

이공학도를 위한 확률 및 통계학

- 2장 확률 -

김 민 식 (minsik@pel.sejong.ac.kr)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 보충
- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

목 차

- 보충
- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

보충

• 상호배반(Mutually exclusive or Disjoint) (1/2)

- 두 사상이 공통된 표본점을 갖지 않아 한 번의 시행에서 동시에 발생할 수 없는 관계
- 두 사상의 교집합이 공집합인 경우를 의미
- $A \cap B = \emptyset$ 로 표현
- 예제 2.9

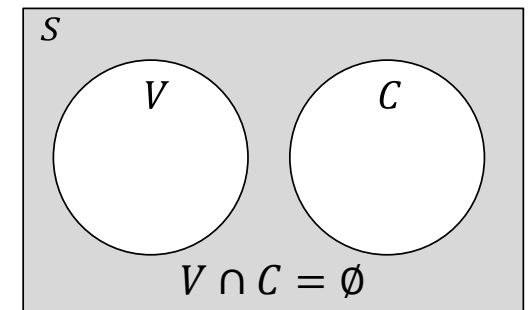
알파벳 한 글자를 임의로 선택하는 실험에서 다음 두 사상이 주어져 있다.

$$V = \{a, e, i, o, u\}, C = \{l, r, s, t\}$$

두 사상 V 와 C 가 상호배반인지 판단하시오.

• 풀이

- 두 사상의 공통 원소를 구하면, $V \cap C = \emptyset$
- V 와 C 는 공통으로 포함하는 원소가 없어 동시에 발생할 수 없으므로 상호배반임



<그림 6> 예제 2.9 벤 다이어그램

보충

• 상호배반(Mutually exclusive or Disjoint) (2/2)

• 예제 2.10

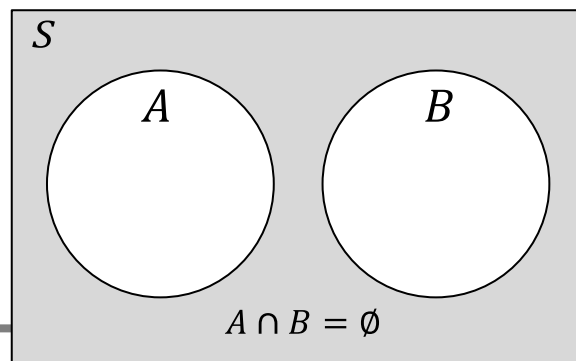
8개의 채널을 운영하는 한 유선방송회사가 있다. 이 중 3개 채널은 ABC, 2개 채널은 NBC, 1개 채널은 CBS 방송망에 속하며, 나머지 2개 채널은 각각 교육방송과 ESPN 스포츠 중계용이다.

가입자가 임의로 TV를 켜올 때, 두 사상 A , B 가 다음과 같을 때 상호배반인지 판단하시오.

- A : 선택된 프로그램이 NBC 방송망에 속하는 사상
- B : 선택된 프로그램이 CBS 방송망에 속하는 사상

• 풀이

- TV를 켜올 때 한 번에 하나의 채널만 선택되므로, 선택된 프로그램이 NBC와 CBS 방송망에 동시에 속할 수 없음
- 두 사상은 공통된 결과를 가지지 않으므로, $A \cap B = \emptyset$ 상호배반 사상임



<그림 7> 예제 2.10 벤 다이어그램

보충

• 독립사상과 상호배반 비교

• 독립사상

- 하나가 발생해도 다른 하나의 발생 확률이 그대로 유지
- e.g., 동전과 주사위를 각각 한 번 던질 때
 - A : 동전에서 앞면이 나오는 사상, B : 주사위에서 6이 나오는 사상
 - 동전의 결과가 주사위에서 6이 나올 확률에 영향을 주지 않으므로 독립 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

• 상호배반

- 하나가 발생하면 다른 하나는 발생 불가능
- e.g., 주사위를 한 번 던질 때
 - A : 짝수가 나오는 사상, B : 홀수가 나오는 사상
 - 한 번의 시행에서 짝수와 홀수가 동시에 나올 수 없으므로 상호배반 ($A \cap B = \emptyset$)

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

표본공간(Sample Space)

- 정의

- 통계적 실험에서 발생 가능한 모든 결과들의 집합

- 특징

- 일반적으로 기호 S 로 표현함
- 각 결과를 원소(Element or Member), 혹은 표본점(Sample Point)라고 함
- 결과가 유한한 경우 중괄호 안에 모든 표본점을 나열하여 표현할 수 있음
- 결과가 무한하거나 직접 나열하기 어려운 경우 수식 또는 조건을 이용하여 표현 가능함
 - e.g., $S = \{x | x \text{는 인구가 백만이 넘는 도시}\}$

표본공간(Sample Space)

- 정보보호에서의 활용
 - 암호키, 비밀번호, 해시값 등에서 발생 가능한 모든 결과 범위 정의
 - e.g., 4자리 숫자 비밀번호의 표본공간은 0000부터 9999까지이며, 총 10,000가지 결과로 구성
 - 가능한 암호키 전체로 구성된 키 공간 정의
 - e.g., 128비트 암호키의 표본공간은 가능한 모든 128비트 이진 문자열로 구성

표본공간(Sample Space)

• 예제 2.1

한 개의 주사위를 한 번 던지는 실험을 생각해 보자. 다음 각 경우의 표본공간을 구하시오.

1. 윗면에 나타난 숫자 자체에 관심을 가지는 경우
2. 윗면에 나타난 숫자가 짝수인지 홀수인지에만 관심을 가지는 경우

• 풀이

1. 윗면에 나타날 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로
 $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. 숫자의 구체적인 값이 아니라 짝수와 홀수만 구분하므로
 $S_2 = \{\text{짝수}, \text{홀수}\}$

표본공간(Sample Space)

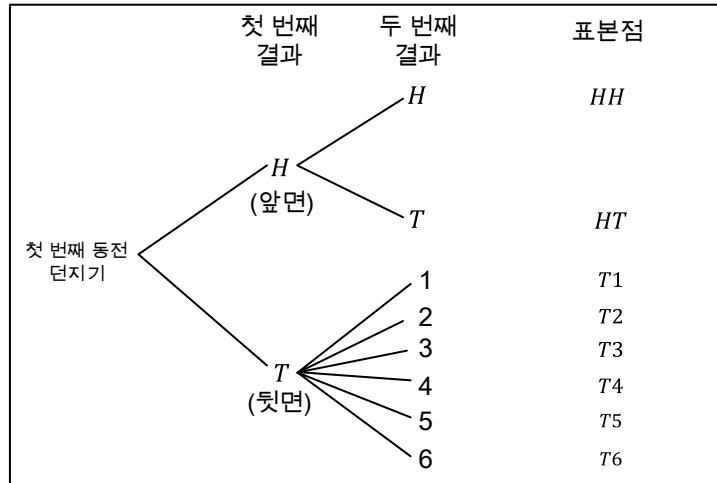
• 수형도(Tree Diagram) (1/2)

• 정의

- 통계적 실험에서 발생 가능한 결과를 트리구조로 단계별로 나타내어, 표본공간을 구성하는 표본점을 확인하는 도표

• 예제 2.2

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 다시 동전을 던지고, 뒷면이 나오면 한 개의 주사위를 던지는 실험의 수형도를 나타내고 표본공간을 구하시오.(H 는 앞면, T 는 뒷면)



• 풀이

- 첫 번째 동전의 결과에 따라 두 번째 시행이 달라지는 실험
- 첫 번째 결과가 앞면 H 이면 동전을 다시 던져 HH, HT 발생
- 첫 번째 결과가 뒷면 T 이면 주사위를 던져 $T1, T2, \dots, T6$ 발생
- 표본공간은 $S = \{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$ 임

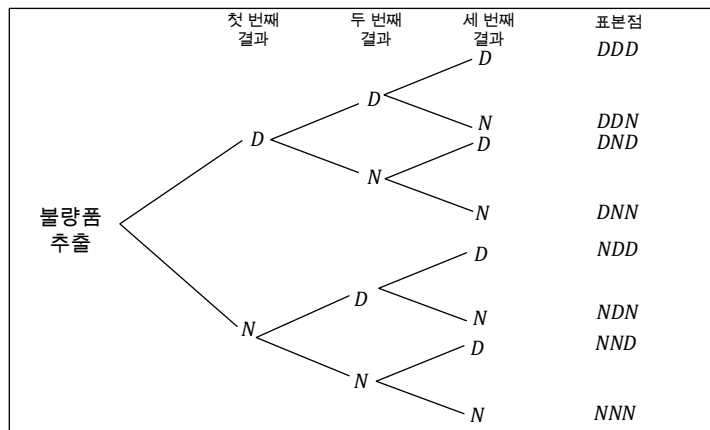
<그림 1> 예제 2.2의 수형도

표본공간(Sample Space)

• 수형도(Tree diagram) (2/2)

• 예제 2.3

제조공정에서 임의로 세 개의 제품을 추출하여 순서대로 검사한다. 각 제품을 불량품이면 D , 양품이면 N 으로 분류할 때, 가능한 모든 검사 결과를 수형도로 나타내고 표본공간 S 를 구하시오.



• 풀이

- 각 제품의 검사 결과는 D 또는 N 의 두 가지이므로, 세 번의 검사에서 가능한 결과의 수: $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$
- 첫 번째 경로를 따라가면 세 제품이 모두 불량품인 표본점 DDD 를 얻을 수 있으며, 나머지 경로도 같은 방법으로 확인 가능함
- 표본공간은 $S = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$ 임

<그림 2> 예제 2.3의 수형도

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

사상(Events)

- 정의

- 표본공간 S 에서 특정 조건을 만족하는 결과들로 이루어진 부분집합

- 정보보호에서의 활용

- 공격 성공 여부 정의

- e.g., 공격자가 추측한 비밀번호가 실제 비밀번호와 일치하여 인증에 성공하는 결과를 사상 A 로 정의

- 침입 탐지 시스템의 탐지 결과 분석

- e.g., 실제 공격 발생을 A , 경보 발생을 B 라고 할 때, 사상의 교집합과 여사상을 이용하여 정상 탐지, 미탐, 오탐 등의 탐지 결과를 구분

사상(Events)

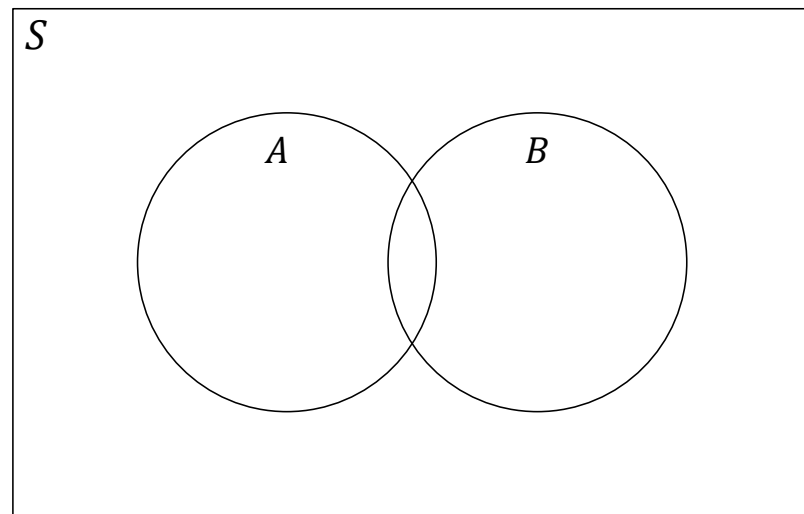
- 사상의 연산 및 관계
 - 공 집합(Empty Set)
 - 여집합(Complement)
 - 교 집합(Intersection)
 - 합 집합(Union)
 - 상호배반(Mutually exclusive or Disjoint)
- 예제 2.4

전자부품의 수명 t 를 년 단위로 측정할 때 표본공간이 $S = \{t | t \geq 0\}$ 으로 주어져 있다. 전자부품이 5년 이내에 고장 나는 사상 A 를 집합으로 나타내고, A 가 표본공간 S 의 부분집합인지 확인하시오.

- 풀이
 - 전자부품의 수명이 5년 이내라는 것은 수명 t 가 0년 이상 5년 미만임을 의미하므로:
 $A = \{t | 0 \leq t < 5\}$
 - 따라서 전자부품이 5년 이내에 고장 나는 사상 A 는 표본공간 S 의 부분집합임

사상(Events)

- 벤 다이어그램(Venn Diagram)
- 정의
 - 서로 다른 집합 또는 사상 사이의 관계를 도형으로 시각화한 그림
- 특징
 - 표본공간, 교집합, 합집합, 여집합 및 상호배반 관계 표현에 활용



<그림 3> 벤 다이어그램 예시

사상(Events)

- 공 집합(Empty Set)
 - 하나의 원소도 포함하고 있지 않은 집합
 - 표본공간에서 발생할 수 없는 결과를 나타내는 불가능 사상
 - e.g., 4자리 숫자 비밀번호에서 5자리 비밀번호가 생성되는 사상 A
 - 4자리로만 설정되어 있으므로 해당 결과는 발생할 수 없음($A = \emptyset$)
 - $\emptyset$ 로 표현
 - 예제 2.5

사상 B 가 다음과 같이 주어졌을 때, 사상 B 를 구하시오.
 $B = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{의 인수 중 짝수}\}$

- 풀이
 - 7의 인수는 1과 7이며, 그 중 짝수는 존재하지 않음($B = \emptyset$)

사상(Events)

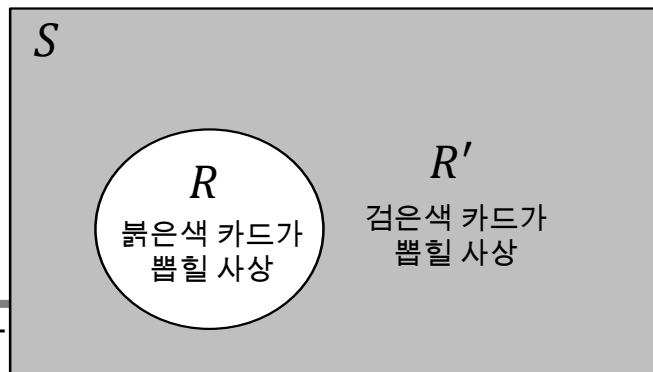
- 여집합(Complement)

- 표본공간 S 에서 특정 사상 A 에 속하지 않는 모든 결과의 집합
- 사상 A 가 발생하지 않는 경우를 의미
- A^c 또는 A' 로 표현
- 예제 2.6

52장의 트럼프 카드 중 한 장을 임의로 뽑는 실험에서, 표본공간 S 는 52장의 모든 카드로 구성된다. 붉은색 카드가 뽑히는 사상을 R 이라고 할 때, 여사상 R' 이 나타내는 사상을 구하시오.

- 풀이

- R' 은 표본공간 S 에서 사상 R 에 포함되지 않는 모든 결과의 집합임
- 따라서 R' 은 붉은색 카드가 아닌 검은색 카드가 뽑히는 사상임



<그림 4> 예제 2.6의 벤 다이어그램

사상(Events)

- 교집합(Intersection)

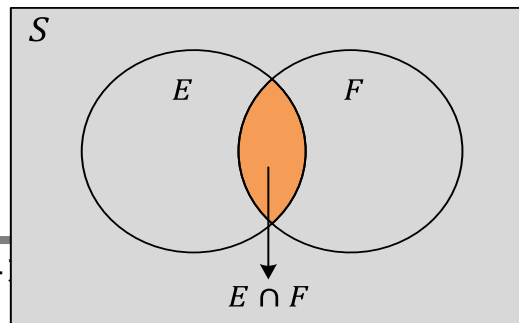
- 두 사상 A 와 B 에 공통으로 포함된 모든 결과의 집합
- 두 사상이 동시에 발생하는 경우를 의미
- $A \cap B$ 로 표현
- 예제 2.7

어느 교실에서 학생 한 명을 임의로 선택한다. 다음과 같이 두 사상을 정의할 때, 교집합 $E \cap F$ 가 나타내는 사상을 설명하시오.

- E : 선택된 학생의 전공이 공학인 사상
- F : 선택된 학생이 여성인 사상

- 풀이

- $E \cap F$ 는 사상 E 와 F 가 동시에 발생하는 경우이므로, 선택된 학생이 여성이면서 공학을 전공하는 사상을 의미함



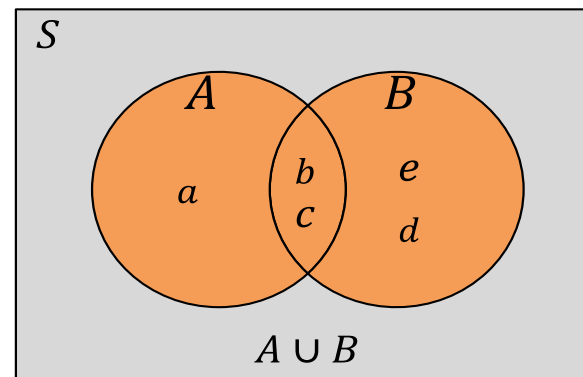
<그림 5> $E \cap F$ 의 벤 다이어그램

사상(Events)

- 합집합(Union)
 - 두 사상 A 와 B 중 적어도 하나에 포함되는 모든 결과의 집합
 - 사상 A 또는 B 가 발생하거나, 두 사상이 동시에 발생하는 경우까지 포함
 - $A \cup B$ 로 표현
 - 예제 2.8

$A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d, e\}$ 라 하면 $A \cup B$ 는 무엇인가?

- 풀이
 - $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ 임



<그림 6> $A \cup B$ 의 벤 다이어그램

사상(Events)

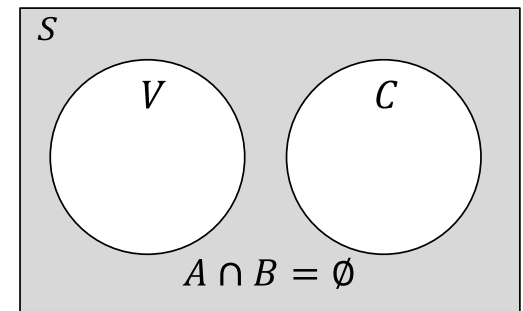
- 상호배반(Mutually exclusive or Disjoint) (1/2)
 - 두 사상이 공통된 결과를 가지지 않아 동시에 발생할 수 없는 관계
 - 두 사상의 교집합이 공집합인 경우를 의미
 - $A \cap B = \emptyset$ 로 표현
 - 예제 2.9

알파벳 한 글자를 임의로 선택하는 실험에서 다음 두 사상이 주어져 있다.

$$V = \{a, e, i, o, u\}, C = \{l, r, s, t\}$$

두 사상 V 와 C 가 상호배반인지 판단하시오.

- 풀이
 - 두 사상의 공통 원소를 구하면, $V \cap C = \emptyset$
 - V 와 C 는 공통으로 포함하는 원소가 없어 동시에 발생할 수 없으므로 상호배반임



<그림 7> 예제 2.9 벤 다이어그램

사상(Events)

• 상호배반(Mutually exclusive or Disjoint) (2/2)

• 예제 2.10

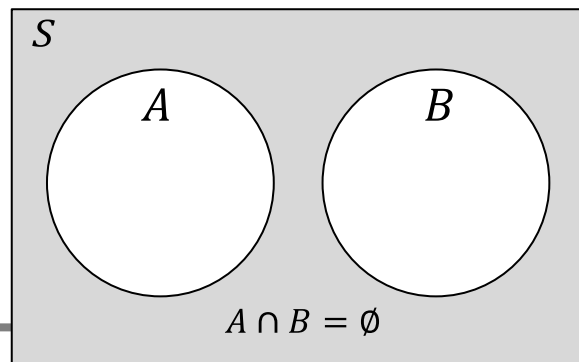
8개의 채널을 운영하는 한 유선방송회사가 있다. 이 중 3개 채널은 ABC, 2개 채널은 NBC, 1개 채널은 CBS 방송망에 속하며, 나머지 2개 채널은 각각 교육방송과 ESPN 스포츠 중계용이다.

가입자가 임의로 TV를 켰을 때, 두 사상 A , B 가 다음과 같을 때 상호배반인지 판단하시오.

- A : 선택된 프로그램이 NBC 방송망에 속하는 사상
- B : 선택된 프로그램이 CBS 방송망에 속하는 사상

• 풀이

- TV를 켰을 때 한 번에 하나의 채널만 선택되므로, 선택된 프로그램이 NBC와 CBS 방송망에 동시에 속할 수 없음
- 두 사상은 공통된 결과를 가지지 않으므로, $A \cap B = \emptyset$ 상호배반 사상임

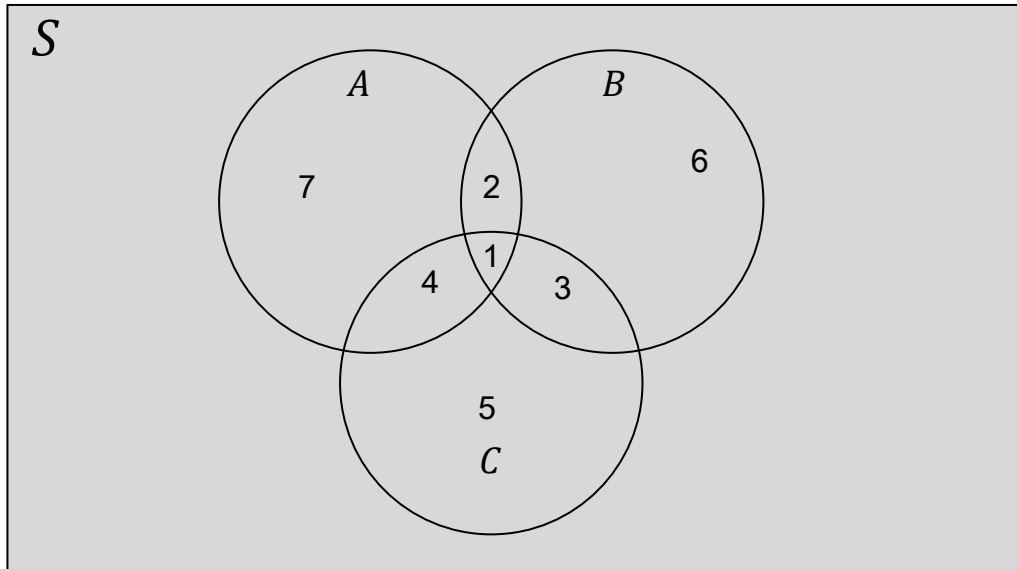


<그림 8> 예제 2.10 벤 다이어그램

사상(Events)

- 사상의 연산 및 관계 정리

- 벤 다이어그램을 이용하여 여러 사상의 연산 결과와 포함 관계를 쉽게 확인 가능



- $A \cap B =$ 영역 1과 2
- $B \cap C =$ 영역 1과 3
- $A \cup C =$ 영역 1, 2, 3, 4, 5 와 7
- $B' \cap A =$ 영역 4와 7
- $A \cap B \cap C =$ 영역 1
- $(A \cup B) \cap C' =$ 영역 2, 6 과 7

<그림 9> 사상 A, B, C의 벤 다이어그램

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

경우의 수(Number of Cases)

- 정의

- 주어진 조건을 만족하는 표본점 또는 가능한 방법의 개수

- 정보보호에서의 활용

- 비밀번호 후보 수 계산

- e.g., 4자리 숫자 비밀번호 $10^4 = 10,000$ 가지의 가능한 비밀번호로 구성

- 암호키의 보안 강도 평가

- e.g., 128비트 암호키의 가능한 키는 2^{128} 가지이므로 전수조사 공격에 필요한 범위 파악 가능

- 다단계 인증 방식의 조합 수 계산

- e.g., 로그인 방식 2가지와 추가 인증 방식 3가지를 조합하면 $2 \times 3 = 6$ 가지 인증 과정 존재

경우의 수(Number of Cases)

- 계산 방법
 - 합의 법칙(Addition Rule)
 - 곱의 법칙(Multiplication Rule)
 - 순열(Permutation)
 - 분할(Partition)
 - 조합(Combination)

경우의 수(Number of Cases)

- 합 의 법칙(Addition Rule) (1/2)

- 정의

- 두 가지 이상의 방법 중 어느 하나를 선택하는 경우, 각 방법의 경우의 수를 더하여 전체 경우의 수를 구하는 법칙

- 계산 방법

- 두 사상 A 와 B 가 상호배반인 경우

$$n(A \cup B) = n_1 + n_2$$

- 여러 사상이 서로 상호배반인 경우

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

경우의 수(Number of Cases)

- 합의 법칙(Addition Rule) (2/2)

- 예제 2.11

한 카페에서 음료 한 잔을 선택하려고 한다. 커피 메뉴는 4가지, 차 메뉴는 3가지가 있을 때 선택할 수 있는 음료의 경우의 수를 구하시오.

- 풀이

- 커피 메뉴를 선택하는 경우의 수: 4가지
- 차 메뉴를 선택하는 경우의 수: 3가지
- 음료 한 잔만 선택하므로 커피와 차를 동시에 선택하지 않음
- 따라서 합의 법칙을 적용하면 $4 + 3 = 7$, 7가지임

경우의 수(Number of Cases)

- 곱의 법칙(Multiplication Rule) (1/4)

- 정의

- 여러 단계의 선택이 차례로 이루어지는 경우, 각 단계에서 가능한 경우의 수를 곱하여 전체 경우의 수를 구하는 법칙

- 계산 방법

- 두 단계의 선택이 이루어지는 경우

$$n = n_1 \times n_2$$

- 여러 단계의 선택이 이루어지는 경우

$$n = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

경우의 수(Number of Cases)

- 곱의 법칙(Multiplication Rule) (2/4)

- 예제 2.12

한 쌍의 주사위를 한 번 던지는 경우 표본공간에는 얼마나 많은 표본점들이 존재하게 되는가?

- 풀이

- 첫 번째 주사위로 인한 결과의 수: $n_1 = 6$
- 두 번째 주사위로 인한 결과의 수: $n_2 = 6$
- 따라서 한 쌍의 주사위를 한 번 던지는 경우 표본점의 수: $n_1 \times n_2 = 36$

경우의 수(Number of Cases)

- 곱의 법칙(Multiplication Rule) (3/4)

- 예제 2.13

한 아파트를 선택할 때 외관 디자인은 4가지, 내부 평면 구조는 3가지 중에서 각각 하나씩 선택할 수 있다. 선택 가능한 아파트 유형의 경우의 수를 구하시오.

- 풀이

- 외관 디자인을 선택하는 경우의 수: $n_1 = 4$
- 내부 평면 구조를 선택하는 경우의 수: $n_2 = 3$
- 외관 디자인과 내부 구조를 각각 하나씩 선택하므로 $n_1 \times n_2 = 12$

경우의 수(Number of Cases)

- 곱의 법칙(Multiplication Rule) (4/4)

- 예제 2.14

22명의 클럽 회원 중에서 회장과 총무를 선임할 수 있는 방법의 수는 몇 가지인가?

- 풀이

- 회장 자리에 가능한 가짓수는 22가지이고 이 각각의 가짓수마다 총무를 선임할 수 있는 가짓수는 21가지임
- 따라서 가능한 총 가짓수는: $22 \times 21 = 462$

- 예제 2.15

샘이 컴퓨터를 조립하려고 한다. CPU는 2개 회사, 하드 디스크는 4개 회사, 메모리는 3개 회사, 액세서리는 5개 상점으로부터 주문할 수 있다면, 샘이 부품을 주문할 수 있는 총 가짓수는 얼마인가?

- 풀이

- 각각 순서대로 n_1, n_2, n_3, n_4 라고 가정
- 가능한 총 가짓수: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation) (1/5)

- 정의

- 서로 다른 원소 중 일부 또는 전부를 선택하여, 순서를 고려해 배열하는 경우의 수를 구하는 방법

- 계산 방법

- 서로 다른 n 개의 대상을 모두 나열하는 경우

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

- $n = 0$ 인 경우에는 $0! = 1$ 로 정의
- 서로 다른 n 개의 대상 중 r 개를 선택하여 순서대로 나열하는 경우

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation) (2/5)

- 예제 2.16

3개의 영문자 a,b,c에 대한 순열의 수는 몇 개인가?

- 풀이

- 첫 번째 위치에 올 수 있는 문자의 수: $n_1 = 3$
- 두 번째 위치에 올 수 있는 문자의 수: $n_2 = 2$
- 세 번째 위치에 올 수 있는 문자의 수: $n_3 = 1$
- 따라서 전체 가짓수: $n_3 \times n_2 \times n_1 = 6$

- 예제 2.17

통계학과 25명의 대학원생들을 대상으로 세 가지 상(연구, 교육, 봉사)을 주려고 한다.
한 사람당 최대 한 개의 상만 받을 수 있다고 할 때, 상을 수여하는 방법은 총 몇가지나 되겠는가?

- 풀이

- 상의 종류가 다르므로 이것은 순열 문제임
- 가능한 총 가짓수: ${}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25 \times 24 \times 23 = 13,800$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation) (3/5)
- 원순열(Circular permutation)
 - 정의
 - 서로 다른 원소를 원형으로 배열하는 방법
 - 계산 방법
 - 회전하여 일치하는 배열은 동일하게 간주하므로, $n!$ 을 n 으로 나눔

$$\frac{n!}{n} = (n-1)! = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

• 예제 2.18

네 사람을 원형 탁자에서 카드놀이를 할 경우 자리에 앉는 경우의 수를 구하시오

- 풀이
 - 원형 배열에서는 전체 배열을 회전하여 일치하는 경우를 동일한 배열로 간주함
 - 한 사람을 기준으로 고정하고, 나머지 사람을 배치하는 경우의 수를 구하면 됨
 - 따라서 총 가짓수: $(4-1)! = 6$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation) (4/5)

- 같은 것을 포함하는 순열 (1/2)

- 정의

- 일부 대상이 서로 같은 경우, 같은 대상을 서로 바꾸어도 동일한 배열로 간주하여 나열하는 방법

- 계산 방법

- 전체 n 개의 대상 중 같은 대상이 각각 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 개씩 있는 경우

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

- 예제 2.19

대학 축구선수 10명을 일렬로 세우려고 한다. 이들 10명을 학년으로 구분했을 때 1학년이 1명, 2학년이 2명, 3학년이 4명, 4학년이 3명이라면, 이들을 학년만을 구분하여 일렬로 세울 수 있는 방법은 몇 가지나 되겠는가?

- 풀이

- 같은 학년끼리는 서로 자리를 바꾸어도 학년 배열이 달라지지 않으므로 수식을 이용해 풀어보면 $\frac{10!}{1!2!4!3!} = 12,600$

경우의 수(Number of Cases)

- 순열(Permutation) (5/5)
- 같은 것을 포함하는 순열 (2/2)
 - 예제 2.20

STATISTICS라는 단어의 문자들로 만들 수 있는 가능한 배열의 가짓수는 얼마인가?

- 풀이
 - 10개의 문자 중 S와 T는 세 번, I는 두 번, A와 C는 각각 한 번씩 나타남
 - 공식을 이용하면 $\binom{10}{3, 3, 2, 1, 1} = \frac{10!}{3!3!2!1!1!} = 50,400$

경우의 수(Number of Cases)

- 분할(Partition)

- 정의

- 서로 다른 n 개의 원소를 서로 겹치지 않는 여러 부분집합으로 나누는 경우의 수를 구하는 방법

- 계산 방법

- 전체 n 개의 대상을 각각 $n_1, n_2, \dots, n_r$ 개의 원소 이루어진 부분집합으로 나누는 경우(단, $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$)

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

- 예제 2.21

7명의 대학원생을 3인용 객실 하나와 2인용 객실 둘에 투숙시키는 방법은 몇 가지 인가?

- 풀이

- 가능한 분할의 총 가짓수: $\binom{7}{3, 2, 2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$

경우의 수(Number of Cases)

- 조합(Combination)

- 정의

- 서로 다른 n 개의 원소 중 r 개를 선택할 때, 순서를 고려하지 않는 경우의 수를 구하는 방법

- 계산 방법

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r$$

- 예제 2.22

한 소년이 5가지의 컴퓨터 게임을 사려고 한다. 10개의 아케이드 게임 중에서 3게임, 5개의 스포츠 게임 중에서 2게임을 선택하는 방법은 모두 몇 가지인가?

- 풀이

- 10개의 아케이드 게임 중 3게임을 고르는 가짓수는 $\frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$
- 5개의 스포츠 게임 중 2게임을 고르는 가짓수는 $\frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$
- 곱의 법칙을 이용하면 $120 \times 10 = 1200$ 가지 방법이 존재함

경우의 수(Number of Cases)

• 계산 방법 정리

구분	적용 상황	계산 방법
합의 법칙	여러 방법 중 하나를 선택하는 경우	$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
곱의 법칙	여러 단계의 선택이 차례로 이루어지는 경우	$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$
순열	서로 다른 n 개의 원소 중 r 개를 배열하는 경우	${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
원순열	서로 다른 n 개의 원소를 원형으로 배열하는 경우	$\frac{n!}{n} = (n-1)!$
같은 것을 포함하는 순열	같은 원소가 포함된 n 개의 원소를 배열하는 경우	$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$
분할	서로 다른 n 개의 원소를 정해진 크기의 부분집합으로 나누는 경우	$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$
조합	서로 다른 n 개의 원소 중 r 개를 선택하는 경우	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = {}_nC_r$

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

사상의 확률(Probability)

- 정의

- 특정 사상이 발생할 가능성을 0과 1사이의 수로 나타낸 값

- 특징

- 각 표본점에 부여된 확률을 가중치(Weight)라고 표현함
- 사상 A 의 확률은 사상 A 에 포함된 모든 표본점들의 가중치의 합임
 - $0 \leq P(A) \leq 1, P(\emptyset) = 0, P(S) = 1$
- $A_1, A_2, A_3, \dots$ 가 서로 배반인 경우, 확률을 더하여 계산함
 - $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$
- 전체 N 개의 결과가 동일한 확률로 발생하고, 사상 A 가 그 중 n 개의 표본점을 포함하는 경우
 - $P(A) = \frac{n}{N}$

사상의 확률(Probability)

- 정보보호에서의 활용

- 특정 보안 사상이 발생할 가능성을 수치로 나타내기 위함
 - e.g., 비밀번호 추측 공격의 성공 확률 계산
- 여러 보안 사상의 발생 가능성을 비교하기 위함
 - e.g., 취약점별 악용 가능성을 비교하여 우선 패치 대상 결정

- 예제 2.23

하나의 동전을 두 번 던지는 실험에서 적어도 한 번은 앞면이 나올 확률은? (H 는 앞면, T 는 뒷면)

- 풀이

- 표본공간 $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
 - 동전의 앞면과 뒷면의 발생확률이 같다고 가정하고, 각 표본점에 확률 w 를 할당하면 $w = \frac{1}{4}$
 - A 를 적어도 한 번의 앞면이 나올 사상이라고 한다면 $A = \{HH, HT, TH\}$
 - 따라서 $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

사상의 확률(Probability)

• 예제 2.24

짝수가 홀수보다 2배만큼 더 발생하는 주사위가 있다. 그 주사위를 한 번 던져 4보다 작은 수가 나올 사상을 E 라할 때, $P(E)$ 를 구하여라

• 풀이

- 표본공간은 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이고 각 홀수에는 w , 각 짝수에는 $2w$ 의 확률을 할당하면, 확률의 합이 1이 되어야 하므로 $9w = 1$, 즉 $w = \frac{1}{9}$
- 따라서 각 홀수가 나올 확률은 $\frac{1}{9}$, 각 짝수가 나올 확률은 $\frac{2}{9}$ 임
- $E = \{1, 2, 3\}$ 이므로 $P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$ 임

사상의 확률(Probability)

• 예제 2.25

예제 2.24에서 짝수가 나타날 사상을 A , 3으로 나누어질 수 있는 수가 나타날 사상을 B 라고 할 때 $P(A \cup B)$ 와 $P(A \cap B)$ 를 구하시오.

• 풀이

- $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ 이므로, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$ 이고, $A \cap B = \{6\}$ 임
- 따라서 $P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$ 임

• 예제 2.26

25명의 산업공학, 10명의 기계공학, 10명의 전기공학, 8명의 토목공학 학생들로 구성된 통계학 수업이 있다. 이 중 1명의 학생을 임의로 뽑을 때 그 학생이 (a)산업공학 학생, (b)토목공학이나 전기공학 학생일 확률을 각각 구하여라

• 풀이

- 총 53명의 산업, 기계, 전기, 토목공학 학생을 각각 I , M , E , C 로 표현함
- (a) 53명 중 산업공학 학생은 25명이므로 $P(I) = \frac{25}{53}$
- (b) 토목공학이나 전기공학 학생은 모두 18명이므로 $P(C \cup E) = \frac{18}{53}$

사상의 확률(Probability)

- 접근법 (1/3)

- 정의

- 사상의 확률을 어떤 기준과 방법으로 결정하거나 해석할 것인지를 나타내는 방식

- 종류

- 상대도수 접근법(Relative Frequency Approach)
- 무차별 접근법(Indifference Approach)
- 주관적 접근법(Subjective Approach)

사상의 확률(Probability)

• 접근법 (2/3)

*상대도수: 전체 시행 횟수 중 특정 사상이 발생한 횟수의 비율

• 상대도수 접근법(Relative Frequency Approach)

- 동일한 실험을 반복할 때, 시행 횟수가 증가함에 따라 특정 사상의 상대도수가 안정되는 값을 확률로 해석하는 방법
- 동일한 시행을 반복할 수 있고 충분한 관측 자료가 존재하는 경우 사용
 - e.g., 동전을 1,000번 던져 앞면이 503번 나온 경우, 앞면의 상대도수는 $\frac{503}{1000} = 0.503$

• 무차별 접근법(Indifference Approach)

- 모든 표본점의 발생 가능성이 같다고 가정하고, 전체 표본점 중 해당 사상에 포함된 표본점의 비율로 확률을 구하는 방법
- 표본점의 발생 가능성이 동일하다고 가정할 수 있는 경우 사용
 - e.g., 공정한 주사위에서는 1, 2, 3, 4, 5, 6이라는 각 표본점의 확률이 모두 $\frac{1}{6}$ 이고, 짝수 사상 {2, 4, 6}의 확률은 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

사상의 확률(Probability)

- 접근법 (3/3)
 - 주관적 접근법(Subjective Approach)
 - 과거 자료, 경험, 전문 지식 등을 바탕으로 개인이 판단한 발생 가능성을 확률로 표현하는 방법
 - 관측 자료가 부족하여 전문가의 경험과 판단이 필요한 경우 사용
 - e.g., 보안 전문가가 취약점 정보와 과거 공격 사례를 바탕으로 랜섬웨어 공격 발생 확률을 70%로 평가

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

가법정리(Additive Rule)

- 개요

- 사상 A 또는 B 중 적어도 하나의 사상이 발생할 확률을 구하는 정리

- 계산 방법

- 두 사상 A 와 B 중 적어도 하나의 사상이 발생할 확률

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- 두 사상 A 와 B 가 상호배반인 경우

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- $A_1, A_2, \dots, A_n$ 이 표본공간 S 를 분할하는 경우

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1$$

- 사상을 A, B, C 세 개로 확장한 경우

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- 만약 사상 A 와 A' 가 서로 여집합 관계에 있는 경우

$$P(A) + P(A') = 1$$

가법정리(Additive Rule)

• 예제 2.27

졸업을 앞둔 존이 두 회사에 입사면접을 본 결과, 회사 A에 합격할 확률은 0.8, 회사 B에 합격할 확률은 0.6, 두 회사에 모두 합격할 확률은 0.5로 판단된다. 이 두 회사 중 최소한 한 회사에 합격할 확률은 얼마인가?

- 풀이

- 가법정리를 이용하면: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$

• 예제 2.28

한 쌍의 주사위를 던졌을 때 나타난 두 눈의 합이 7이나 11이 될 확률은 얼마인가?

- 풀이

- 눈의 합이 7이 될 사상을 A, 11이 될 사상을 B라 하면, 합이 7이 되는 경우는 36개의 표본점 중 6가지이고, 합이 11이 될 사상은 2가지 경우가 존재함

- 모든 표본점의 발생확률이 동일하므로 $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{18}$

- 합이 7이 되는 경우와 11이 되는 경우는 동시에 발생할 수 없으므로 A와 B는 서로 배반임

- 따라서 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$ 임

가법정리(Additive Rule)

• 예제 2.29

새 자동차를 사려고 하는 어느 고객이 녹색, 백색, 적색, 혹은 흑색의 자동차를 구입할 확률이 각각 0.09, 0.15, 0.21, 0.23이라고 할 때, 그 고객이 네 가지 색 중 어느 한 가지 색의 차를 구입할 확률은 얼마인가?

• 풀이

- 고객이 녹색, 백색, 적색, 흑색의 차를 구입할 사상을 각각 G, W, R, B 라 하면, 이 네 사상은 서로 배반이므로 구하는 확률은 $P(G \cup W \cup R \cup B) = P(G) + P(W) + P(R) + P(B)$
- $0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23 = 0.68$

• 예제 2.30

어떤 자동차 정비공이 하루 동안 정비하는 자동차의 수가 3, 4, 5, 6, 7 혹은 8대 이상이 될 확률이 각각 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10, 0.07이라고 할 때, 그가 다음번 작업일에 적어도 5대 이상을 정비할 확률은 얼마인가?

• 풀이

- 적어도 5대의 차를 수리할 사상을 E 라 하면 $P(E) = 1 - P(E')$ 이며 여기서 E' 는 5대 미만의 차를 수리할 사상임
- $P(E') = 0.12 + 0.19 = 0.31$ 이므로 가법정리에 의해 $P(E) = 1 - 0.31 = 0.69$

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

조건부 확률(Conditional Probability)

- 정의

- 사상 A 가 발생했다는 조건에서 사상 B 가 발생할 확률

- 계산 방법

- 사상 A 가 발생하면 표본공간이 S 에서 A 로 제한되고, 그 중 사상 B 도 발생하는 결과는 $A \cap B$ 이므로 다음과 같이 유도됨

$$P(B | A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(A)/n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

- 정보보호에서의 활용

- 특정 조건이나 증거가 주어졌을 때 보안 사고의 발생 가능성을 판단하기 위함
 - e.g., 비정상 로그인 기록이 관찰된 경우 계정 탈취 확률 계산

조건부 확률(Conditional Probability)

• 예제 2.31

정규스케줄에 따라 비행기가 정시에 출발할 확률은 $P(D) = 0.83$ 이고, 정시에 도착할 확률은 $P(A) = 0.82$ 이며, 정시에 출발하여 정시에 도착할 확률은 $P(D \cap A) = 0.78$ 라 하자.

- 비행기가 정시에 출발했을 때 정시에 도착할 확률을 구하여라
- 비행기가 정시에 도착했을 때 정시에 출발했을 확률을 구하여라

• 풀이

$$\text{a. } P(A|D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.94$$

$$\text{b. } P(D|A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.95$$

• 예제 2.32

옷감의 10%는 길이불량, 5%는 직조불량, 0.8%는 두 불량 모두를 가지고 있다고 한다. 생산된 옷감 하나를 임의로 선택하여 검사한 결과가 길이불량이었다고 할 때, 이것이 직조불량일 확률은 얼마인가?

• 풀이

- 길이불량일 사상을 L , 직조불량일 사상을 T 라고 하면 길이불량이었을 때 직조불량일 확률은

$$P(T|L) = \frac{P(T \cap L)}{P(L)} = \frac{0.008}{0.1} = 0.08$$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 독립사상(Independent Event)

- 정의

- 한 사상의 발생 여부가 다른 사상의 발생 확률에 영향을 주지 않는 두 사상

- 독립 조건

- $P(B | A) = P(B)$, $P(A | B) = P(A)$ 혹은 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- 예제 2.33

동전을 두 번 던진다. 다음과 같이 사상 A 와 B 를 정의할 때, 두 사상이 독립인지 판단하시오.

- A : 첫 번째 던지기에서 앞면이 나오는 사상, B : 두 번째 던지기에서 앞면이 나오는 사상

1. $P(A)$ 와 $P(B)$ 를 구하시오,
2. $P(A \cap B)$ 를 구하고, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 가 성립하는지 확인하여 독립 여부를 판단하시오.

- 풀이

1. $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2. 사상 $A \cap B$ 는 첫 번째와 두 번째 모두 앞면이 나오는 경우이므로 $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
또한 $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 이므로 독립임

보충

• 독립사상과 상호배반 비교

• 독립사상

- 하나가 발생해도 다른 하나의 발생 확률이 그대로 유지
- e.g., 동전과 주사위를 각각 한 번 던질 때
 - A : 동전에서 앞면이 나오는 사상, B : 주사위에서 6이 나오는 사상
 - 동전의 결과가 주사위에서 6이 나올 확률에 영향을 주지 않으므로 독립 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

• 상호배반

- 하나가 발생하면 다른 하나는 발생 불가능
- e.g., 주사위를 한 번 던질 때
 - A : 짝수가 나오는 사상, B : 홀수가 나오는 사상
 - 한 번의 시행에서 짝수와 홀수가 동시에 나올 수 없으므로 상호배반 ($A \cap B = \emptyset$)

조건부 확률(Conditional Probability)

- 종속사상(Dependent Event)

- 정의

- 한 사상의 발생 여부가 다른 사상의 발생 확률에 영향을 주는 두 사상

- 종속 조건

- $P(B | A) \neq P(B)$, $P(A | B) \neq P(A)$ 혹은 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

- 예제 2.34

주머니에 빨간 공 3개와 파란 공 2개가 있다. 공을 한 개 뽑은 뒤 다시 넣지 않고 두 번째 공을 뽑는다. 다음과 같이 사상 A 와 B 를 정의할 때, 두 사상이 종속인지 판단하시오. (A : 첫 번째에 빨간 공을 뽑는 사상, B : 두 번째에 빨간 공을 뽑는 사상)

1. $P(A)$ 와 $P(B)$ 를 구하시오
2. $P(A \cap B)$ 를 구하고, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 가 성립하는지 확인하여 종속 여부를 판단하시오

- 풀이

1. $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$

2. 첫 번째에 빨간 공을 뽑은 뒤에는 빨간 공 2개를 포함한 공 4개가 남으므로

$$P(B | A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ 따라서 } P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \text{ 또한 } \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \text{ 이므로 } \frac{3}{10} \neq \frac{9}{25} \text{ 이므로 종속}$$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule) (1/4)

- 정의

- 두 사상 A 와 B 가 모두 발생할 확률을 한 사상의 확률과 다른 사상의 조건부 확률의 곱으로 구하는 정리

- 계산 방법

- 두 사상의 경우

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$

- 여러 사상으로 확장한 경우

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_k | A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})$$

- 두 사상이 독립인 경우

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule) (2/4)

- 예제 2.35

20개의 퓨즈가 들어 있는 상자가 있는데, 그 중 5개가 불량품이라고 가정하자. 이 상자로부터 2개의 퓨즈를 연속적으로 비복원 추출한다고 할 때, 2개의 퓨즈가 모두 불량품일 확률은 얼마인가?

- 풀이

- 첫 번째 퓨즈가 불량품일 사상을 A , 두 번째 퓨즈가 불량품일 사상을 B 라고 가정
- $A \cap B$ 는 A 가 일어나고 그 뒤에 B 가 일어나는 사상이라고 해석 가능함
- 첫 번째 퓨즈가 불량품일 확률은 $\frac{1}{4}$, 두 번째 퓨즈가 불량품일 확률은 $\frac{4}{19}$ 가 됨
- 따라서, $P(A \cap B) = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}$

조건부 확률(Conditional Probability)

- 승법정리(Multiplication Rule) (3/4)

- 예제 2.36

첫 번째 가방에는 4개의 흰 공과 3개의 검은 공이 들어있고 두 번째 가방에는 3개의 흰 공과 5개의 검은 공이 들어있다고 가정할 때 첫 번째 가방에서 공 하나를 꺼낸 후 보지 않고 두 번째 가방에 넣은 후, 두 번째 가방에서 검은 공을 꺼낼 확률은?

- 풀이

- 첫 번째 가방에서 검은 공을 뽑을 사상을 B_1 , 두 번째 가방에서 검은 공을 뽑을 사상을 B_2 , 첫 번째 가방에서 흰 공을 뽑을 사상을 W_1 이라고 가정
- 모든 경우는 배반적인 두 사상 ($B_1 \cap B_2$)와 ($W_1 \cap B_2$)이므로 구하고자 하는 확률은: $P(B_1 \cap B_2)$ 또는 $(W_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(W_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2 | B_1) + P(W_1)P(B_2 | W_1) = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{38}{63}$
- 따라서 검은 공을 꺼낼 확률은 $\frac{38}{63}$ 임

조건부 확률(Conditional Probability)

• 승법정리(Multiplication Rule) (4/4)

• 예제 2.37

어느 조그만한 도시에는 비상시에 대비해 소방차 한 대와 앰블런스 한 대를 보유하고 있다. 소방차가 필요할 때 바로 사용할 수 있을 확률이 0.98이고, 앰블런스가 필요할 때 바로 사용할 수 있을 확률이 0.92라고 한다. 화재가 나서 부상자가 발생했을 때 소방차와 앰블런스를 모두 사용할 수 있는 확률을 구하라.

• 풀이

- 소방차와 앰블런스의 사용가능한 사상을 각각 A, B 라 가정
- $P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.98)(0.92) = 0.9016$

• 예제 2.38

한 벌의 카드에서 3장의 카드를 연속적으로 비복원추출하는 실험에서 첫 번째 카드가 붉은색 A_1 일 사상을 A_1 , 두 번째 카드가 10이나 J 일 사상을 A_2 , 세 번째 카드가 3보다 크고 7보다 작은 사상을 A_3 라 할 때, 사상 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 가 일어날 확률은?

• 풀이

- $P(A_1) = \frac{2}{52}, P(A_2 | A_1) = \frac{8}{51}, P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50}$ 임
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \left(\frac{2}{52}\right)\left(\frac{8}{51}\right)\left(\frac{12}{50}\right) = \frac{8}{5525}$

목 차

- 표본공간(Sample Space)
- 사상(Events)
- 경우의 수(Number of Cases)
- 사상의 확률(Probability)
- 가법정리(Additive Rule)
- 조건부 확률(Conditional Probability)
- 베이즈 정리(Bayes' Rule)

베이즈 정리(Bayes' Rule)

• 전확률의 정리(Theorem of Total Probability) (1/2)

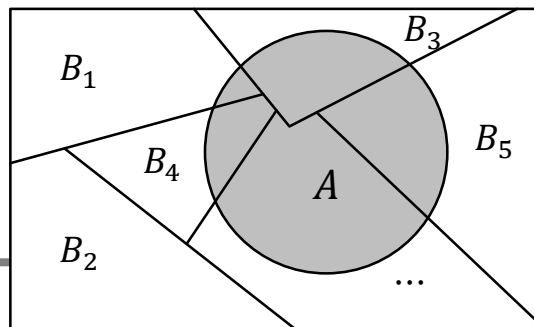
• 개요

- 표본공간 S 를 서로 배반인 사상들로 분할하고, 각 사상의 확률과 그 조건에서 A 가 발생할 조건부확률을 이용하여 A 의 전체 확률을 구하는 정리

• 계산 방법

- 사상 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 를 표본공간 S 의 분할이고, $P(B_i) > 0$ 일 때, 임의의 사상 A 는 서로 배반인 $A \cap B_i$ 들로 분할되므로 다음과 같이 유도됨

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k) = P(B_1)P(A | B_1) + \dots + P(B_k)P(A | B_k) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A | B_i)$$



<그림 10> 전확률의 정리

베이즈 정리(Bayes' Rule)

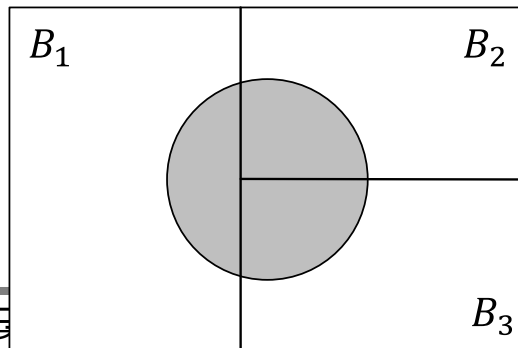
• 전확률의 정리(Theorem of Total Probability) (2/2)

• 예제 2.39

3대의 기계 B_1 , B_2 , B_3 가 각각 전체 생산량의 30%, 45%, 25%를 생산하는 어느 조립 공장에서 각 기계의 불량품 제조율이 2%, 3%, 2%라면, 완제품 중에서 하나를 선택했을 때, 그것이 불량품일 확률은 얼마인가?

• 풀이

- A : 그 제품이 불량품일 사상
- B_1 : 그 제품이 B_1 에서 제조되었을 사상
- B_2 : 그 제품이 B_2 에서 제조되었을 사상
- B_3 : 그 제품이 B_3 에서 제조되었을 사상
- 전확률 정리를 이용:
$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$
$$= (0.3)(0.02) + (0.45)(0.03) + (0.25)(0.02)$$
$$= 0.0245$$



<그림 11> 예제 2.39, 2.40 표본공간

베이즈 정리(Bayes' Rule)

- 개요

- 관찰된 결과 A 를 바탕으로, 전확률의 정리를 이용하여 원인 B_r 이 발생했을 조건부확률을 계산하는 정리

- 계산 방법

- 조건부확률과 승법정리를 적용하고, 분모 $P(A)$ 에 전확률의 정리를 대입하면 다음과 같이 유도됨

$$P(B_r | A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_r)P(A | B_r)}{P(A)} = \frac{P(B_r)P(A | B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A | B_i)}$$

- 정보보호에서의 활용

- 로그인 기록, 탐지 경고 등의 새로운 보안 증거를 반영하여 공격 원인의 확률을 갱신
 - e.g., 침입 탐지 경고가 발생했을 때 기존 침입 발생률, 탐지율, 오탐률을 이용하여 실제 침입일 확률 계산

베이즈 정리(Bayes' Rule)

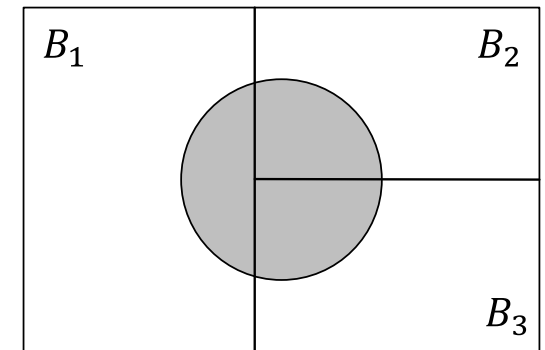
• 예제 2.40

3대의 기계 B_1, B_2, B_3 가 각각 전체 생산량의 30%, 45%, 25%를 생산하는 어느 조립 공장에서 각 기계의 불량품 제조율이 2%, 3%, 2%이다. 임의로 선택된 제품이 불량품이라고 알려졌을 때, 그 제품이 기계 B_3 에서 제조되었을 확률은 얼마인가?

• 풀이

- A : 그 제품이 불량품일 사상
- B_1 : 그 제품이 B_1 에서 제조되었을 사상
- B_2 : 그 제품이 B_2 에서 제조되었을 사상
- B_3 : 그 제품이 B_3 에서 제조되었을 사상
- 베이즈 정리를 이용하면:

$$\begin{aligned} P(B_3 | A) &= \frac{P(B_3)P(A | B_3)}{P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + P(B_3)P(A | B_3)} \\ &= \frac{0.005}{0.006 + 0.0135 + 0.005} = \frac{0.005}{0.0245} = \frac{10}{49} \end{aligned}$$



<그림 12> 예제 2.39, 2.40 표본공간

베이즈 정리(Bayes' Rule)

• 예제 2.41

임의로 선택한 한 제품의 결과가 불량인 경우, 어느 분석법을 사용했을 가능성이 가장 많은 확률은 무엇인가?

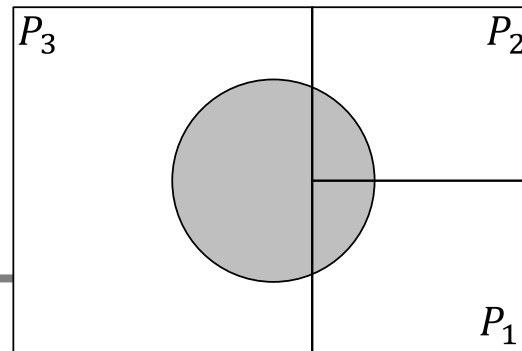
- 조건 1: 제품 개발 시 분석법 1, 2, 3을 제품의 30%, 20%, 50%에 각각 적용함
- 조건 2: 불량률은 각각 $P(D|P_1) = 0.01$, $P(D|P_2) = 0.03$, $P(D|P_3) = 0.02$

• 풀이

- 구해야 할 확률은 $P(P_1|D)$, $P(P_2|D)$, $P(P_3|D)$ 임

$$\begin{aligned} P(P_1|D) &= \frac{P(P_1)P(D|P_1)}{P(P_1)P(D|P_1)+P(P_2)P(D|P_2)+P(P_3)P(D|P_3)} \\ &= \frac{(0.3)(0.01)}{(0.3)(0.01)+(0.2)(0.03)+(0.5)(0.02)} = \frac{0.003}{0.019} = 0.158 \end{aligned}$$

- 같은 방식으로 계산하면 $P(P_2|D) = 0.316$, $P(P_3|D) = 0.526$ 이 나옴
- 따라서 분석법 3을 사용했을 가능성이 큼



<그림 13> 예제 2.41 표본공간

Thanks!

김민식(minsik@pel.sejong.ac.kr)