2026/09/21, 2026 확률 기초 세미나

이공학도를 위한 확률 및 통계학

-3장 확률변수와 확률분포-

서 진 우(jinwoo@pel.sejong.ac.kr)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

- 확률변수의 개념
- 확률분포와 누적분포함수
- 결합확률분포

목 차

- 확률변수의 개념
- 확률분포와 누적분포함수
- 결합확률분포

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable) (1/9)
  - 정의
    - 표본공간 내 각 원소에 하나의 실수 값을 대응시키는 함수
  - 특징
    - 주로 대문자 표기하며, 그에 대응하는 하나의 값은 소문자 표기
      - e.g., X: 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수, x: 실제 나온 값
    - 확률변수가 특정 값을 가지는 사건은 표본공간의 부분집합과 동일
      - e.g., 로그인 시도 100건(표본공간) 중 X="악성 여부"일 때, 사건 $\{X = 1\}$은 실제 악성으로 판정된 시도들의 부분집합에 대응
  - 종류
    - 이산형 확률변수(Discrete Random Variable)
      - 가변수
    - 연속형 확률변수(Continuous Random Variable)

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable) (2/9)
  - 예제 3.1

4개의 붉은 공(R) 과 3개의 검은 공(B)이 들어 있는 항아리에서 연속적으로 2개의 공을 비복원 추출하는 실험에서 Y를 붉은 공의 개수라 할 때, 출현 가능한 결과와 확률변수 Y의 값 y를 구하라.

- 풀이
  - $Y = \{0, 1, 2\}$

표본공간	y
BB	2
BR	1
RB	1
RR	0

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable) (3/9)
  - 예제 3.2

공구보관소의 직원이 3명의 공장 종업원들에게 안전 헬멧을 임의로 꺼내주었다. 만일 스미스(S), 존스(J), 그리고 브라운(B)의 순서로 헬멧을 받을 때 헬멧을 받는 가능한 순서들을 나열하라. 그리고 M을 헬멧이 원래 주인에게 지급되는 경우의 수라고 할 때, 확률변수 M의 값 m을 구하라.

- 풀이
  - $M = \{0, 1, 3\}$

표본공간	m
SJB	3
SBJ	1
JSB	1
JBS	0
BSJ	0
BJS	1

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable) (4/9)
  - 가변수(Dummy Variable)

*베르누이 확률변수(Bernoulli Random Variable)
두 개의 가능한 값을 0과 1로 표현하는 확률변수.

    - 정의
      - 성별이나 지역처럼 숫자가 아닌 성질을 가진 데이터를 분석하기 위해 0과 1로 바꾸어 표현한 변수
    - 특징
      - 확률변수가 범주형인 경우 사용
      - 표본공간이 무한 개의 원소를 가질 때 사용
    - 예제 3.3

공장에서 생산되는 부품들을 불량이나 양품으로 판정한다고 할 때, 베르누이 확률변수를 통해 확률변수 X를 정의하라.

- 풀이
  - $X = \begin{cases} 1, & \text{부품이 불량일 경우} \\ 0, & \text{부품이 양품일 경우} \end{cases}$

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable) (5/9)

*가산 무한(Countable Infinite)
순서를 매겨 나열할 수 있는 상태.

  - 이산표본공간(Discrete Sample Space)
    - 정의
      - 유한개 혹은 가산 무한개의 원소로 이루어진 표본공간
        - e.g., 포트 스캔 시 열려있는 것으로 확인된 포트 번호의 집합 $S = \{22, 80, 443, 3306, 8080\}$
        - e.g., 비밀번호 무차별 대입 공격 성공 시점의 누적 시도 횟수 $S = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
  - 이산형 확률변수(Discrete Random Variable)
    - 정의
      - 확률변수의 집합이 셀 수 있는 집합일 때의 확률변수
        - e.g., 하루 동안 특정 서버에 대해 발생하는 로그인 실패 횟수 $X = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
    - 특징
      - 주로 계수자료(Count Data)를 나타낼 때 사용
        - e.g., 하루 동안 방화벽에서 차단된 패킷 수

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable) (6/9)
  - 예제 3.4

로트(lot)의 합격 또는 불합격 판정을 위해 샘플링검사법(Sampling Plan)을 사용한다. 12개의 불량품이 있는 100개의 제품에서 10개를 독립적을 추출하는 샘플링검사법을 생각해보자.

- 풀이
  - 10개 제품 표본에서 발견되는 불량품의 수를 확률변수 X
  - $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable) (7/9)
  - 예제 3.5

하나의 불량품이 발견될 때까지 공정으로부터 표본을 추출하는 샘플링검사법이 있다고 하자. 공정의 능력은 얼마나 많은 제품이 불량 없이 연속적으로 추출되는가에 달려있다. 불량품이 발견될 때까지 추출한 제품의 수를 나타내는 확률변수를 X라고 하자. 양품을 N, 불량품을 D로 나타낼 때, X값이 1, 2, 3일 때의 표본공간(S)를 쓰시오.

- 풀이
  - $X = 1$ 일 때, $S = \{D\}$
  - $X = 2$ 일 때, $S = \{ND\}$
  - $X = 3$ 일 때, $S = \{NND\}$

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable) (8/9)
  - 연속표본공간(Continuous Sample Space)
    - 정의
      - 실선의 특정 구간에 속한 모든 실수를 원소로 갖는 표본공간
        - e.g., 웹 서버의 특정 API 응답 지연 시간의 범위 $S = \{t | 0 \leq t \leq 10\}$
  - 연속형 확률변수(Continuous Random Variable)
    - 정의
      - 확률변수가 연속적인 구간 내의 값을 취할 때의 확률변수
        - e.g., 악성코드 탐지 엔진이 의심 파일을 정밀 스캔하여 최종 분석을 완료할 때까지 소요되는 시간
    - 특징
      - 주로 측정자료(Measured Data)를 나타낼 때 사용
        - e.g., 높이, 무게, 온도, 거리, 시간

확률변수의 개념

- 확률변수(Random Variable) (9/9)
  - 예제 3.6

두 상황에 따른 확률 변수 X의 값 x의 범위를 구하라.
1. 통신판매 광고에 반응하는 사람들의 비율을 X라고 할 때
2. 과속탐지 카메라에 적발되는 과속 차량들 사이의 시간간격을 X라고 할 때

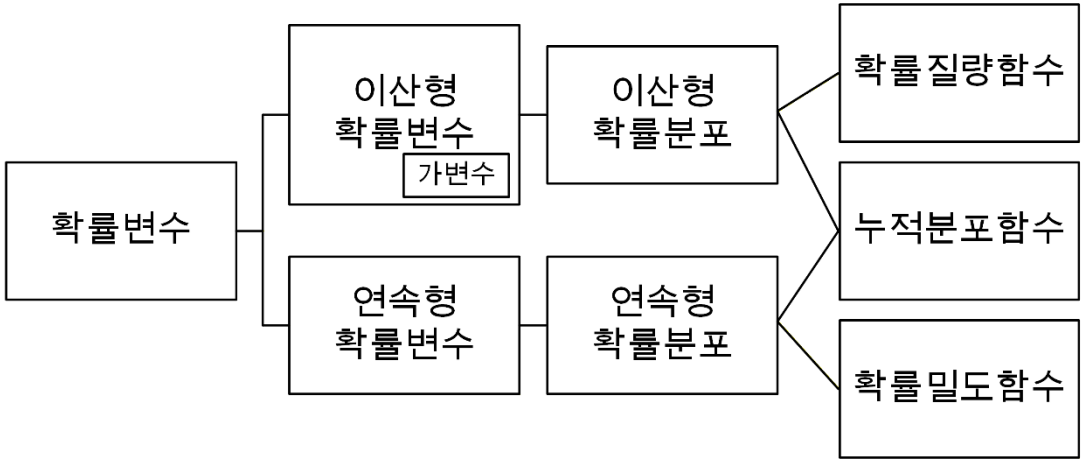
- 1번 풀이
  - $0 \leq x \leq 1$
- 2번 풀이
  - $x \geq 0$

목 차

- 확률변수의 개념
- 확률분포와 누적분포함수
- 결합확률분포

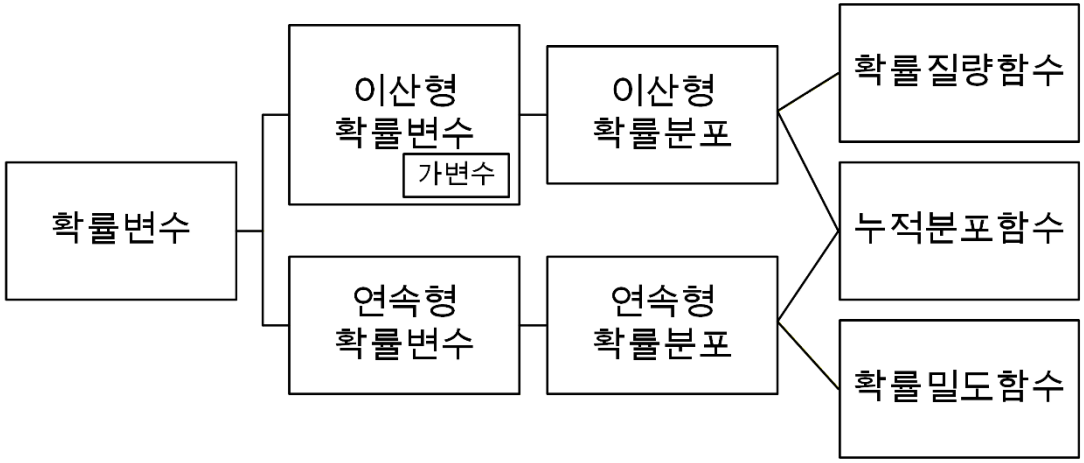
확률분포와 누적분포함수

- 확률분포(PD, Probability Distribution) (1/8)
  - 정의
    - 확률변수가 취할 수 있는 모든 값과 그 값들이 나타날 확률을 대응시켜 나타낸 관계
  - 구분
    - 이산형 확률분포(DPD, Discrete Probability Distribution)
    - 연속형 확률분포(CPD, Continuous Probability Distribution)
    - 결합확률분포(JPD, Joint Probability Distribution)



확률분포와 누적분포함수

- 확률분포(PD, Probability Distribution) (2/8)
  - 표현방식
    - 확률질량함수(PMF, Probability Mass Function)
      - 이산형 확률분포에서 사용
    - 확률밀도함수(PDF, Probability Density Function)
      - 연속형 확률분포에서 사용
    - 누적분포함수(CPF, Cumulative Probability Function)
      - 이산형, 연속형 확률분포에서 사용

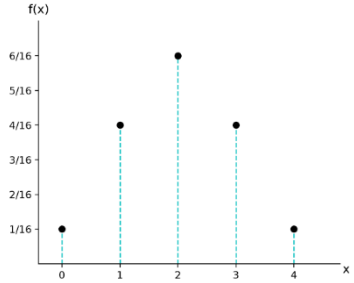


확률분포와 누적분포함수

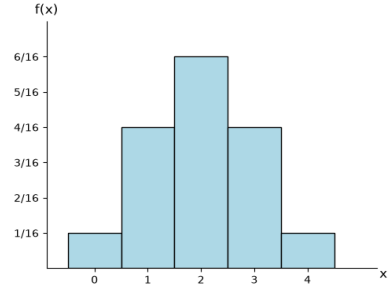
- 확률분포(PD, Probability Distribution) (3/8)
  - 이산형 확률분포(DPD) (1/4)

*IDS (Intrusion Detection System)
네트워크나 시스템의 비정상적인 활동을 감지해 관리자에게 알리는 침입 탐지 시스템.

    - 정의
      - 확률변수가 가질 수 있는 값이 명확하고 셀 수 있는 경우의 분포
        - e.g., IDS에 하루 동안 탐지되는 고위험군 악성 코드의 종류별 발생 분포
    - 조건
      - $f(x) \geq 0$
      - $\sum_x f(x) = 1$
      - $P(X = x) = f(x)$
    - 특징
      - 확률함수, 확률질량함수, 확률분포와 같은 명칭 사용
      - 확률질량함수와 확률히스토그램을 활용한 시각적 표현 가능
        - 확률질량함수(PMF)
          - 확률 값을 x축과 점선이나 실선으로 연결하여 이산형 확률 분포를 나타낸 그림
        - 확률히스토그램(Probability Histogram)
          - 확률질량함수도에서 점 대신 직사각형을 사용해 나타낸 그림



<그림 1>
확률질량함수도



<그림 2>
확률히스토그램

확률분포와 누적분포함수

- 확률분포(PD, Probability Distribution) (4/8)
  - 이산형 확률분포(DPD) (2/4)
    - 예제 3.7

상점에 진열된 20대의 노트북 중에 불량품이 3대 끼여 있다. 어느 학교에서 이 중 임의로 2대를 구입하였을 때, 불량품의 개수의 확률분포를 구하라.

- 풀이
  - 구입한 노트북 중 불량품의 수를 확률변수 X라 하면,
    - X의 값 x가 취할 수 있는 값은 $0, 1, 2$
  - $f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{17}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{\frac{3!}{0!3!} \times \frac{17!}{2!15!}}{\frac{20!}{2!18!}} = \frac{68}{95}$
  - $f(1) = P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{17}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{\frac{3!}{1!2!} \times \frac{17!}{1!16!}}{\frac{20!}{2!18!}} = \frac{51}{190}$
  - $f(2) = P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{17}{0}}{\binom{20}{2}} = \frac{\frac{3!}{2!1!} \times \frac{17!}{0!17!}}{\frac{20!}{2!18!}} = \frac{3}{190}$

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{68}{95}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

확률분포와 누적분포함수

- 확률분포(PD, Probability Distribution) (5/8)
  - 이산형 확률분포(DPD) (3/4)
    - 예제 3.8 (1/2)

어느 대리점에서 판매된 외제차의 50%에 디젤엔진이 장착되었다고 할 때, 이 대리점에서 다음달에 판매될 4대의 외제차 가운데 디젤엔진이 장착된 차의 수의 확률분포에 대한 식을 구하라.

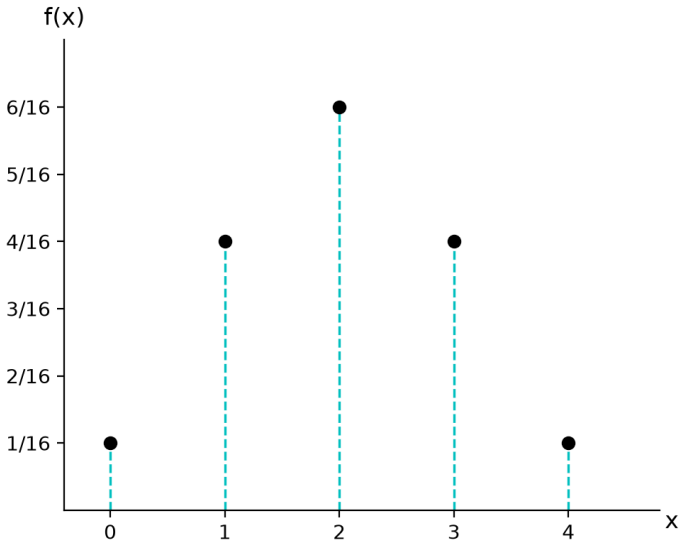
- 풀이
  - 디젤모델이나 가솔린모델을 판매할 확률은 동일하게 $\frac{1}{2}$
    - 표본공간에는 발생확률이 동일한 $2^4 = 16$개의 표본점 존재
  - 4대 중 디젤엔진인 차량의 수를 확률변수 X
    - X가 가질 수 있는 값 x는 $0, 1, 2, 3, 4$
  - 디젤엔진일 확률을 $\binom{4}{x}$ 로 표현 가능

$\therefore$ 확률분포 $f(x) = \frac{\binom{4}{x}}{16}, x = 0,1,2,3,4$

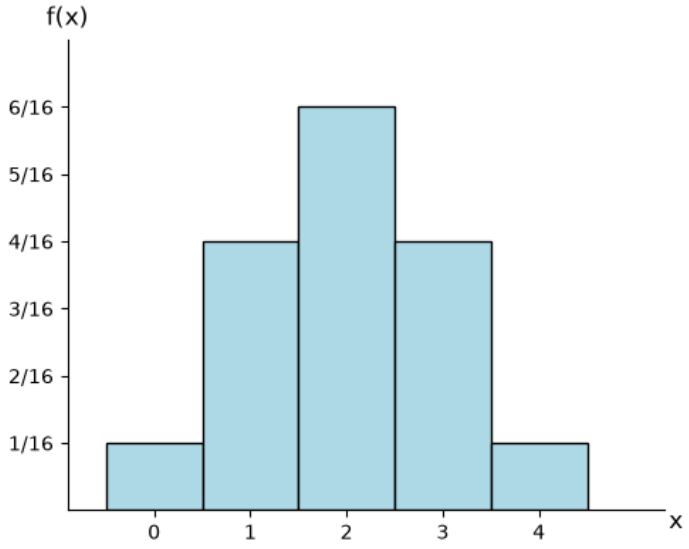
확률분포와 누적분포함수

- 확률분포(PD, Probability Distribution) (6/8)
  - 이산형 확률분포(DPD) (4/4)
    - 예제 3.8 (2/2)

어느 대리점에서 판매된 외제차의 50%에 디젤엔진이 장착되었다고 할 때, 이 대리점에서 다음달에 판매될 4대의 외제차 가운데 디젤엔진이 장착된 차의 수의 확률분포에 대한 식을 구하라.



<그림 1>
확률질량함수도

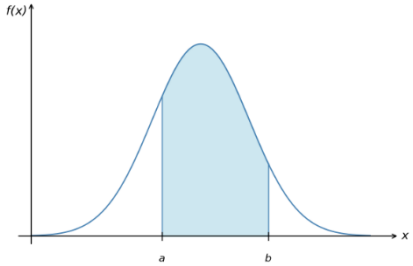


<그림 2>
확률히스토그램

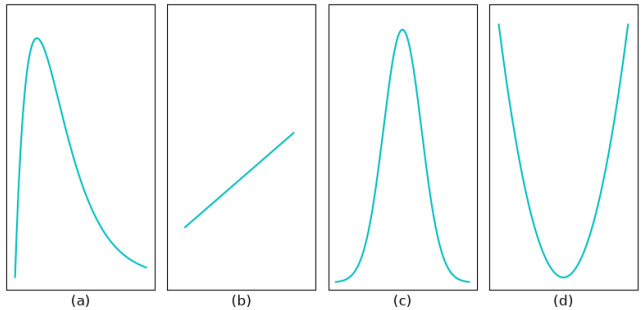
확률분포와 누적분포함수

- 확률분포(PD, Probability Distribution) (7/8)
  - 연속형 확률분포(CPD) (1/2)
    - 정의
      - 확률변수가 소수점 아래로 무한히 쪼개지는 연속적인 값을 가질 때의 확률분포
        - e.g., 암호화 연산 중 칩의 실시간 전력 소모량 분포
    - 조건
      - 모든 $x \in R$에 대해 $f(x) \geq 0$
      - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
      - $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$
    - 특징
      - 이산형 확률분포처럼 표형태 불가능
      - 전체 면적이 1인 확률밀도함수 사용
      - 유한개의 불연속점을 갖는 것이 가능

<그림 3>
$P(a < X < b)$



<그림 4>
전형적인 밀도함수



확률분포와 누적분포함수

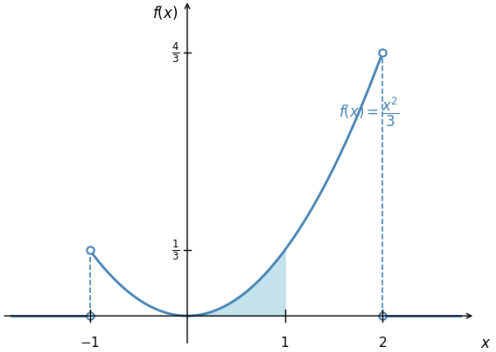
- 확률분포(PD, Probability Distribution) (8/8)
  - 연속형 확률분포(CPD) (2/2)
    - 예제 3.9

제어실험에서 반응온도(℃)의 변화에 따른 오차는 다음과 같은 확률분포를 가지는 연속확률변수 X라고 가정하자.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

(a) 함수 $f(x)$가 확률밀도함수임을 증명하라.
(b) 확률 $P(0 < X \leq 1)$을 구하라.

- 풀이
  - (a) $f(x) \geq 0$임은 명확하므로, 다음 식을 통해 확률밀도함수임을 보일 수 있음
    - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}\,dx = \left.\frac{x^3}{9}\right|_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$
  - (b) $P(0 < x \leq 1) = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{3}\,dx = \left.\frac{x^3}{9}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{9}$



<그림 5>
확률밀도함수

확률분포와 누적분포함수

- 누적분포함수(CDF, Cumulative Distribution Function) (1/6)
  - 정의
    - 실수 x에 대해 확률변수 X가 x이하일 확률을 나타내는 함수
      - e.g., 로그인 실패 횟수가 5회 이하일 누적 확률
  - 특징
    - 비감소 함수, 주어진 확률변수 뿐만 아니라 모든 실수에서 정의
    - 이산형 확률분포에서의 누적분포함수 $F(x)$
      - $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)\,,\ -\infty < x < \infty$
    - 연속형 확률분포에서의 누적분포함수 $F(x)$
      - $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,,\ -\infty < x < \infty$
  - 필요성
    - 연산의 단순화
    - 두 확률변수 CDF 검사를 통해 확률분포의 유일성 결정 및 증명

확률분포와 누적분포함수

- 누적분포함수(CDF, Cumulative Distribution Function) (2/6)
  - 예제 3.10 (1/3)

예제 3.8에서 확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다. 이때, 확률변수 X의 누적분포 $F(x)$를 구하라. 그리고 $F(x)$를 사용하여 $f(2) = \frac{3}{8}$이 됨을 증명하라.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

- 풀이
  - 다음 문제에서 주어진 표를 바탕으로 누적분포를 구해볼 때,
    - $F(0) = f(0) = \frac{1}{16}$
    - $F(1) = f(0) + f(1) = \frac{5}{16}$
    - $F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{11}{16}$
    - $F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{15}{16}$
    - $F(4) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$

$$\therefore\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16}, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

$$\therefore\ f(2) = F(2) - F(1) = \frac{11}{16} - \frac{5}{16} = \frac{3}{8}$$

확률분포와 누적분포함수

- 누적분포함수(CDF, Cumulative Distribution Function) (3/6)
  - 예제 3.10 (2/3)

예제 3.8에서 확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다. 이때, 확률변수 X의 누적분포 $F(x)$를 구하라. 그리고 $F(x)$를 사용하여 $f(2) = \frac{3}{8}$이 됨을 증명하라.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

- 풀이

$$\therefore\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16}, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

$$\therefore\ f(2) = F(2) - F(1) = \frac{11}{16} - \frac{5}{16} = \frac{3}{8}$$

확률분포와 누적분포함수

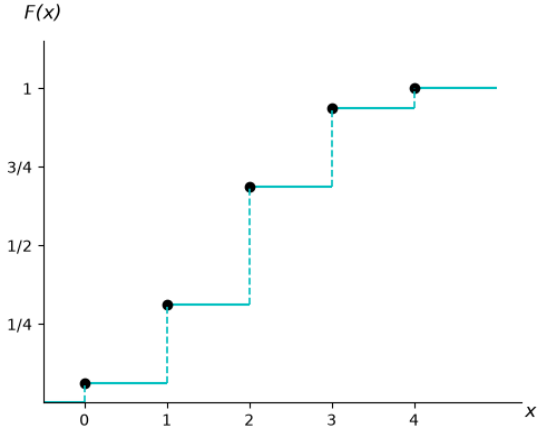
- 누적분포함수(CDF, Cumulative Distribution Function) (4/6)
  - 예제 3.10 (3/3)

예제 3.8에서 확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다. 이때, 확률변수 X의 누적분포 $F(x)$를 구하라. 그리고 $F(x)$를 사용하여 $f(2) = \frac{3}{8}$이 됨을 증명하라.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

- 풀이

$$\therefore\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{16}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16}, & 3 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$



<그림 6>
이산형 누적분포

확률분포와 누적분포함수

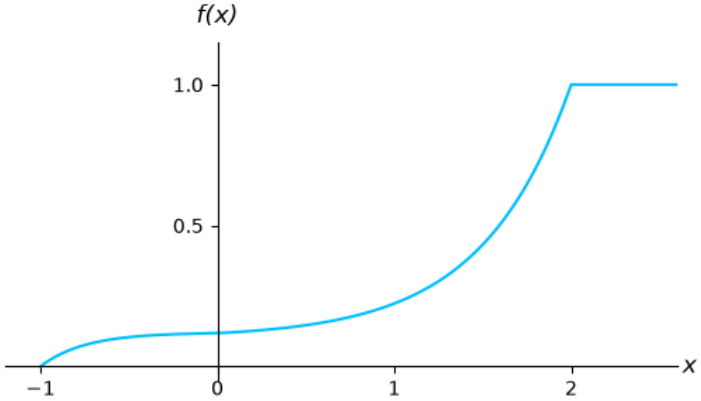
- 누적분포함수(CDF, Cumulative Distribution Function) (5/6)
  - 예제 3.11

예제 3.9의 확률밀도함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$ 에 대해 누적분포 $F(x)$를 구하고, 그것을 이용하여 $P(0 < X \leq 1)$을 구하라.

- 풀이
  - $-1 < x < 2$에 대해
    - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{t^3}{9}\Big|_{-1}^{x} = \frac{x^3+1}{9}$

$$\therefore\ F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{x^3+1}{9}, & -1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\therefore\ P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$



<그림 7>
연속형 누적분포

확률분포와 누적분포함수

- 누적분포함수(CDF, Cumulative Distribution Function) (6/6)
  - 예제 3.12

어느 기관에서 프로젝트를 입찰에 부치고 적절한 입찰가를 b로 예상한다고 할 때, 해당 기관은 낙찰가 y의 밀도함수를 다음과 같이 생각하고 있다.

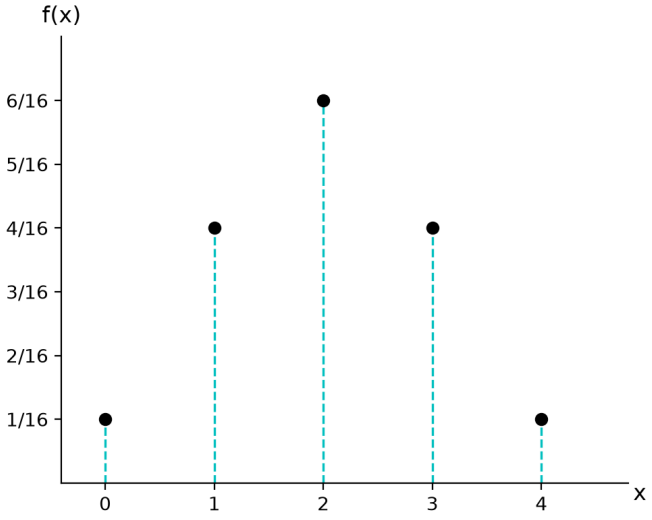
$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{5}{8b}, & \dfrac{2}{5}b \le y \le 2b \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

$F(y)$를 구하고, 이것을 이용하여 낙찰가 y가 해당 기관의 예상치 b보다 작을 확률을 구하라.

- 풀이
  - $\frac{2b}{5} \le y \le 2b$
    - $F(y) = \int_{\frac{2b}{5}}^{y} \frac{5}{8b} dt = \frac{5t}{8b}\Big|_{\frac{2b}{5}}^{y} = \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}$
    - $F(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{2}{5}b \\ \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}, & \frac{2}{5}b \le y < 2b \\ 1, & y \ge 2b \end{cases}$
  - 낙찰가가 예상치 b보다 작을 확률은 $P(Y \le b) = F(b) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

확률분포와 누적분포함수

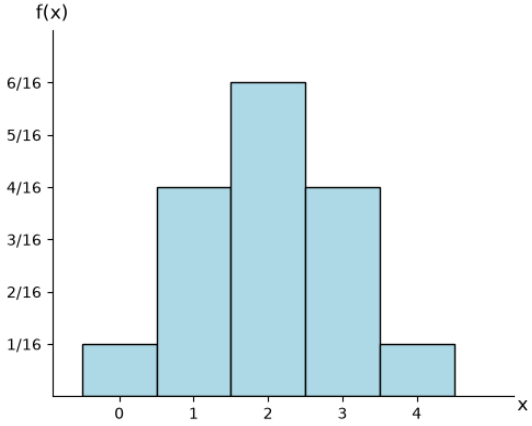
- 확률분포 시각화 (1/5)
  - 확률질량함수도
    - 정의
      - 확률 값을 x축과 점선이나 실선으로 연결하여 이산형 확률 분포를 나타낸 그림
    - 장점
      - 개별 사건의 정확한 확률을 직관적으로 확인 가능
    - 단점
      - 연속적인 값에는 적용 불가
    - 활용 예시
      - 무차별 대입 공격 탐지
        - e.g., 특정 IP가 1분 동안 로그인 실패를 5회, 10회, 15회 할 확률 계산
      - 디지털 포렌식
        - e.g., 악성코드 파일 내에서 특정 바이트가 나타나는 빈도 분석



<그림 1>
확률질량함수도

확률분포와 누적분포함수

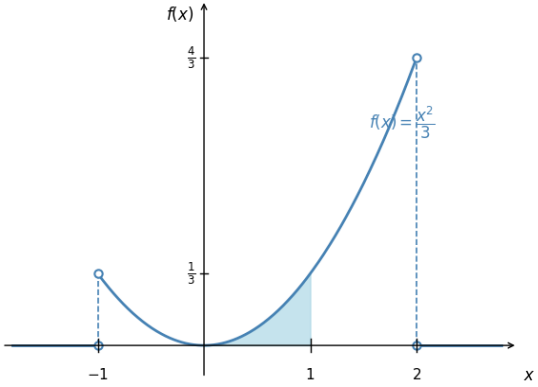
- 확률분포 그래프 (2/5)
  - 확률히스토그램
    - 정의
      - 확률질량함수도에서 점 대신 직사각형을 사용해 나타낸 그림
    - 장점
      - 데이터의 밀집도 파악 가능
    - 단점
      - 구간 설정에 따라 그래프의 모양이 왜곡 가능성 존재
    - 활용 예시
      - 트래픽 베이스라인 모니터링
        - e.g., 사내 망의 시간대별 패킷 크기 분포를 시각화하여, 평소와 다른 기형적인 모양이 나타나는지 감시
      - 보안 장비 리소스 모니터링
        - e.g., 방화벽 CPU 사용량 분포 시각화



<그림 2>
확률히스토그램

확률분포와 누적분포함수

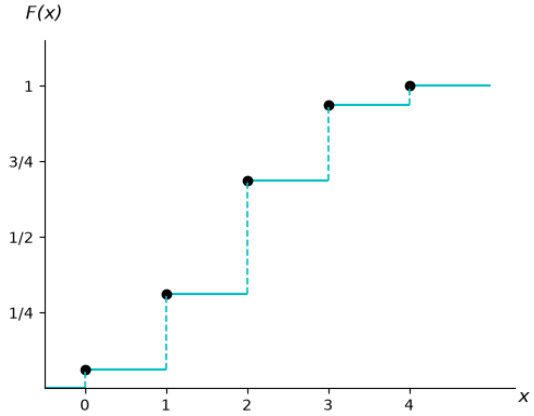
- 확률분포 그래프 (3/5)
  - 확률밀도함수
    - 정의
      - 특정 지점의 y축 값은 확률이 아닌 밀도이며, 특정 구간의 면적이 확률인 그림
    - 장점
      - 데이터가 밀집된 구간과 희소한 구간을 매끄러운 곡선으로 표현 가능
    - 단점
      - 확률 계산 시, 적분을 해야 하므로 번거로움 발생
    - 활용 예시
      - 사용자 및 개체 행동 분석
        - e.g., 특정 임직원의 평소 시스템 접속 시간 분포 곡선 생성 후, 해당 이상 징후 탐지
      - APT 공격 탐지
        - e.g., C&C 서버와 통신하는 주기의 밀도 분석



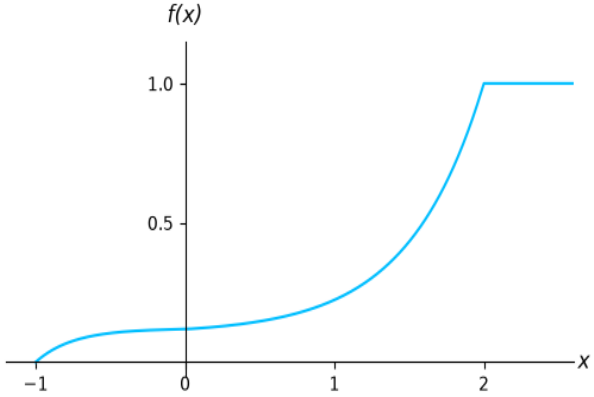
<그림 5>
확률밀도함수

확률분포와 누적분포함수

- 확률분포 그래프 (4/5)
  - 누적분포함수 (1/2)
    - 정의
      - 실수 x에 대해 확률변수 X가 x이하일 확률을 나타내는 함수
    - 장점
      - 적분 없이 단순 뺄셈을 통해 구간의 확률 계산 가능
    - 단점
      - 확률이 누적되기 때문에, 데이터가 어느 특정



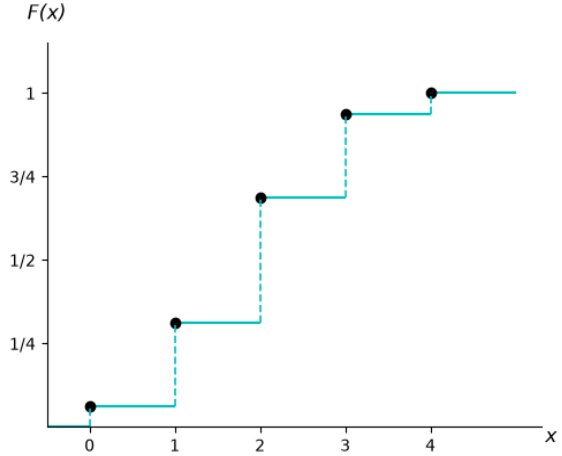
<그림 6>
이산형 누적분포



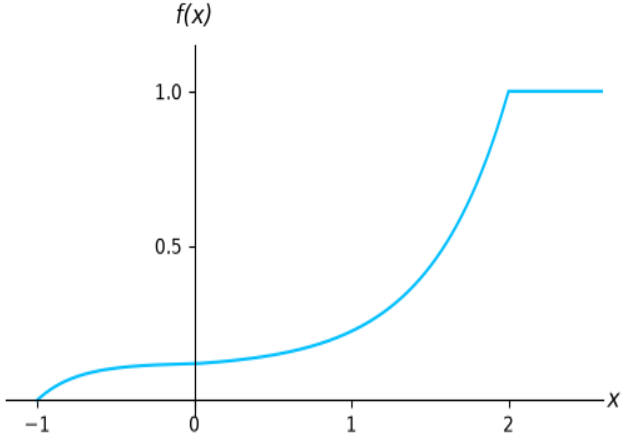
<그림 7>
연속형 누적분포

확률분포와 누적분포함수

- 확률분포 그래프 (5/5)
  - 누적분포함수 (2/2)
    - 활용 예시
      - 리스크 관리 및 가설 검정
        - e.g., 위험 평가 시 “자산이 랜섬웨어에 감염되어 발생할 손실액이 1억 원 이하일 경우”의 누적 확률 계산
      - 실시간 탐지 알람 제어
        - e.g., 보안 솔루션이 탐지한 위협 점수를 누적분포함수에 대입하여 “현재 이벤트가 상위 0.1%에 해당하는 극단적 위협”인지 즉시 판정하여 차단 알림 전송



<그림 6>
이산형 누적분포



<그림 7>
연속형 누적분포

목 차

- 확률변수의 개념
- 확률분포와 누적분포함수
- 결합확률분포

결합확률분포

- 결합확률분포(Joint Probability Distribution) (1/6)
  - 정의
    - 두 개 이상의 확률변수가 동시에 어떤 값을 가질 확률을 나타내는 분포
      - e.g., 로그인 시도 횟수와 악성 파일 다운로드 수가 동시에 특정 값일 확률
  - 필요성
    - 여러 개의 확률변수들의 결과를 동시에 취해야 할 때 사용
      - e.g., 어떤 서버에 대한 공격 탐지에서, 초당 패킷 수 X와 비정상 포트 접근 시도 횟수 Y의 결과는 (x, y)로 동시에 표시
  - 표현
    - 결합확률질량함수(JPMF, Joint Probability Mass Function)
      - 확률변수 X, Y가 이산형 확률변수일 경우
    - 결합밀도함수(JDF, Joint Density Function)
      - 확률변수 X, Y가 연속형 확률변수일 경우

결합확률분포

- 결합확률분포(Joint Probability Distribution) (2/6)
  - 결합확률질량함수(JPMF) (1/2)
    - 정의
      - 두 개 이상의 이산형 확률변수 X, Y가 각각 특정 값 x, y를 동시에 가질 확률을 대응시키는 함수
        - e.g., 로그인 실패 횟수와 악성 파일 다운로드 개수가 각각 5회와 2개일 확률
    - 조건
      - 모든 (x, y)에 대해 $f(x, y) \geq 0$
      - $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$
      - $P(X = x, Y = y) = f(x, y)$
      - x, y 평면상의 어떤 영역 A에 대하여 $P[(X, Y) \in A] = \sum \sum_A f(x, y)$

결합확률분포

- 결합확률분포(Joint Probability Distribution) (3/6)
  - 결합확률질량함수(JPMF) (2/2)
    - 예제 3.13

3개의 청색, 2개의 적색, 3개의 녹색 볼펜이 들어있는 상자에서 임의로 2개를 추출하고자 한다. X를 청색 볼펜의 수, Y를 적색 볼펜의 수라고 할 때,
(a) 결합확률분포 $f(x,y)$를 구하라.
(b) $A = \{(x,y)|x+y \le 1\}$라고 할 때, $P[(X,Y) \in A]$를 구하라.

- 풀이
  - (a) 결합확률분포 $f(x,y)$
    - 8개 볼펜 중 임의의 2개를 추출하는 경우의 수: $\binom{8}{2}$
    - 청색 볼펜을 뽑는 경우의 수: $\binom{3}{x}$
    - 적색 볼펜을 뽑는 경우의 수: $\binom{2}{y}$
    - 녹색 볼펜을 뽑는 경우의 수: $\binom{3}{2-x-y}$

$$\therefore f(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}, \quad x = 0,1,2, y = 0,1,2, 0 \le x+y \le 2$$

$f(x,y)$		x			행의 합
		0	1	2	
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

  - (b) $P[(X,Y) \in A] = P(X+Y \le 1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{9}{28} = \frac{9}{14}$

결합확률분포

- 결합확률분포(Joint Probability Distribution) (4/6)
  - 결합밀도함수(JDF) (1/2)
    - 정의
      - 두 개 이상의 연속형 확률변수 X, Y가 연속적인 공간에서 동시에 특정 구간에 존재할 확률의 밀도를 나타내는 함수
        - e.g., 웹 서버의 응답 지연 시간이 1~2초 사이이면서 CPU 실시간 사용률이 80~90% 사이일 확률 밀도
    - 조건
      - 모든 (x, y)에 대해 $f(x, y) \geq 0$
      - $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx\, dy = 1$
      - $P[(X, Y) \in A] = \int \int_A\ f(x, y)\ dx\ dy$ (A는 xy 평면 상의 임의의 영역)

결합확률분포

- 결합확률분포(Joint Probability Distribution) (5/6)
  - 결합밀도함수(JDF) (2/2)
    - 예제 3.14 (1/2)

어느 과자회사에서는 연한 초콜릿과 진한 초콜릿을 입힌 과자상자를 취급하고 있다. 임의로 하나의 과자상자를 선택했을 때 X와 Y를 각각 연한 초콜릿과 진한 초콜릿의 비율이라 하면, 결합확률분포는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

이때 다음을 구하라.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$을 증명하라.

- (a) 풀이
  - $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{2x^2}{5}+\frac{6xy}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{5}+\frac{6y}{5}\right) dy = \left(\frac{2y}{5}+\frac{3y^2}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5}+\frac{3}{5} = 1$$

결합확률분포

- 결합확률분포(Joint Probability Distribution) (6/6)
  - 결합밀도함수(JDF) (2/2)
    - 예제 3.14 (2/2)

어느 과자회사에서는 연한 초콜릿과 진한 초콜릿을 입힌 과자상자를 취급하고 있다. 임의로 하나의 과자상자를 선택했을 때 X와 Y를 각각 연한 초콜릿과 진한 초콜릿의 비율이라 하면, 결합확률분포는 다음과 같이 주어진다.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

이때 다음을 구하라.

(b) $A = \{(x,y) | 0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$일 때의 $P[(X,Y) \in A]$를 구하라.

- (b) 풀이
  - $P[(X,Y) \in A] = P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}(2x+3y)\, dx\, dy = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} dy$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{10} + \frac{3y}{5}\right) dy = \left(\frac{y}{10} + \frac{3y^2}{10}\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right)\right] = \frac{1}{10}\left(\frac{5}{4} - \frac{7}{16}\right) = \frac{13}{160}$$

결합확률분포

- 주변분포(Marginal Distribution) (1/4)
  - 정의
    - 결합분포에서 특정 변수만을 대상으로 나머지 변수의 영향을 제거한 분포
  - 구분
    - 이산형 확률변수 X, Y
      - $g(x) = \sum_y f(x,y)$, $h(y) = \sum_x f(x,y)$
    - 연속형 확률변수 X, Y
      - $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy$, $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx$
  - 특징 (1/2)
    - 확률변수가 n개 일 경우, 특정 확률 변수의 주변분포를 다음과 같이 계산 가능
      - 이산형인 경우, $g(x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
      - 연속형인 경우, $g(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ dx_2\ dx_3 \cdots dx_n$

결합확률분포

- 주변분포(Marginal Distribution) (2/4)
  - 특징 (2/2)
    - 확률 변수가 n개 일 경우 ,특정 변수가 2개에 대한 결합주변 분포(Joint Conditional Distribution)로 확장하여 사용 가능
      - 이산형인 경우, $g(x_1, x_2) = \sum_{x_3} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$
      - 연속형인 경우, $g(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ dx_3\, dx_4 \cdots dx_n$
  - 필요성
    - 여러 확률변수 중 특정 변수의 정보만 추출할 때 사용
      - e.g., 로그인 시도 횟수 X, 사용자 권한등급 Y, 접속 IP 대역 Z의 결합 분포에서 권한등급 Y의 분포만 얻고자 하는 경우
    - 분석 이전에 각 변수의 개별 분포 파악이 필요할 때 사용
      - e.g., 패킷 크기 X에 따른 탐지 여부 Y 분석 이전에, X와 Y 각각의 분포를 먼저 확인하고자 하는 경우

결합확률분포

- 주변분포(Marginal Distribution) (3/4)
  - 예제 3.15

아래 표의 열과 행의 합이 각각 X, Y의 주변분포가 됨을 증명하라.

$f(x,y)$		x			행의 합
		0	1	2	
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

- 풀이
  - 확률변수 X에 대해 $g(x)$를 X의 주변분포, $h(y)$를 Y의 주변분포라고 할 때,
    - $g(0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$
    - $g(1) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = \frac{9}{28} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{15}{28}$
    - $g(2) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) = \frac{3}{28} + 0 + 0 = \frac{3}{28}$

  위 결과를 통해 문제에서 주어진 표의 열의 합과 동일함을 알 수 있으며, 동일한 방법으로 $h(y)$의 값들이 행의 합과 일치함을 알 수 있음

결합확률분포

- 주변분포(Marginal Distribution) (4/4)
  - 예제 3.16

예제 3.14의 결합분포 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$ 에 대해 $g(x)$와 $h(y)$를 구하라.

- 풀이
  - $0 \le x \le 1$ 구간에서
    - $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy = \left(\frac{4xy}{5} + \frac{6y^2}{10}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{4x+3}{5}$
    - 그 외의 경우에는 $g(x) = 0$이 됨
  - $0 \le y \le 1$ 구간에서
    - $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx = \left(\frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2(1+3y)}{5}$
    - 그 외의 경우에는 $h(y) = 0$이 됨

결합확률분포

- 조건부분포(Conditional Distribution) (1/6)
  - 정의
    - 결합분포에서 한 확률변수의 값을 고정했을 때, 나머지 확률변수가 따르는 분포
  - 구분
    - $X = x$로 주어졌을 때 확률변수 Y의 조건부분포
      - $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$, $(g(x) > 0)$
    - $Y = y$로 주어졌을 때 확률변수 X의 조건부분포
      - $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$, $(h(y) > 0)$
  - 특징 (1/2)
    - 두 개 이상의 확률변수에 대한 결합조건부분포(Joint Conditional Distribution)로 확장하여 사용 가능
      - $f(x_1, x_2, \cdots, x_{a-1}|x_a, x_{a+1}, \cdots, x_n) = \frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{g(x_a,x_{a+1},\cdots,x_n)}$

결합확률분포

- 조건부분포(Conditional Distribution) (2/6)
  - 특징 (2/2)
    - $Y = y$일 때 X가 $a < X < b$일 확률은 다음과 같이 계산 가능
      - 이산형인 경우, $P(a < X < b|Y = y) = \sum_{a<X<b} f(x|y)$
      - 연속형인 경우, $P(a < X < b|Y = y) = \int_a^b f(x|y)\ dx$
  - 필요성
    - 특정 조건이 주어졌을 때 나머지 변수의 분포의 변화를 파악할 때 사용
      - e.g., 접속 IP 대역 X가 해외로 확인된 경우, 로그인 시도 횟수 Y의 분포가 어떻게 변하는지 분석
    - 두 변수 간 의존관계 여부를 판단할 때 사용
      - e.g., 사용자 권한등급 X가 주어졌을 때 비정상 행위 탐지 여부 Y의 분포가 달라지는지를 통해, 두 변수 간 연관성 존재 여부를 확인

결합확률분포

- 조건부분포(Conditional Distribution) (3/6)
  - 예제 3.17

예제 3.13에서 $Y = 1$로 주어졌을 때 X의 조건부분포를 구하고, 그것을 이용하여 $P(X = 0|Y = 1)$을 구하라.

- 풀이
  - $y = 1$일 때의 $f(x|y)$가 필요하므로 $h(1)$을 구해야 함
  - $h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x, 1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$이므로
  - $f(x|1) = \frac{f(x,1)}{h(1)} = \frac{7}{3} f(x, 1),\ x = 0,1,2$이 됨
  - $f(0|1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(0,1) = \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{1}{2},$
  - $f(1|1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(1,1) = \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{3}{14}\right) = \frac{1}{2},$
  - $f(2|1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(2,1) = \left(\frac{7}{3}\right)(0) = 0$
  - $P(X = 0|Y = 1) = f(0|1) = \frac{1}{2}$

$f(x,y)$		x			행의 합
		0	1	2	
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

  - 두 개의 볼펜 중 하나가 적색이라는 사실이 알려지면 다른 하나의 볼펜이 청색이 아닐 확률은 $\frac{1}{2}$가 됨을 알 수 있음

결합확률분포

- 조건부분포(Conditional Distribution) (4/6)
  - 예제 3.18 (1/2)

X와 Y를 각각 단위 온도 변화량과 어떤 원자가 방출하는 스펙트럼 변화율을 나타내는 확률변수라 할 때, 확률변수 (X, Y)에 대한 결합밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

(a) 주변밀도함수 $g(x), h(y)$와 조건부밀도함수 $f(y|x)$를 구하라.

- (a) 풀이
  - $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x}^{1} 10xy^2\,dy = \frac{10}{3}xy^3\Big|_{y=x}^{y=1} = \frac{10}{3}x(1-x^3), \quad 0 < x < 1$
  - $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0}^{y} 10xy^2\,dx = 5x^2y^2\big|_{x=0}^{x=y} = 5y^4, \quad 0 < y < 1$
  - $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{1-x^3}, \quad 0 < x < y < 1$

결합확률분포

- 조건부분포(Conditional Distribution) (5/6)
  - 예제 3.18 (2/2)

X와 Y를 각각 단위 온도 변화량과 어떤 원자가 방출하는 스펙트럼 변화율을 나타내는 확률변수라 할 때, 확률변수 (X, Y)에 대한 결합밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} 10xy^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

(b) 온도가 0.25 단위 높아졌을 때 스펙트럼 변화량이 $\frac{1}{2}$ 보다 클 확률을 구하라.

- (b) 풀이
  - $P\left(Y > \frac{1}{2} \middle| X = 0.25\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(y|x = 0.25)\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3y^2}{1-0.25^3}\, dy = \frac{64}{63} y^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{8}{9}$

결합확률분포

- 조건부분포(Conditional Distribution) (6/6)
  - 예제 3.19

결합확률분포가 다음과 같이 주어졌을 때 $g(x), h(y), f(x|y)$를 구하고, $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{3})$의 값을 구하라.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(1+3y^2)}{4}, & 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

- 풀이
  - $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4}\,dy = \left(\frac{xy}{4} + \frac{xy^3}{4}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{x}{2},\ 0 < x < 2$
  - $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4}\,dx = \left(\frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8}\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1+3y^2}{2},\ 0 < y < 1$
  - $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{\frac{x(1+3y^2)}{4}}{\frac{1+3y^2}{2}} = \frac{x}{2},\ 0 < x < 2$
  - $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{64}$

결합확률분포

- 통계적 독립(Statistically Independent) (1/3)

*독립(Independent)
어떠한 사건이 다른 사건에 영향을 미치지 않는 것.

  - 정의
    - X와 Y를 결합확률분포 $f(x, y)$와 주변분포 $g(x), h(y)$를 가지는 이산형 혹은 연속형 확률변수라 할 때, 아래의 조건을 만족하는 확률변수 X와 Y의 관계
      - 모든 (x, y)에 대하여, $f(x, y) = g(x)h(y)$
  - 특징
    - 각각의 확률변수가 서로에게 영향을 주거나 받지 않음
    - 두 개 이상의 확률변수에 대한 통계적 독립은 상호 통계적 독립(Matual Independent)이라 부름
      - $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 결합확률분포 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$과 주변분포 $f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_n(x_n)$을 가지는 이산형 혹은 연속형 확률변수라 할 때, 모든 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$에 대해 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$인 관계

결합확률분포

- 통계적 독립(Statistically Independent) (2/3)
  - 예제 3.20

예제 3.13의 확률변수들이 통계적으로 독립이 아님을 증명하라.

- 풀이
  - 점 $(0,1)$을 고려해 볼 때, 오른쪽 표로부터 $f(0,1), g(0), h(1)$을 구할 수 있음
  - $f(0,1) = \frac{3}{14}$
  - $g(0) = \sum_{y=0}^{2} f(0,y) = \frac{3}{28} + \frac{3}{14} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$
  - $h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$
  - $f(0,1) \neq g(0)h(1)$

$f(x,y)$		x			행의 합
		0	1	2	
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{3}{14}$	$\frac{3}{14}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
열의 합		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

$\therefore$ X와 Y는 통계적으로 독립이 아님

결합확률분포

- 통계적 독립(Statistically Independent) (3/3)
  - 예제 3.21

종이팩으로 포장된 부패성 식품이 보존기간(단위: 년)이 다음과 같은 확률밀도함수를 가지는 확률변수라고 하자.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

X_1, X_2, X_3가 독립적으로 추출된 3개의 포장된 음식의 보존기간을 나타낸다고 할 때, $P(X_1 < 2,\ 1 < X_2 < 3,\ X_3 > 2)$를 구하라.

- 풀이
  - 3개의 포장단위가 독립적으로 추출되었다 했으므로 세 확률변수는 통계적으로 독립
  - $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)f(x_2)f(x_3) \ = e^{-x_1}e^{-x_2}e^{-x_3} \ = e^{-x_1-x_2-x_3}$
  - $P(X_1 < 2, 1 < X_2 < 3, X_3 > 2)$
    $= \int_2^{\infty}\int_1^3\int_0^2 e^{-x_1-x_2-x_3}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 \ = (1-e^{-2})(e^{-1}-e^{-3})e^{-2} \approx 0.03722$

$\therefore\ 0.03722$

Thanks!

서 진 우(jinwoo@pel.sejong.ac.kr)

부록#1

- 그림 코드 (1/9)
  - <그림 1> 확률질량함수도

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# 이항분포 B(4, 0.5) 확률질량함수
x = np.arange(0, 5)
f = np.array([1, 4, 6, 4, 1]) / 16

fig, ax = plt.subplots(figsize=(5, 4))

markerline, stemlines, baseline = ax.stem(x, f, linefmt="c--", markerfmt="ko", basefmt=" ")
plt.setp(markerline, markersize=6)
plt.setp(stemlines, linewidth=1.2)

# y축 분수 눈금
yticks = np.arange(1, 7) / 16
ax.set_yticks(yticks)
ax.set_yticklabels([f"{n}/16" for n in range(1, 7)])

# x축 정수 눈금
ax.set_xticks(x)
ax.set_xlim(-0.4, 4.8)
ax.set_ylim(0, 7 / 16)

# 축 이름 위치 조정
ax.set_ylabel("f(x)", rotation=0, labelpad=15, fontsize=12)
ax.yaxis.set_label_coords(0, 1.02)
ax.set_xlabel("x", fontsize=12)
ax.xaxis.set_label_coords(1.02, 0)

# 위·오른쪽 테두리 제거
ax.spines["top"].set_visible(False)
ax.spines["right"].set_visible(False)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

부록#2

- 그림 코드 (2/9)
  - <그림 2> 확률히스토그램

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# 이항분포 B(4, 0.5) 확률질량함수
x = np.arange(0, 5)
f = np.array([1, 4, 6, 4, 1]) / 16

fig, ax = plt.subplots(figsize=(5, 4))

ax.bar(x, f, width=1.0, align="center",
color="lightblue", edgecolor="black")

# y축 분수 눈금
yticks = np.arange(1, 7) / 16
ax.set_yticks(yticks)
ax.set_yticklabels([f"{n}/16" for n in range(1,
7)])

# x축 정수 눈금
ax.set_xticks(x)
```

```
# 축 이름 위치 조정
ax.set_ylabel("f(x)", rotation=0, labelpad=15,
fontsize=12)
ax.yaxis.set_label_coords(0, 1.02)
ax.set_xlabel("x", fontsize=12)
ax.xaxis.set_label_coords(1.02, 0)

# 위·오른쪽 테두리 제거
ax.spines["top"].set_visible(False)
ax.spines["right"].set_visible(False)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

부록#3

- 그림 코드 (3/9)
  - <그림 3> P(a < X < b) (1/2)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

mu, sigma = 3.5, 1.0
x = np.linspace(0, 7, 400)
y = np.exp(-(x - mu)**2 / (2 * sigma**2))
a, b = mu - 0.8, mu + 1.4
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 4))

# 곡선
ax.plot(x, y, color="steelblue", linewidth=1.3)

# a~b 구간 색칠
xs = np.linspace(a, b, 200)
ys = np.exp(-(xs - mu)**2 / (2 * sigma**2))
ax.fill_between(xs, 0, ys, color="lightblue",
alpha=0.6)
ax.plot([a, a], [0, np.exp(-(a - mu)**2 / (2 *
sigma**2))], color="steelblue", linewidth=1)
ax.plot([b, b], [0, np.exp(-(b - mu)**2 / (2 *
sigma**2))], color="steelblue", linewidth=1)
```

```
# 좌표축 범위
ax.set_xlim(-0.3, 7.6)
ax.set_ylim(-0.05, 1.22)

# 테두리 제거 (화살표 축으로 대체)
for spine in ax.spines.values():
    spine.set_visible(False)
ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])

ax.annotate("", xy=(7.6, 0), xytext=(-0.3, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->",
color="black", linewidth=1))
ax.annotate("", xy=(0, 1.22), xytext=(0, -0.05),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->",
color="black", linewidth=1))

# 축 이름
ax.text(-0.08, 1.2, "f(x)", fontsize=12,
style="italic", ha="right", va="top")
ax.text(7.65, 0, "x", fontsize=12,
style="italic", ha="left", va="center")
```

부록#4

- 그림 코드 (4/9)
  - <그림 3> P(a < X < b) (2/2)

```
# a, b 눈금
for v, label in [(a, "a"), (b, "b")]:
    ax.plot([v, v], [-0.02, 0.02], color="black", linewidth=1)
    ax.text(v, -0.09, label, fontsize=11, style="italic", ha="center", va="top")

plt.tight_layout()
plt.show()
```

부록#5

- 그림 코드 (5/9)
  - <그림 4> 전형적인 밀도함수

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig, axs = plt.subplots(1, 4, figsize=(8, 4))

# (a) 오른쪽 꼬리 비대칭 분포
x = np.linspace(0, 6, 400)
y = x * np.exp(-x)
axs[0].plot(x, y, color="c", linewidth=1.5)
axs[0].set_xlim(-0.4, 6.4)
axs[0].set_ylim(-0.02, 0.42)

# (b) 증가하는 직선
x = np.array([0.12, 0.85])
y = np.array([0.22, 0.55])
axs[1].plot(x, y, color="c", linewidth=1.5)
axs[1].set_xlim(0, 1)
axs[1].set_ylim(0, 1)
```

```
# (c) 종 모양 분포
x = np.linspace(-3.5, 3.5, 400)
y = np.exp(-x**2 / 2)
axs[2].plot(x, y, color="c", linewidth=1.5)
axs[2].set_xlim(-3.9, 3.9)
axs[2].set_ylim(-0.03, 1.1)

# (d) U자형 분포
x = np.linspace(-1, 1, 400)
y = x**2
axs[3].plot(x, y, color="c", linewidth=1.5)
axs[3].set_xlim(-1.15, 1.15)
axs[3].set_ylim(-0.05, 1.08)

labels = ["(a)", "(b)", "(c)", "(d)"]
for ax, label in zip(axs, labels):
    ax.set_xticks([])
    ax.set_yticks([])
    ax.set_xlabel(label, fontsize=12)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

부록#6

- 그림 코드 (6/9)
  - <그림 5> 확률밀도함수 (1/2)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 4.5))

# 확률밀도함수 f(x) = x²/3  (-1 < x < 2)
x_pdf = np.linspace(-1, 2, 400)
y_pdf = x_pdf**2 / 3

# 테두리 제거 (화살표 축으로 대체)
for spine in ax.spines.values():
    spine.set_visible(False)
ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])

ax.set_xlim(-2.0, 3.0)
ax.set_ylim(-0.18, 1.65)
```

```
# 화살표 축
ax.annotate("", xy=(2.95, 0), xytext=(-1.9, 0),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", color="black", linewidth=1))
ax.annotate("", xy=(0, 1.6), xytext=(0, -0.15),
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", color="black", linewidth=1))

# 정의역 밖 (f=0)
ax.plot([-1.8, -1], [0, 0], color="steelblue", linewidth=2)
ax.plot([2, 2.8], [0, 0], color="steelblue", linewidth=2)

# 경계 수직 점선
ax.plot([-1, -1], [0, 1/3], color="steelblue", linewidth=1.2, linestyle="--")
ax.plot([2, 2], [0, 4/3], color="steelblue", linewidth=1.2, linestyle="--")

# P(0 < X ≤ 1) 구간 색칠
x_shade = np.linspace(0, 1, 200)
y_shade = x_shade**2 / 3
ax.fill_between(x_shade, 0, y_shade, color="lightblue", alpha=0.7)
```

부록#7

- 그림 코드 (7/9)
  - <그림 5> 확률밀도함수 (2/2)

```
# 포물선 곡선
ax.plot(x_pdf, y_pdf, color="steelblue", linewidth=2)

# 경계의 열린 원
for px, py in [(-1, 0), (-1, 1/3), (2, 0), (2, 4/3)]:
    ax.plot(px, py, "o", color="steelblue", markersize=6,
            markerfacecolor="white", markeredgewidth=1.5)

# x축 눈금
for v, label in [(-1, r"$-1$"), (1, r"$1$"), (2, r"$2$")]:
    ax.plot([v, v], [-0.03, 0.03], color="black", linewidth=1)
    ax.text(v, -0.1, label, fontsize=11, ha="center", va="top")
```

```
# y축 눈금
ax.plot([-0.04, 0.04], [1/3, 1/3], color="black", linewidth=1)
ax.text(-0.08, 1/3, r"$\frac{1}{3}$", fontsize=12, ha="right", va="center")

ax.plot([-0.04, 0.04], [4/3, 4/3], color="black", linewidth=1)
ax.text(-0.08, 4/3, r"$\frac{4}{3}$", fontsize=12, ha="right", va="center")

# 함수식 표시
ax.text(1.55, 0.95, r"$f(x)=\dfrac{x^2}{3}$", fontsize=12, color="steelblue",
        ha="left", va="bottom")

# 축 이름
ax.text(-0.1, 1.58, r"$f(x)$", fontsize=12, style="italic", ha="right", va="top")
ax.text(3.0, -0.1, r"$x$", fontsize=12, style="italic", ha="left", va="top")

plt.tight_layout()
plt.show()
```

부록#8

- 그림 코드 (8/9)
  - <그림 6> 이산형 누적분포

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# 이항분포 B(4, 0.5) 누적분포함수
x_vals = np.array([0, 1, 2, 3, 4])
pmf = np.array([1, 4, 6, 4, 1]) / 16
F = np.cumsum(pmf)  # [1/16, 5/16, 11/16, 15/16, 1]

fig, ax = plt.subplots(figsize=(5, 4))

# x<0 구간 (F=0)
ax.hlines(0, -0.5, 0, color="c", linewidth=1.5)

# 계단 수평선과 점
for i, xv in enumerate(x_vals):
    x_next = x_vals[i + 1] if i + 1 < len(x_vals) else xv + 1
    ax.hlines(F[i], xv, x_next, color="c", linewidth=1.5)
    ax.plot(xv, F[i], "ko", markersize=6)
```

```
# 계단 점프 구간 점선
prev = np.concatenate(([0], F[:-1]))
for xv, y_prev, y_now in zip(x_vals, prev, F):
    ax.vlines(xv, y_prev, y_now, color="c", linestyle="--", linewidth=1.2)

# y축 분수 눈금
ax.set_yticks([0.25, 0.5, 0.75, 1])
ax.set_yticklabels(["1/4", "1/2", "3/4", "1"])

# x축 정수 눈금
ax.set_xticks(x_vals)

ax.set_xlim(-0.5, 5.3)
ax.set_ylim(0, 1.15)

# 축 이름 위치 조정
ax.set_ylabel("F(x)", rotation=0, labelpad=15, fontsize=12, style="italic")
ax.yaxis.set_label_coords(0, 1.05)
ax.set_xlabel("x", fontsize=12, style="italic")
ax.xaxis.set_label_coords(1.02, 0)

# 위·오른쪽 테두리 제거
ax.spines["top"].set_visible(False)
ax.spines["right"].set_visible(False)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

부록#9

- 그림 코드 (9/9)
  - <그림 7> 연속형 누적분포

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-1, 2.6, 800)
y = np.zeros_like(x)

# -1<=x<0: 낮은 값까지 빠르게 상승
mask1 = (x >= -1) & (x < 0)
y[mask1] = 0.12 * (1 - np.exp(-4 * (x[mask1] + 1)))

# 0<=x<2: 지수 형태로 상승
mask2 = (x >= 0) & (x < 2)
y0 = 0.12 * (1 - np.exp(-4))
A = (1 - y0) / (np.exp(4) - 1)
y[mask2] = y0 + A * (np.exp(2 * x[mask2]) - 1)

# x>=2: 1.0에서 평평
mask3 = x >= 2
y[mask3] = 1.0

fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.2, 3.1))
ax.plot(x, y, color="deepskyblue", linewidth=1.5)

# 축을 원점으로 이동, 위·오른쪽 테두리 제거
ax.spines["left"].set_position("zero")
ax.spines["bottom"].set_position("zero")
ax.spines["top"].set_visible(False)
ax.spines["right"].set_visible(False)

ax.set_xlim(-1.2, 2.6)
ax.set_ylim(-0.05, 1.15)

ax.set_xticks([-1, 0, 1, 2])
ax.set_yticks([0.5, 1.0])
ax.set_yticklabels(["0.5", "1.0"])

# 축 이름
ax.text(2.63, 0, "x", fontsize=12, style="italic", ha="left", va="center")
ax.text(0, 1.2, "f(x)", fontsize=12, style="italic", ha="center", va="bottom")

plt.tight_layout()
plt.show()
```