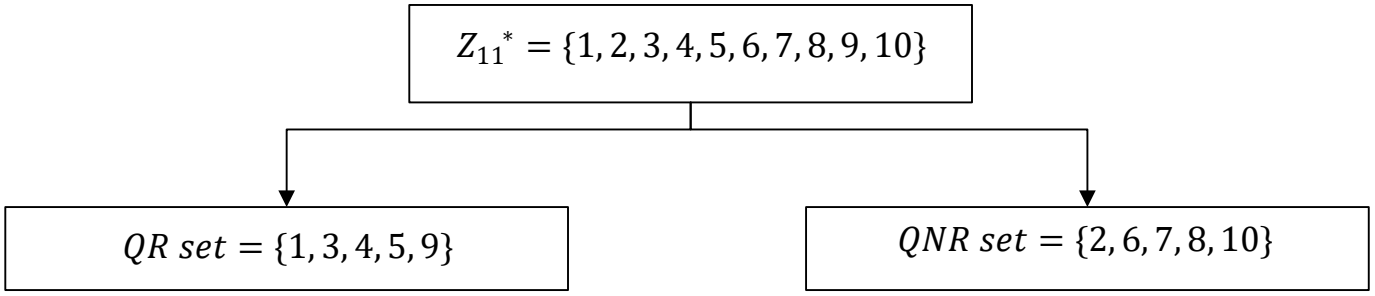
- 모듈로가 소수인 2차 합동 (1/7)
  - 2차 잉여(QR, Quadratic Residue)
    - $x^2 \equiv a \ (mod\ p)$에서 해 x 가 존재하는 a
      - e.g., $x^2 \equiv 3 \ (mod\ 13) \rightarrow x = 4$에서, $16 \equiv 3 \ (mod\ 13)$, $x = 9$에서 $81 \equiv 3 \ (mod\ 13)$ 3은 $mod\ 13$에서 2차 잉여임
  - 2차 비잉여(QNR, Quadratic Nonresidue)
    - $x^2 \equiv a \ (mod\ p)$에서 해 x가 존재하지 않는 a
      - e.g., $x^2 \equiv 5 \ (mod\ 13)$ → 해가 존재하지 않음
        5는 $mod\ 13$에서 2차 비잉여임
  - 암호 기법에서 주로 사용하는 $Z_p{}^*$ 에서는 전체 $(p-1)$개의 원소 중 절반은 2차 잉여이고, 나머지는 2차 비잉여임

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (2/7)
  - 예제 9.3

$Z_{11}{}^{*}$에는 10개의 원소가 있다. 2차 잉여와 2차 비잉여를 구분해서 나타내시오.

  - 풀이
    - $1^2 \equiv 1\ (mod\ 11), 2^2 \equiv 4\ (mod\ 11), 3^2 \equiv 9\ (mod\ 11),$ $4^2 \equiv 5\ (mod\ 11), 5^2 \equiv 3\ (mod\ 11)$ 제곱 결과로 나오는 값은 $1, 3, 4, 5, 9$이므로 2차 잉여임
    - 나머지 원소 $2, 6, 7, 8, 10$들은 어떤 값을 제곱해도 나오지 않으므로 2차 비잉여임



2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (3/7)
  - 오일러 판정 기준(Euler's Criterion)
    a. 만약 $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \, mod \, p$ 이면 모듈로 p로 a는 2차 잉여임
       - e.g., $p = 13, a = 3$일 때 $3^{(13-1)/2} \equiv 3^6 \, mod \, 13 \equiv 729 \, mod \, 13 \equiv 1 \, mod \, 13$, 3은 $mod \, 13$에서 2차 잉여
    b. 만약 $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \, mod \, p$ 이면 모듈로 p로 a는 2차 비잉여임
       - e.g., $p = 13, a = 5$일 때 $5^{(13-1)/2} \equiv 5^6 \, mod \, 13 \equiv 15625 \, mod \, 13 \equiv 12 \, mod \, 13 \equiv -1 \, mod \, 13$, 5는 $mod \, 13$에서 2차 비잉여

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (4/7)
  - 방정식 풀이
    1. 오일러 판정 기준으로 해의 존재 여부를 먼저 확인함
       $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \, mod \, p \rightarrow$ 해 존재
       $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \, mod \, p \rightarrow$ 해 없음
    2. 해가 존재하고 $p = 4k + 3$ 형태이면 $x \equiv \pm a^{(p+1)/4} \, mod \, p$로 해를 구함
       - $p = 4k + 3$ 형태가 아니면 $(p + 1)/4$이 정수가 아니므로 공식을 사용할 수 없어 $p - 1 = Q \cdot 2^S$ 구조를 활용해 제곱근 후보를 보정하는 Tonelli-Shanks 알고리즘으로 해를 구함

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (5/7)
  - 예제 9.4

다음 2차 합동 방정식의 해를 구하시오.

a. $x^2 \equiv 3 \ (mod\ 23)$

b. $x^2 \equiv 2 \ (mod\ 11)$

c. $x^2 \equiv 7 \ (mod\ 19)$

  - 풀이
    a. 3은 ${Z_{23}}^*$에서 $3^{11} \equiv 1\ mod\ 23$ 이므로 QR이고 23은 $4k+3$ 형태이므로 해는 $x \equiv \pm 3^6\ mod\ 23 \equiv \pm 16\ mod\ 23$임

    b. 2는 ${Z_{11}}^*$에서 $2^5 \equiv -1\ mod\ 11$ 이므로 QNR 이고 해가 존재하지 않음

    c. 7은 ${Z_{19}}^*$에서 $7^9 \equiv 1\ mod\ 19$ 이므로 QR이고 19는 $4k+3$ 형태이므로 해는 $x \equiv \pm 7^5\ mod\ 19 \equiv \pm 11\ mod\ 19$임

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (6/7)
  - Tonelli-Shanks 알고리즘
    - 정의
      - 2차 비잉여 z로부터 보정값을 생성하고, 제곱근 후보를 반복적으로 수정하면서 $x^2 \equiv a \ (mod\ p)$의 해를 구하는 알고리즘
    - 구조

$$p - 1 = Q \cdot 2^S$$

      - $p-1$을 홀수 부분 Q와 2의 거듭제곱 부분 2^S로 분해하는 구조를 이용하여 제곱근 후보를 반복적으로 보정함

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (7/7)
  - Tonelli-Shanks 알고리즘
    - 동작과정
      1. $p-1 = Q \cdot 2^S$ 형태로 나눔
         - e.g., $p-1 = 40 = 5 \cdot 2^3$ $(Q = 5,\ S = 3)$
      2. 2차 비잉여 $z^{(p-1)/2} \equiv -1\ mod\ p$ 을 만족하는 z 값을 고름
      3. 변수를 $M = S,\ c = z^Q\ (mod\ p),\ t = a^Q,\ R = a^{(Q+1)/2} (mod\ p)$로 초기화함
      4. $t \equiv 1\ (mod\ p)$ 이면 $R^2 \equiv a\ (mod\ p)$ 가 성립함
      5. 만약 $t \neq 1$ 이면 $t^{2^i} \equiv 1\ (mod\ p)$을 만족하는 가장 작은 i를 찾고 보정 값 $b = c^{2^{M-i-1}} (mod\ p)$ 을 계산하고 변수 t가 1이 될 때까지 $M = i,\ c = b^2,\ t = tb^2,\ R = Rb$를 반복함
      6. 반복하다가 $t \equiv 1\ (mod\ p)$이 되면 알고리즘이 종료되고 이때 R이 하나의 제곱근이고, 다른 하나는 $p - R$임 따라서 최종 해는 $x \equiv R, p - R\ (mod\ p)$임

z: $x^2 \equiv a (mod\ p)$에서 a를 구하기 위한 보조 값
Q: $Q \cdot 2^S$형태의 홀수 부분
M:현재 보정 단계 수
$c = z^Q (mod\ p)$: 보정에 사용하는 값
R: 현재 제곱근 후보
t: R이 제곱근인지 확인하는 보조값

2차 합동

- 모듈로가 소수인 2차 합동 (7/7)
  - Tonelli-Shanks 알고리즘
    - 예제 9.5

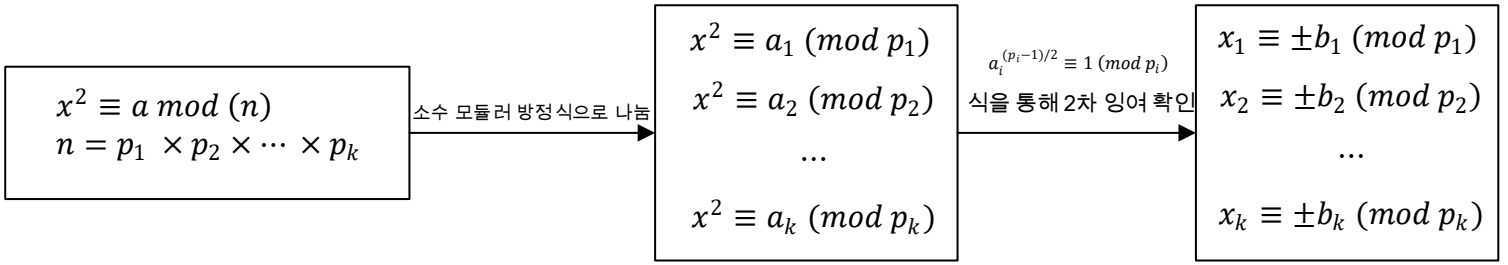
Tonelli-Shanks 알고리즘을 이용하여 다음 2차 합동방정식의 해를 구하라.

$$x^2 \equiv 5 \, mod \, 41$$

- 풀이
  1. $p - 1 = 40 = 5 \cdot 2^3 \; (Q = 5, \; S = 3)$
  2. $z = 3$ 선택 $3^{20} \equiv -1 \, mod \, 41$이므로 2차 비잉여
  3. $M = 3, c = 3^5 \, (mod \, 41) = 38, \; t = 5^5 (mod \, 41) = 9, \; R = 5^3 (mod \, 41) = 2$으로 초기값 설정
  4. $t^{(2^2)} \equiv 1 \, mod \, 41$이 되는 가장 작은 $i = 2$를 찾고 $\mathrm{b} = \mathrm{c}^{2^{3-2-1}} = \mathrm{c}^1 = 38$ 이후 갱신하면 $M = 2, \; c = b^2 \; mod \, 41 = 9, \; t = tb^2 \; mod \, 41 = 40, \; R = Rb \; mod \, 41 = 35$
  5. $t \neq 1$ 이므로 1이 될 때까지 다시 반복함 $t^{2^1} \equiv 1 \, mod \, 41$ 이므로 $i = 1, b = c^{2^{2-1-1}} = c^1 = 9$ 갱신하면 $M = 1 \; c = b^2 \; mod \, 41 = 40, \; t = tb^2 \; mod \, 41 = 1, \; R = Rb \; mod \, 41 = 28$
  6. $t = 1$이므로 종료 최종 해는 $x \equiv 28, 13 \, mod \, 41$

2차 합동

- 모듈로가 합성수인 2차 합동 (1/2)
  - 방정식 풀이
    1. 합성수 n을 소인수분해함: $n = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$
    2. 원래 방정식을 각 소수 모듈러에 대한 방정식으로 나눔: $x^2 \equiv a_1 \,(mod\, p_1)\; x^2 \equiv a_2 \,(mod\, p_2)\; \cdots\; x^2 \equiv a_k \,(mod\, p_k)$
    3. 각 소수 모듈러에서 a_i가 2차 잉여인지 확인함: $a_i^{(p_i-1)/2} \equiv 1 \,(mod\, p_i)$
    4. 각 소수 모듈러 p_i에서 제곱근 x_i를 구하고 $x_i \equiv \pm b_i \,(mod\, p_i)$ 형태로 정리하여 연립 합동식 후보를 만듦
    5. 각 연립 합동식을 중국인의 나머지 정리로 결합하여 최종 $mod\, n$의 해를 구함



2차 합동

- 모듈로가 합성수인 2차 합동 (2/2)
  - 예제 9.5

$77 = 7 \times 11$임을 이용하여 $x^2 \equiv 36 \; mod \; 77$의 해를 구하라

  - 풀이
    - $x^2 \equiv 36 \; mod \; 7 \equiv 1 \; mod \; 7$ 과 $x^2 \equiv 36 \; mod \; 11 \equiv 3 \; mod \; 11$ 로 나눔
    - 오일러 판정 기준으로 $1^3 \equiv 1 \; mod \; 7$이고 $3^5 \equiv 1 \; mod \; 11$이므로 해가 존재함
    - 7과 11은 $4k + 3$ 형태이고 $x \equiv \pm a^{(p+1)/4} \; mod \; p$에 적용하면
      $x \equiv \pm 1^{(7+1)/4} (mod \; 7) \equiv \pm 1^2 (mod \; 7)$
      $x \equiv \pm 3^{(11+1)/4} (mod \; 11) \equiv \pm 3^3 (mod \; 11) \equiv \pm 5 (mod \; 11)$
    - Set 1: $x \equiv 1 \; mod \; 7$, $x \equiv 5 \; mod \; 11$ Set 2: $x \equiv 1 \; mod \; 7$, $x \equiv 6 \; mod \; 11$
      Set 3: $x \equiv 6 \; mod \; 7$, $x \equiv 5 \; mod \; 11$ Set 4: $x \equiv 6 \; mod \; 7$, $x \equiv 6 \; mod \; 11$
    - 중국인의 나머지 정리를 통해서 구하면
      Set 1: $x \equiv 71 \; mod \; 77 \equiv -6 \; mod \; 77$, Set 2: $x \equiv 50 \; mod \; 77 \equiv -27 \; mod \; 77$
      Set 3: $x \equiv 27 \; mod \; 77$, Set 4: $x \equiv 6 \bmod 77$
    - 각각의 연립방정식의 해는 $x = \pm 6 \; mod \; 77, \pm 27 \; mod \; 77$임

목 차

- 보충
- 중국인의 나머지 정리
- 2차 합동
- 지수와 로그

지수와 로그

- 지수(Exponentiation)
  - 정의

$$y = a^x$$

    - x를 지수라고 부르고 a를 밑수라고 하고 밑수를 x번 곱해야 되는 것을 의미함

  - 필요성
    - RSA 암호의 암호화·복호화 과정에서 $c^d \bmod n,\ m^e \bmod n$ 형태의 모듈러 지수계산이 사용됨
    - Diffie-Hellman 키 교환에서는 각 사용자가 $g^a \bmod p$, $g^b \bmod p$ 형태의 값을 계산하여 공개하고, 이를 이용해 공통 비밀키를 생성함

지수와 로그

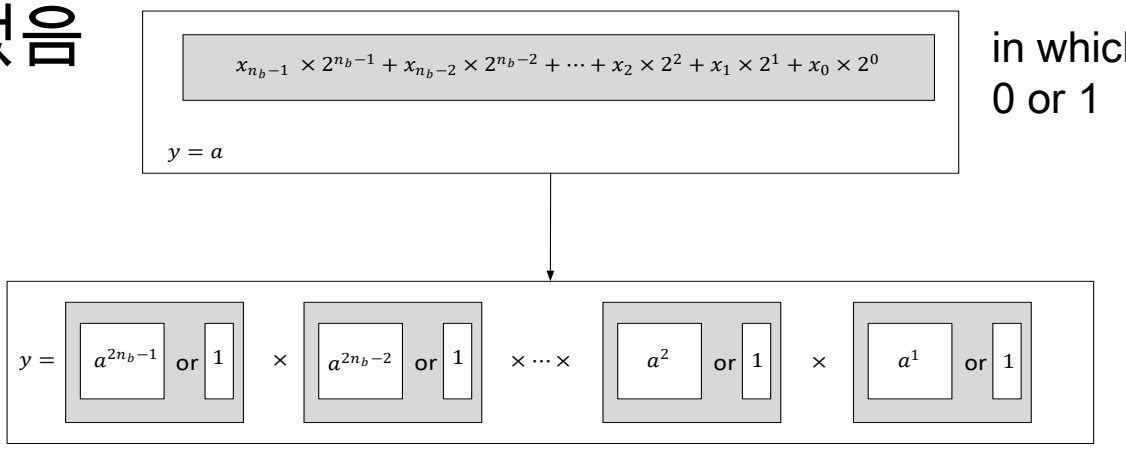
- 고속 지수 계산 (1/4)
  - 제곱-곱 방법(Square-and-Multiply Method)을 사용함
    - 제곱과 곱셈을 모두 사용함
  - 지수를 n_b 비트(x_0에서 x_{n_b-1})를 갖는 2진수로 간주함

$$x = x_{n_b-1} \times 2^{n_b-1} + x_{n_b-2} \times 2^{n_b-2} + \cdots + x_2 \times 2^2 + x_1 \times 2^1 + x_0 \times 2^0$$

    - e.g., $x = 22 = (10110)_2$ 일 때 $22 = 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 0$로 표현 가능함

지수와 로그

- 고속 지수 계산 (2/4)
  - 계산 과정
    1. 지수 x의 비트 x_i를 확인하고 해당 비트가 1이면 현재 결과값 y에 a를 곱함
    2. 다음 비트 계산에 사용하기 위해 a를 제곱함
    3. 1~2 과정을 지수 x의 비트 수인 n_b번 반복함
    4. 마지막 반복 이후에는 더 이상 다음 비트가 없으므로 제곱 과정이 필요 없음



in which x_i is 0 or 1

Example:

$y = a^9 = a^{1001_2} = a^8 \times 1 \times 1 \times a$

지수와 로그

- 고속 지수 계산 (3/4)
  - 의사코드

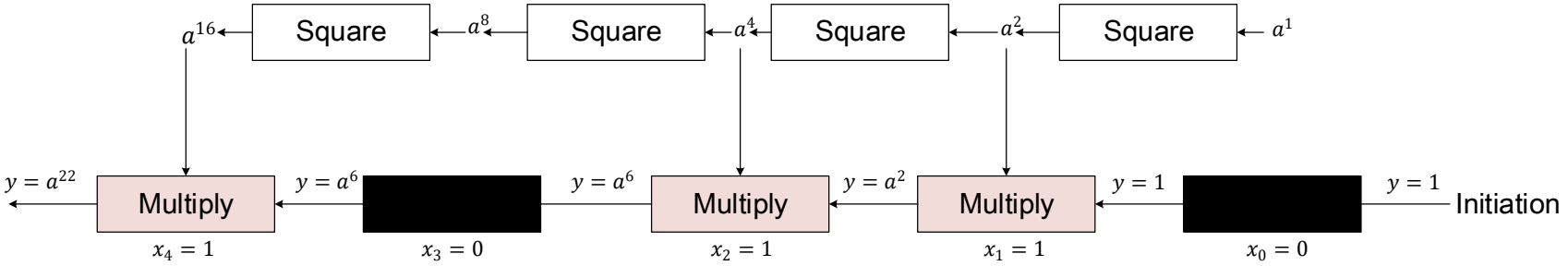
```
Square_and_Multiply (a, x, n)
{
  y ← 1
  for (i ← 0 to n_b − 1)                    //n_b는 x의 비트 수이다.
  {
      if(x_i = 1)    y ← a × y mod n        //비트가 1인 경우만 곱한다.

      a ← a^2 mod n                         //마지막 반복에서는 제곱이 필요 없다.
  }
  return y
}
```

  - 복잡도
    - 비트 연산 복잡도는 지수적인 $O(n_b)$임

지수와 로그

- 고속 지수계산 (4/4)
  - 예제 9.6

$y = a^x$에서 x가 22=$(10110)_2$일 때 절차를 보여라



- $x = 22 = (10110)_2$ 이므로 각 비트를 확인하여 비트가 1인 위치의 a의 거듭제곱만 선택해 곱하여 $a^{22} = a^{16} \cdot a^4 \cdot a^2$로 계산됨
- 검은색 사각형은 해당 비트가 0이라서 곱셈을 하지않고 지나가는 단계를 의미함

지수와 로그

- 로그(Logarithm)
  - 정의

$$x = \log_a y$$

    - 지수의 역연산으로, $\log_a y = x$는 $a^x = \mathrm{y}$를 만족하는 지수 x를 의미함 $(a > 0, a \neq 1, y > 0)$

  - 필요성
    - 로그는 지수의 역연산으로 $g^x mod\ p$의 결과가 주어졌을 때, 그 결과를 만든 지수 x를 찾는 문제이며, 큰 수에서는 x를 찾기 어렵기 때문에 Diffie-Hellman, ElGamal 등 공개키 암호의 보안 기반으로 사용됨

지수와 로그

- 전부 찾기(Exhaustive Search)
  - 정의
    - 가능한 지수 x를 하나씩 대입하여 $y \equiv a^x mod\ n$ 을 만족하는 값을 찾는 방법
  - 알고리즘

```
Modular_Logarithm (a, y, n)
{
  for (x = 1 to n − 1)
  {
        if(y ≡ a^x mod n) return x
   }
   return failure
}
```

  - 복잡도
    - 비트 연산 복잡도는 지수적인 $O(2^{n_b})$임

지수와 로그

- 이산 대수(Discrete Logarithm)
  - 정의
    - $y \equiv a^x \mod n$에서 a를 몇 번 곱해야 y가 되는지를 나타내는 지수 x
  - 이산 대수를 이해하기 위한 성질
    - 유한 곱셈 군(Finite Multiplicative Group)
    - 군의 크기(Group Order)
    - 원소의 위수(Order of an Element)
    - 오일러 정리(Euler's Theorem)
    - 원시근(Primitive Root)
    - 순환 군(Cyclic Group)

지수와 로그

- 이산 대수를 이해하기 위한 성질 (1/9)
  - 유한 곱셈 군(Finite Multiplicative Group)
    - 유한 곱셈군은 곱셈 연산에 대해 닫혀 있는 유한한 원소들의 집합임
    - $G =< \mathrm{Z}_n^*, \times >$ 형태의 군에서 Z_n^*는 n과 서로소인 $n-1$까지의 정수들로 구성되고 항등원은 1임
    - 모듈로 값 n이 소수 p일 때는 $G =< \mathrm{Z}_p^*, \times >$ 가 됨

지수와 로그

- 이산 대수를 이해하기 위한 성질(2/9)
  - 군의 크기
    - 군에 속하는 원소의 개수를 의미하며 $|G|$로 나타냄
    - $G =< \mathrm{Z}_n^*, \times >$의 크기는 $\varphi(n)$임
    - 예제 9.7

> 군$G =< \mathrm{Z}_{21}^*, \times >$ 의 크기는 얼마인가?

      - 풀이
        - $|G| = \varphi(21) = \varphi(3) \times \varphi(7) = 2 \times 6 = 12$ 이고
          이 군은 12개의 원소인 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20으로 이루어짐

지수와 로그

- 이산 대수를 이해하기 위한 성질(3/9)
  - 원소의 위수
    - $G =< \mathrm{Z}_n^*, \times >$에서 원소 a의 위수는 $a^i \equiv e \, mod \, n$이 되는 정수 중에서 가장 작은 정수 i로 정의되고 항등원 e의 위수는 1임
    - 예제 9.8

> 군$G =< \mathrm{Z}_{10}^*, \times >$ 의 모든 원소에 대한 위수를 계산하시오.

      - 풀이
        - 이 군은 $\varphi(10) = 4$개의 원소 $1, 3, 5, 7$을 가짐
        - 라그랑주 정리를 이용하여 군의 크기를 나누면 4를 나누는 수는 오직 $1, 2, 4$이므로 원소의 위수를 계산하기 위해 3가지 수에 대해서만 거듭제곱수를 계산함

라그랑주 정리: 유한군에서 부분군의 크기는 전체 군의 크기를 나눈다는 정리

a. $1^1 \equiv 1 \, mod \, 10 \; ; \rightarrow ord(1) = 1$
b. $3^1 \equiv 3 \, mod \, 10 \; ; 3^2 \equiv 9 \, mod \, 10 \; ; 3^4 \equiv 1 \, mod \, 10 \rightarrow ord(3) = 4$
c. $7^1 \equiv 7 \, mod \, 10 \; ; 7^2 \equiv 9 \, mod \, 10 \; ; 7^4 \equiv 1 \, mod \, 10 \rightarrow ord(7) = 4$
d. $9^1 \equiv 9 \, mod \, 10 \; ; 9^2 \equiv 1 \, mod \, 10 \; ; \rightarrow ord(9) = 2$

지수와 로그

- 이산 대수를 이해하기 위한 성질 (4/9)
  - 오일러 정리
    - a가 군 $G = < \mathrm{Z}_n^*, \times >$의 원소라면 $a^{\varphi(n)} = 1 \, mod \, n$임
      - $i = \varphi(n)$일 경우 $a^i \equiv 1 \, mod \, n$이 성립됨
    - 예제 9.9

군 $G = < \mathrm{Z}_8{}^*, \times >$에 대한 $a^i \equiv 1 \, mod \, 8$의 값을 나타내시오.
$\varphi(8) = 4$이고 원소는 1, 3, 5, 7 이라는 점에 유의

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
$a=1$	x: **1**	x: 1	x: 1	x: 1	x: 1	x: 1	x: 1
$a=3$	x: 3	x: **1**	x: 3	x: 1	x: 3	x: 1	x: 3
$a=5$	x: 5	x: **1**	x: 5	x: 1	x: 5	x: 1	x: 5
$a=7$	x: 7	x: **1**	x: 7	x: 1	x: 7	x: 1	x: 7

    - 풀이
      - 음영으로 처리된 부분은 오일러 정리를 적용한 결과이며 $i = \varphi(8) = 4$ 이고 모든 a에 대해서 그 결과는 $x = 1$임
      - 어떤 원소 a를 계속 거듭제곱했을 때, $a^i \equiv 1 \, mod \, n$이 처음 성립하는 i값이 그 원소의 위수임
      - 각 원소의 위수는 $ord(1) = 1, \; ord(3) = 2, \; ord(5) = 2, ord(7) = 2$임

지수와 로그

- 이산 대수를 이해하기 위한 성질 (5/9)
  - 원시근(Primitive Root) (1/4)
    - $G =< \mathrm{Z}_n^*, \times >$에서 위수의 군의 크기 $|G|$와 같은 원소를 의미
      - $ord(a) = |G|$이면 a를 군의 원시근이라고 함
    - 예제 9.10

      군 $G =< \mathrm{Z}_8{}^*, \times >$에 원시근을 구하시오.

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
$a=1$	$\boldsymbol{x:1}$	$x:1$	$x:1$	$x:1$	$x:1$	$x:1$	$x:1$
$a=3$	$x:3$	$\boldsymbol{x:1}$	$x:3$	$x:1$	$x:3$	$x:1$	$x:3$
$a=5$	$x:5$	$\boldsymbol{x:1}$	$x:5$	$x:1$	$x:5$	$x:1$	$x:5$
$a=7$	$x:7$	$\boldsymbol{x:1}$	$x:7$	$x:1$	$x:7$	$x:1$	$x:7$

    - 풀이
      - 어떠한 원소도 위수가 $\varphi(8) = 4$가 되지 않고 위수가 모두 4보다 작으므로 원시근을 가지지 않음

지수와 로그

- 이산 대수를 이해하기 위한 성질 (6/9)
  - 원시근(Primitive Root) (2/4)
    - 예제 9.11

군 $G = < Z_7{}^*, \times >$에 대한 $a^i \equiv x \bmod 7$의 값을 계산해 놓은 표이다. 이 군에 원시근을 구하시오

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
$a=1$	$x:1$	$x:1$	$x:1$	$x:1$	$x:1$	$x:1$
$a=2$	$x:2$	$x:4$	$x:1$	$x:2$	$x:4$	$x:1$
원시근 ⟶ $a=3$	$x:3$	$x:2$	$x:6$	$x:4$	$x:5$	$x:1$
$a=4$	$x:4$	$x:2$	$x:1$	$x:4$	$x:2$	$x:1$
원시근 ⟶ $a=5$	$x:5$	$x:4$	$x:6$	$x:2$	$x:3$	$x:1$
$a=6$	$x:6$	$x:1$	$x:6$	$x:1$	$x:6$	$x:1$

- 풀이
  - 군 크기는 $\varphi(7) = 6$이고 위수를 살펴보면 $ord(1) = 1, ord(2) = 3, ord(3) = 6, ord(4) = 3, ord(5) = 6, ord(6) = 2$임
  - 두 원소 3과 5만이 $i = \varphi(n) = 6$에서 위수 6을 가지므로 군은 2개의 원시근 3과 5를 가짐

지수와 로그

- 이산 대수를 이해하기 위한 성질(7/9)
  - 원시근(Primitive Root) (3/4)
    - 예제 9.12

p: 2가 아닌 소수
t: 소수 p가 몇 번 거듭제곱 되었는지를 나타내는 지수

$n = 17, 20, 38, 50$ 중 어떤 n에 대해서 군 $G = < Z_n^*, \times >$가 원시근을 갖는가?

- 풀이
  - 원시근은 Z_n^* 전체를 생성하는 원소이므로 Z_n^*가 순환군일 때만 존재함
    - 정수론에서 Z_n^*가 순환군이 되는 경우는 $n = 2, 4, p^t, 2p^t$ 형태뿐임

a. $G = < Z_{17}^*, \times >$에서 원시근을 가짐
   - $17 = 17^1 (p = 17, t = 1)$이기 때문임

b. $G = < Z_{20}^*, \times >$은 원시근을 가지지 않음
   - $20 = 4 \times 5$ 이기 때문에 조건에 없음

c. $G = < Z_{38}^*, \times >$ 에서 원시근을 가짐
   - $38 = 2 \times 19^1$ $(p = 19,\ t = 1)$이기 때문임

d. $G = < Z_{50}^*, \times >$에서
   - $(p = 5,\ t = 2)$이기 때문임

지수와 로그

- 이산 대수를 이해하기 위한 성질 (8/9)
  - 원시근(Primitive Root) (4/4)
    - 성질

> 만약 군 $G = < Z_n{}^*, \times >$이 원시근을 갖는다면, 원시근 개수는 $\varphi(\varphi(n))$개다.

    - 성질에 관한 질문
      1. 주어진 원소 a와 $G = < Z_n{}^*, \times >$ 에 대해서 a가 G의 원시근인지 아닌지를 어떻게 알아낼 수 있는가?
         - 주어진 원소 a가 원시근인지 확인하기 위해서는 $\varphi(n)$을 구하고, $\mathrm{ord}(a) = \varphi(n)$ 인지 점검해야 함
      2. 주어진 군 $G = < Z_n{}^*, \times >$에 대해서 G의 모든 원시근을 알아낼 수 있을까?
         - 원시근의 개수는 $\varphi(\varphi(n))$으로 알 수 있지만, 실제 어떤 원소들이 원시근인지는 각 원소의 위수를 확인해야 함
      3. 주어진 군 $G = < Z_n{}^*, \times >$ 에 대해서 G의 한 원시근을 어떻게 선택할 것인가?
         - $ord(a) = \varphi(n)$을 만족하는 원소를 찾고, 그 중 하나를 원시근으로 선택함

지수와 로그

- 이산 대수 성질 (9/9)
  - 순환 군(Cyclic Group)
    - 군 $G = < \mathrm{Z}_n{}^*, \times >$가 원시근을 갖는 군을 말함
    - 만약 g가 이 군의 한 원시근이라면 군 전체 집합$\mathrm{Z}_n{}^*$을 $\mathrm{Z}_n{}^* = \{\mathrm{g}^1, \mathrm{g}^2, \mathrm{g}^3, \cdots, \mathrm{g}^{\varphi(n)}\} \; mod \; n$으로 나타낼 수 있음
      - 이때 g를 원시근 또는 생성자라고 함
    - 예제 9.13

> 군$G = < \mathrm{Z}_{10}{}^*, \times >$는 $\varphi(10) = 4$이고 $\varphi(\varphi(10)) = 2$이므로 두 개의 원시근을 갖는다. 이 두 개의 원시근은 3과 7이라는 것을 구해낼 수 있다. 이 두 개의 원시근이 각각 어떻게 전체 군의 집합을 생성해내는지 알아보자.

      - 풀이
        - $\mathrm{g} = 3 \rightarrow \mathrm{g}^1 mod \; 10 = 3, \mathrm{g}^2 \; mod \; 10 = 9, \mathrm{g}^3 \; mod \; 10 = 7, \mathrm{g}^4 \; mod \; 10 = 1, \cdots$
          $\mathrm{g} = 7 \rightarrow \mathrm{g}^1 mod \; 10 = 7, \mathrm{g}^2 \; mod \; 10 = 9, \mathrm{g}^3 \; mod \; 10 = 3, \mathrm{g}^4 \; mod \; 10 = 1, \cdots$
        - $\mathrm{Z}_{10}{}^* = \{1, 3, 7, 9\}$이고 3과 7은 $\mathrm{Z}_{10}{}^*$ 전체를 생성하므로 원시근임

지수와 로그

- 이산 대수의 아이디어
  - 군 G= $=< \mathrm{Z}_p{}^*, \times>$의 성질
    1. 이 군의 원소는 1부터 p–1까지의 모든 수임
    2. 이 군은 항상 원시근을 가짐
    3. 이 군은 순환 군이고 원소들은 g^x 를 사용하여 생성해 낼 수 있음
       - x는 1부터 $\varphi(n) = p - 1$안의 정수임
    4. 원시근은 로그의 밑수로 생각할 수 있음
       - 만약 군이 k개의 원시근을 가진다고 한다면 k개의 서로 다른 밑수를 가지고 계산이 가능함
       - 집합 y에 대해 $x = \log_{\mathrm{g}} y$라고 한다면 g를 밑수로 갖는 y의 로그인 새로운 원소 x가 존재함
         - 이와 같은 로그를 이산 대수라고 함
         - 밑수 g를 나타내기 위해서 L_{g}라고 표현함

지수와 로그

- 이산 대수의 도표화 (1/2)
  - y가 주어졌을 때 $y = a^x \ mod \ n$과 같은 문제에서 x를 풀기 위해 서로 다른 밑수별로 $Z_p{}^*$에 대한 표를 사용함
    - e.g., 군 $G =< Z_7{}^*, \times >$에 대한 이산 대수 표

y	1	2	3	4	5	6
$x = L_3 y$	6	2	1	4	5	3
$x = L_5 y$	6	4	5	2	1	3

  - 같은 y값이라도 밑수 g 에 따라 이산 로그값 x가 달라질 수 있음

지수와 로그

- 이산 대수의 도표화 (2/2)
  - 예제 9.14

다음경우 각각에 대해 x를 구하시오.

a. $4 \equiv 3^x mod\ 7$ b. $6 \equiv 5^x\ mod\ 7$

  - 풀이

y	1	2	3	4	5	6
$x = L_3 y$	6	2	1	4	5	3
$x = L_5 y$	6	4	5	2	1	3

a. $4 \equiv 3^x\ mod\ 7 \rightarrow x = L_3 4\ mod\ 7 = 4\ mod\ 7$

b. $6 \equiv 5^x\ mod\ 7 \rightarrow x = L_5 6\ mod\ 7 = 3\ mod\ 7$

지수와 로그

- 이산 대수 복잡도
  - $y \equiv a^x mod\ n$에서 y를 구하는 지수계산은 빠르지만, 주어진 y로부터 지수 x를 찾는 것은 가능한 x를 하나씩 확인해야 하므로 n이 커질수록 계산이 어려움
  - 이산 로그 문제의 복잡도는 소인수분해 문제와 유사하게 큰 수에서 효율적으로 풀기 어려운 수준이므로 공개키 암호의 보안 기반으로 사용됨
    - 단순 소인수 분해의 복잡도 $O(2^{n_b/2})$

지수와 로그

- 전통적인 로그와 이산 대수의 비교
  - 이산 대수가 전통적인 로그 같은 성질을 가짐
    - 모듈로 값으로 n 대신에 $\varphi(n)$을 사용함

전통적인 로그	이산 대수
$\log_a 1 = 0$	$L_g 1 \equiv 0 \ (mod\ \varphi(n))$
$\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$	$L_g(x \times y) \equiv (L_q x + L_q y)(mod\ \varphi(n))$
$\log_a x^k = k \times \log_a x$	$L_g x^k \equiv k \times L_q x \ (mod\ \varphi(n))$

    - 이산 대수는 전통적인 로그처럼 곱셈과 거듭제곱에 대한 유사한 성질을 가지지만, 모듈러 환경에서 계산되기 때문에 $\varphi(n)$을 기준으로 연산됨

Thanks!

김 민 식(ms6127@naver.com)