2026/09/28, 2026 확률 기초 세미나

이공학도를 위한 확률 및 통계학

-7장 확률변수의 함수-

송 민 희(minhee@pel.sejong.ac.kr)

세종대학교 프로토콜공학연구실

목 차

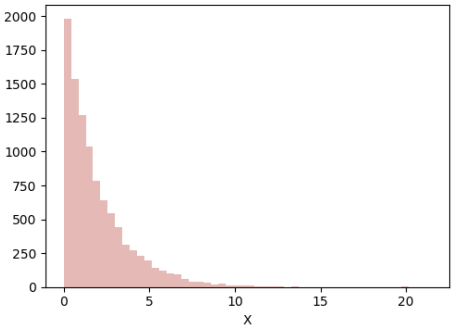
- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

목 차

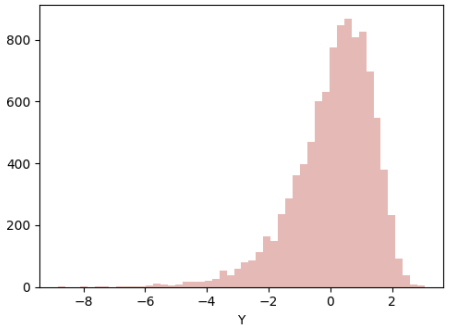
- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

확률변수의 변수변환

- 변수변환(Transformation) (1/2)
  - 개요
    - 확률변수 X에 대해 함수 $g(X)$를 적용하여 새로운 확률변수 Y를 정의하는 것
    - X의 확률분포가 주어졌을 때, $Y = g(X)$의 확률분포를 구하기 위해 사용
  - 필요성 (1/2)
    - 분포 형태의 단순화
      - e.g., 일반적으로 오른쪽으로 치우친 초당 트래픽 분포에 $Y = \log X$를 적용하여 대칭적으로 변환



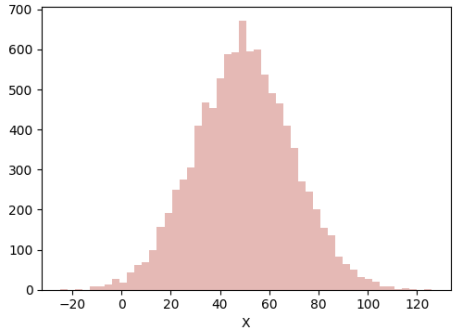
<그림 1> 변환 전 초당 트래픽 분포



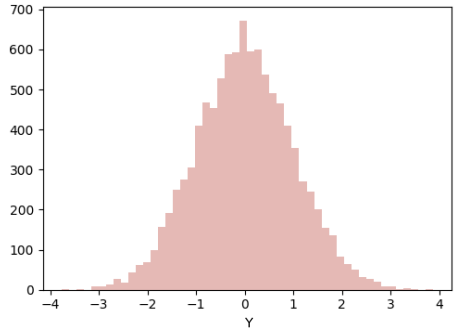
<그림 2> 변환 후 초당 트래픽 분포

확률변수의 변수변환

- 변수변환 (2/2)
  - 필요성 (2/2)
    - 분석 안정성 확보
      - e.g., 분산이 매우 큰 세션 길이 분포에 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$를 적용하여 평균 0, 분산 1로 정규화

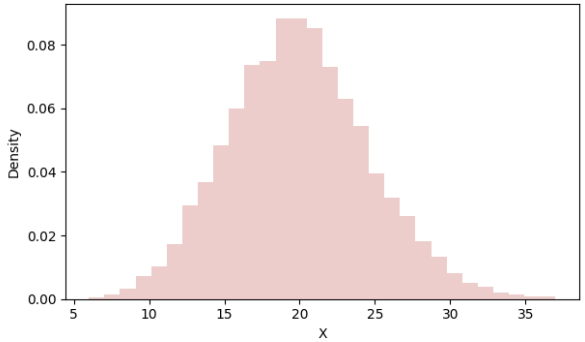


<그림 3> 변환 전 세션길이 분포

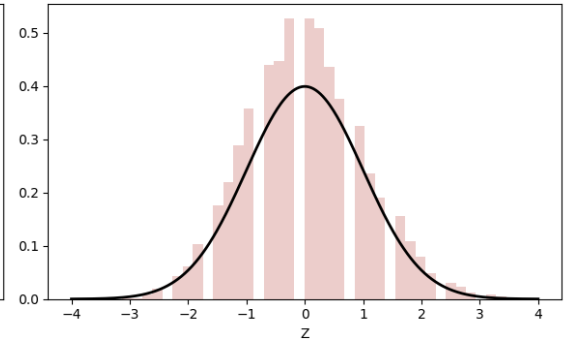


<그림 4> 변환 후 세션길이 분포

    - 이론적 모델과의 비교 용이
      - e.g., 웹 서버의 접속 요청 횟수 X를 $Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$로 변환하여 포아송 분포 모형과 비교함으로써 트래픽 이상 여부를 판단



<그림 5> 변환 전 접속 요청 횟수



<그림 6> 변환 후 접속요청횟수

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환 (1/5)
  - 정리 7.1 - X와 Y가 1대1 대응인 경우

X는 확률분포가 $f(x)$인 이산형 확률변수이고, X와 Y사이에는 $Y = u(X)$라는 1대1 대응관계가 성립하여 관계식 $y = u(x)$를 x에 대하여 풀면 유일하게 $x = w(y)$로 될 때, Y의 확률분포는

$$g(y) = f[w(y)]$$

가 된다.

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환 (2/5)
  - 예제 7.1

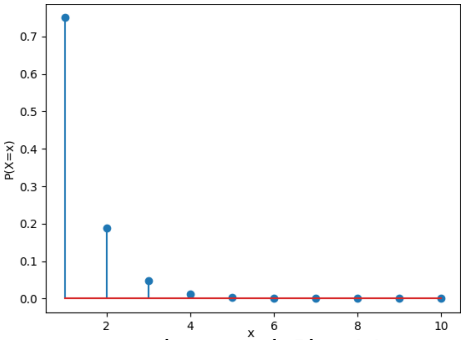
X의 확률분포가 $f(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$ 인 기하분포를 따를 때
$Y = X^2$의 확률분포를 구하라.

- $X > 0$ 이므로 x와 y는 1대1 대응관계

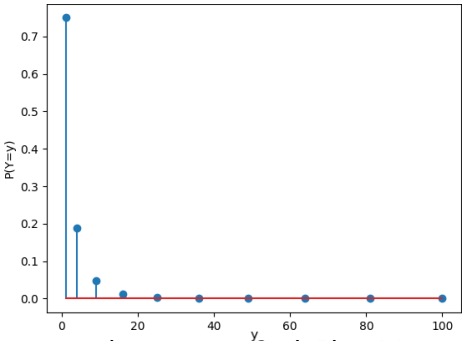
$$Y = X^2$$
$$x = \sqrt{y} \quad \because (x > 0)$$

- $Y = X^2$의 확률분포 $g(y)$ 계산

$$g(y)\begin{cases} f(\sqrt{y}) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{y}-1}, & y = 1, 4, 9, \ldots \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



<그림 7> X의 확률분포



<그림 8> $Y = X^2$의 확률분포

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환 (3/5)
  - 정리 7.2 - (X_1, X_2)와 (Y_1, Y_2)가 1대1 대응인 경우

X_1과 X_2는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$인 이산형 확률변수이고, (x_1, x_2)와 (y_1, y_2)는 서로 1대1로 대응하여 식 $y_1 = u_1(x_1, x_2)$와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$를 x_1과 x_2에 대하여 풀면 유일하게 $x_1 = w_1(y_1, y_2)$와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$로 될 때, $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$와 $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$라고 정의되는 새로운 확률변수 Y_1과 Y_2의 결합확률분포는

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]$$

가 된다.

- 주변화(Marginalization)
  - 결합확률분포에서 관심 있는 확률변수만의 확률분포를 구하는 과정
    - 관심 없는 확률변수가 가질 수 있는 모든 값에 대한 확률을 합산
  - $h(y_1) = \sum_{y_2} g(y_1, y_2)$

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환 (4/5)
  - 예제 7.2 (1/2)

X_1과 X_2는 각각 μ_1, μ_2의 모수를 가지는 포아송 분포를 따르는 확률변수로서 서로 독립일 때, 새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$의 확률분포를 구하라.

- X_1과 X_2는 서로 독립

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2) = \frac{e^{-\mu_1}\mu_1^{x_1}}{x_1!}\frac{e^{-\mu_2}\mu_2^{x_2}}{x_2!} = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}\mu_1^{x_1}\mu_2^{x_2}}{x_1!\,x_2!}$$

$$\text{단, } x_1 = 0, 1, 2, \dots, \quad x_2 = 0, 1, 2, \dots$$

- 두 번째의 확률변수 $Y_2 = X_2$

$$x_1 = y_1 - y_2, \qquad x_2 = y_2$$

*포아송분포의 확률질량함수

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

- Y_1과 Y_2의 결합확률분포

$$g(y_1, y_2) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y2}}{(y_1 - y_2)!\,y_2!}$$

$$\text{단, } y_1 = 0,1,2, \dots, \; y_2 = 0,1,2, \dots, y_1$$

- $x_1 \geq 0$ 이므로 $x_1 = y_1 - x_2$에서 $y_2(= x_2) \leq y_1$

확률변수의 변수변환

- 이산형 확률변수의 변수변환 (5/5)
  - 예제 7.2 (2/2)

X_1과 X_2는 각각 μ_1, μ_2의 모수를 가지는 포아송 분포를 따르는 확률변수로서 서로 독립일 때, 새로운 확률변수 $Y_1 = X_1 + X_2$의 확률분포를 구하라.

- Y_1에 대한 주변확률분포

$$h(y_1) = \sum_{y_2=0}^{y_1} g(y_1, y_2) = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{\mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}}{(y_1-y_2)!\,y_2!}$$

$$= \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \frac{y_1!}{y_2!\,(y_1-y_2)!} \mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2} = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{y_1!} \sum_{y_2=0}^{y_1} \binom{y_1}{y_2} \mu_1^{y_1-y_2}\mu_2^{y_2}$$

- 합의 값은 $(\mu_1 + \mu_2)^{y_1}$의 이항전개와 동일

$$\therefore h(y_1) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}(\mu_1+\mu_2)^{y_1}}{y_1!}, \qquad y_1 = 0, 1, 2, \ldots$$

∴ 모수가 μ_1과 μ_2인 포아송 분포를 따르는 서로 독립인 두 확률변수의 합은 $(\mu_1 + \mu_2)$의 모수를 가지는 포아송 분포를 따름

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (1/10)
  - 정리 7.3 - X와 $Y = u(X)$가 1대1 대응인 경우 (1/3)

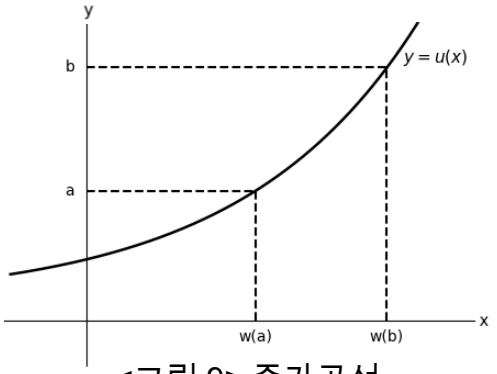
X는 확률분포가 $f(x)$인 연속형 확률변수이고, X와 Y사이에는 $Y = u(X)$라는 1대1 대응관계가 성립하여 관계식 $y = u(x)$를 x에 대하여 풀면 유일하게 $x = w(y)$로 될 때, Y의 확률분포는

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

가 된다. 여기서 $J = w'(y)$이며, 이를 야코비안(Jacobian)이라고 부른다.

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (2/10)
  - 정리 7.3 - X와 Y가 1대1 대응인 경우 (2/3)
    - 증명 (1/2)



<그림 9> 증가곡선

먼저, $Y = u(x)$가 증가함수라면, Y가 a와 b사이에 오게 되면 확률변수 X는 $w(a)$와 $w(b)$사이에 와야 하므로, Y가 a와 b사이에 속할 확률은

$$P(a < Y < b) = P[w(a) < X < w(b)] = \int_{w(a)}^{w(b)} f(x)\,dx$$

적분변수 x를 y로 변환시키려면 $x = w(y)$의 관계로부터 $dx = w'(y)dy$를 얻게 되고, 이를 적분식에 대입하면

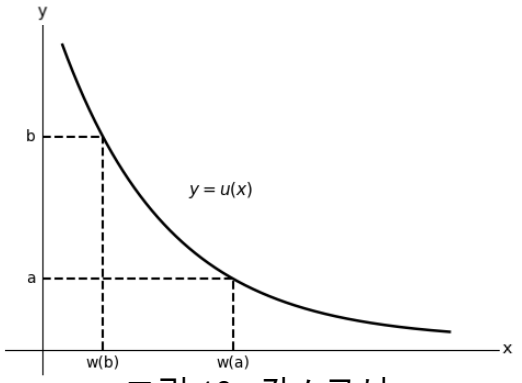
$$P(a < Y < b) = \int_{a}^{b} f[w(y)]w'(y)\,dy$$

이 적분값은 y의 범위 안에서 $a < b$인 각각의 경우의 구하고자 하는 확률 값
따라서, Y의 확률 분포 $g(y)$는

$$g(y) = f[w(y)]w'(y) = f[w(y)]J$$

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (3/10)
  - 정리 7.3 - X와 Y가 1대1 대응인 경우 (3/3)
    - 증명 (2/2)



<그림 10> 감소곡선

이어서, $Y = u(x)$가 감소함수라면, Y가 a와 b사이에 오게 되면 확률변수 X는 $w(b)$와 $w(a)$사이에 와야 하므로, Y가 a와 b사이에 속할 확률은

$$P(a < Y < b) = P[w(b) < X < w(a)] = \int_{w(b)}^{w(a)} f(x)\,dx$$

적분변수 x를 y로 변환시키면

$$P(a < Y < b) = \int_{b}^{a} f[w(y)]w'(y)\,dy = -\int_{a}^{b} f[w(y)]w'(y)\,dy$$

$$g(y) = -f[w(y)]w'(y) = -f[w(y)]J$$

$u(x)$가 감소함수 이므로 기울기는 음이고 $J = -|J|$ 이므로 증가함수의 경우와 동일하게

$$g(y) = f[w(y)]|J|$$

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (4/10)
  - 예제 7.3

X가 연속형 확률변수이고 확률분포 $f(x)$가 다음과 같을 때, 확률변수 $Y = 2X - 3$의 확률분포를 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12}, & 1 < x < 5 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- 확률변수 정리

$$y = 2x - 3 \implies x = \frac{y+3}{2}$$

- 정리

$$J = w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$$

- 확률변수 $Y = 2X - 3$의 확률분포 $g(y)$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{(y+3)/2}{12}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{y+3}{48}, & -1 < y < 7 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (5/10)
  - 정리 7.4 - (X_1, X_2)와 (Y_1, Y_2)가 1대1 대응인 경우

X_1과 X_2는 결합확률분포가 $f(x_1, x_2)$인 연속형 확률변수이고, (x_1, x_2)와 (y_1, y_2)는 서로 1대1로 대응하여 식 $y_1 = u_1(x_1, x_2)$와 $y_2 = u_2(x_1, x_2)$를 x_1과 x_2에 대하여 풀면 유일하게 $x_1 = w_1(y_1, y_2)$와 $x_2 = w_2(y_1, y_2)$로 될 때, Y_1과 Y_2의 결합확률 분포는

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)]|J|$$

가 된다. 여기서 J는 2×2 행렬식으로서

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

이다.

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (6/10)
  - 예제 7.4 (1/2)

X_1과 X_2는 연속형 확률변수이고 결합확률분포 $f(x)$가 다음과 같을 때,
$Y_1 = X_1^2$과 $Y_2 = X_1X_2$의 결합확률분포를 구하라.

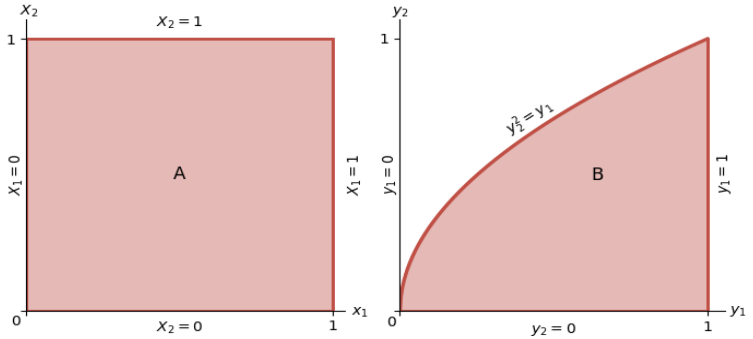
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- 확률변수 정리

$$y_1 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{y_1}, \qquad y_2 = x_1x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{y_2}{\sqrt{y_1}}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1}} & 0 \\ -\frac{y_2}{2y_1^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{y_1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2y_1}$$

- 집합 $A = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$
  집합 $B = \{(y_1, y_2) \mid y_2^2 < y_1 < 1,\ 0 < y_2 < 1\}$
- A와 B는 1대1로 대응



<그림 11> 집합 A와 집합 B의 대응관계

확률변수의 변수변환

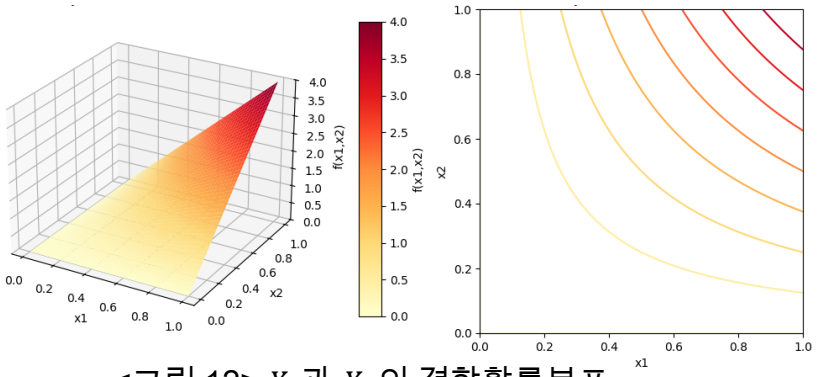
- 연속형 확률변수의 변수변환 (7/10)
  - 예제 7.4 (2/2)

X_1과 X_2는 연속형 확률변수이고 결합확률분포 $f(x)$가 다음과 같을 때,
$Y_1 = X_1^2$과 $Y_2 = X_1 X_2$의 결합확률분포를 구하라.

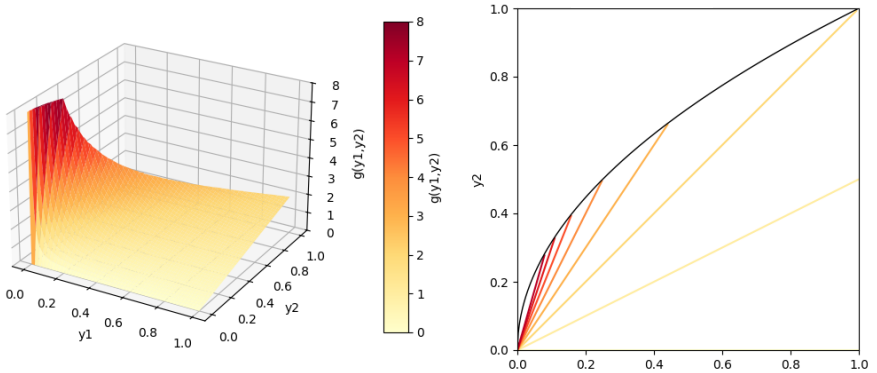
$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1 x_2, & 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

- Y_1과 Y_2의 결합 확률분포 $g(y_1, y_2)$

$$g(y_1, y_2) = 4(\sqrt{y_1})\frac{y_2}{\sqrt{y_1}}\frac{1}{2y_1} = \begin{cases} \frac{2y_2}{y_1}, & y_2^2 < y_1 < 1, 0 < y_2 < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



<그림 12> X_1과 X_2의 결합확률분포



<그림 13> Y_1과 Y_2의 결합확률분포

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (8/10)
  - 정리 7.5 - X와 $Y = u(X)$가 1대1 대응이 아닌 경우

X는 확률분포 $f(x)$를 가지는 연속형 확률변수이고, $Y = u(X)$로 변수변환을 하려고 할 때 X와 Y가 1대1 대응관계를 만족하지 못한다고 하자. 이 경우 만일 $y = u(x)$와 k개의 역함수 $x_1 = w_1(y), x_2 = w_2(y), \ldots, x_k = w_k(y)$가 각각 1대1 대응관계를 가지도록 X의 영역을 k개의 서로 배반인 영역으로 분할시킬 수 있다면,

Y의 확률분포는

$$g(y) = \sum_{i=1}^{k} f[w_i(y)]|J_i|$$

가 된다. 단, $\mathrm{J}_i = w_i'(y),\ i = 1,2,\ldots,k$이다.

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (9/10)
  - 예제 7.5 (1/2)

X가 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따를 때, $Y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름을 증명하라.

- 새로운 확률변수 $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ 는 표준정규분포를 따름

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad -\infty < z < \infty$$

*표준정규분포의 확률밀도함수

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

- Y를 Z에 대해 정리
  - $Y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} \Rightarrow y = z^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{y}$
  - $z_1 = -\sqrt{y}, \quad z_2 = \sqrt{y} \Rightarrow J_1 = -\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad J_2 = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

- Y의 분포에 대한 함수 $g(y)$ 유도

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, \qquad y > 0$$

확률변수의 변수변환

- 연속형 확률변수의 변수변환 (10/10)
  - 예제 7.5 (2/2)

X가 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따를 때, $Y = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$은 자유도 1인 카이제곱분포를 따름을 증명하라.

*카이제곱분포의 확률밀도함수

$$f(x;v) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-x/2}$$

- $g(y)$는 확률밀도함수임에 대한 검증

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

  - $t = \frac{y}{2} \rightarrow y = 2t, dy = 2\,dt$ 대입

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (2t)^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} \cdot 2\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

  - $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 대입 (이에 대한 증명은 부록#1 참고)

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

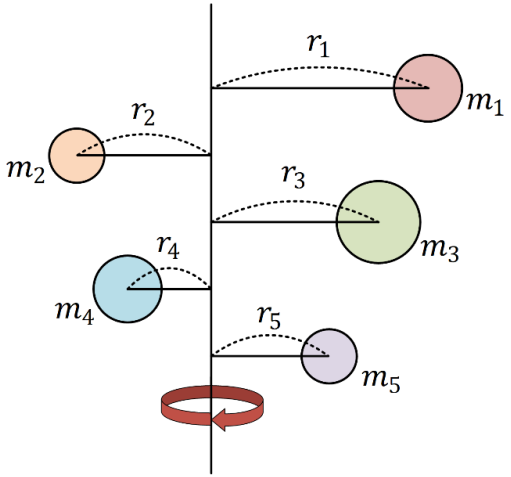
$\therefore$ Y의 확률분포 $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$ 는 자유도 1인 카이제곱분포를 따름

목 차

- 확률변수의 변수변환
- 적률과 적률생성함수

적률과 적률생성함수

- 적률(Moment) (1/2)
  - 물리학에서의 정의
    - 물체의 질량이나 힘이 특정 기준점 주위에 분포하는 방식을 나타내는 물리량
    - e.g., 관성모먼트 $I = \sum m_i \cdot r_i^2$



<그림 14> 회전축 주변 질량 분포

  - 수학에서의 정의
    - 함수나 데이터의 분포 형태를 정량적으로 나타내는 척도
    - e.g., <그림 14>에서 회전축 주변에 질량이 분포한다고 가정
      - 질량 m_i는 확률의 가중치, 거리 r_i는 확률변수 값에 해당
      - <그림 14>는 이산확률분포에 대응하는 수학적 구조
        $E[X^2] = \sum p_i x_i^2 \quad (p_i = \frac{m_i}{\sum m_i})$

적률과 적률생성함수

- 적률 (2/2)
  - 정의 7.1

확률변수 X의 원점에 대한 r차 적률 μ_r'은

$$\mu_r' = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x), & X\text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\,dx, & X\text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

이다.

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수(MGF, Moment Generating Function) (1/7)
  - 정의 7.2

확률변수 X의 적률생성함수 $E(e^{tX})$를 $M_X(t)$로 표기하면,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x), & X\text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx, & X\text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

이다.

- 특징
  - 생성한 적률생성함수가 적분 가능한 함수인 경우에만 사용
  - $t = 0$을 포함하는 어떤 구간에서 $E(e^{tx})$가 유한한 값으로 수렴해야 존재함

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수 (2/7)
  - 정리 7.6

확률변수 X의 적률생성함수를 $M_X(t)$라 하면,

$$\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\Big|_{t=0} = \mu'_r$$

이 된다.

  - 증명 (부록#2)

$M_X(t)$를 이산형인 경우와 연속형인 경우 각각 t에 대해 r번 미분하면

$$\frac{d^r M_X(t)}{dt^r} = \begin{cases} \sum_x x^r e^{tx} f(x), & X\text{가 이산형인 경우} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f(x)\,dx, & X\text{가 연속형인 경우} \end{cases}$$

가 된다.
여기서 $t = 0$을 대입하면 두 경우 모두 $E(X^r) = \mu'_r$이 된다.

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수 (3/7)
  - 예제 7.6

*이항분포의 확률질량함수

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

확률변수 X가 이항분포를 따를 때 X의 적률생성함수를 구하고,
이를 이용하여 $\mu=np, \sigma^2=npq$가 됨을 증명하라.

- 정의 7.2를 통해 $M_X(t)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^xq^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^xq^{n-x}$
- 이항 정리를 통해 $M_X(t)=(pe^t+q)^n$로 정리 후 평균과 분산 계산
  - 평균(μ_1')

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=n(pe^t+q)^{n-1}pe^t$$

*이항 정리

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

  - $E(X^2)$ (μ_2')

$$\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}=np[e^t(n-1)(pe^t+q)^{n-2}pe^t+(pe^t+q)^{n-1}e^t]$$

  - $t=0$ 대입

$$\mu_1'=n(p+q)^{n-1}p=np$$
$$\mu_2'=np[(n-1)(p+q)^{n-2}p+(p+q)^{n-1}]=np[(n-1)p+1]$$

  - 최종계산 (5장 이항분포의 평균과 분산에 대한 증명은 부록#3 참고)

$$\mu=\mu_1'=np, \qquad \sigma^2=\mu_2'-\mu^2=np(1-p)=npq$$

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수 (4/7)
  - 예제 7.7 (1/2)

확률변수 X가 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따를 때,
X의 적률생성함수는 $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$이 됨을 유도하라.

- 정의 7.2를 통해

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

- 지수항 정리

$$x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + \mu^2 = [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$$

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right\} dx$$
$$= \exp\left(\frac{2\mu t + \sigma^2 t^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - (\mu + t\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수 (5/7)
  - 예제 7.7 (2/2)

확률변수 X가 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따를 때,
X의 적률생성함수는 $M_X(t) = \exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$이 됨을 유도하라.

- $w = \frac{[x-(\mu+t\sigma^2)]}{\sigma}$로 치환 $\Rightarrow\ dx = \sigma dw$

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}dw$$

- 표준정규분포의 면적 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}dw = 1$ 대입

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

*정규분포의 확률밀도함수

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

*표준정규분포의 확률밀도함수

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수 (6/7)
  - 정리 7.7 (유일성 정리)

두 확률변수 X와 Y의 적률생성함수가 각각 $M_X(t)$, $M_Y(t)$일 때, 모든 t값에 대해 $M_X(t) = M_Y(t)$이면 X와 Y는 같은 확률분포를 가진다.

  - 정리 7.8

$$M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$$

    - 증명

$$M_{X+a}(t) = E\left[e^{t(X+a)}\right] = e^{at} E(e^{tX}) = e^{at} M_X(t)$$

  - 정리 7.9

$$M_{aX}(t) = M_X(at)$$

    - 증명

$$M_{aX}(t) = E\left[e^{t(aX)}\right] = E\left[e^{(at)X}\right] = M_X(at)$$

적률과 적률생성함수

- 적률생성함수 (7/7)
  - 정리 7.10

확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 서로 독립이면서 각각의 적률생성함수가 $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots, M_{X_n}(t)$이고 $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 이면, Y의 적률생성함수는 $M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$가 된다.

  - 증명

연속형인 경우에 대해서

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

확률변수들은 서로 독립이므로 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_n(x_n)$
따라서

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_1} f_1(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_2} f_2(x_2)\, dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_n} f_n(x_n)\, dx_n$$
$$= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

적률과 적률생성함수

- 확률변수의 선형결합 (1/6)
  - 정리 7.11

확률변수 $X_1, X_2, \dots, X_n$이 서로 독립이면서 각각 평균이 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$이고 분산이 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$인 정규분포를 따르면, $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$은 평균이 $\mu_Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n$이고 분산이 $\sigma_Y^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2$인 정규분포를 따른다.

  - 증명

확률변수 a_iX_i의 적률생성함수는 정리 7.9에 따라

$$M_{a_iX_i}(t) = M_{X_i}(a_it) = \exp\left(\mu_i(a_it) + \frac{1}{2}\sigma_i^2(a_it)^2\right) = \exp\left(a_i\mu_it + \frac{1}{2}a_i^2\sigma_i^2t^2\right)$$

각각 독립이므로 $M_Y(t) = M_{a_1X_1+\cdots+a_nX_n}(t) = \prod_{i=1}^n M_{a_iX_i}(t)$

이를 대입하여 정리하면

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^n \exp\left(a_i\mu_it + \frac{1}{2}a_i^2\sigma_i^2t^2\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_it + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\mu_i^2t^2\right)$$

정규분포 $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$의 적률생성함수는 $\exp\left(\mu_Yt + \frac{1}{2}\sigma_Y^2t^2\right)$이므로

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^n a_i\mu_i\,, \qquad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2$$

적률과 적률생성함수

- 확률변수의 선형결합 (2/6)
  - 예제 7.8

한 네트워크 시스템의 종합 성능 지수는 평균 70, 분산 100인 정규분포를 따르는 서버 처리 속도 점수 X_1과, 평균 80, 분산 64인 정규분포를 따르는 네트워크 안정성 점수 X_2로 구성되어 있으며, 서로 독립이다. 종합 성능 지수 Y를 다음과 같은 가중평균으로 정의된다고 할 때 Y의 평균과 분산과 $P(Y > 85)$를 구하라.

$$Y = 0.6X_1 + 0.4X_2$$

- 정리 7.11에 의해 독립 정규확률변수의 선형결합은 정규분포를 따름
  - 평균: $E(Y) = 0.6E(X_1) + 0.4\mathrm{E}(\mathrm{X}_2) = 0.6(70) + 0.4(80) = 42 + 32 = 74$
  - 분산: $\sigma_Y^2 = (0.6)^2\sigma_{X_1}^2 + (0.4)^2\sigma_{X_2}^2 = 0.36(100) + 0.16(64) = 36 + 10.24 = 46.24$
  - 표준편차: $\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{46.24} \approx 6.8$
- 확률 계산
  - 표준화: $Z = \frac{85-74}{6.8} \approx 1.62$
  - 표준정규분포표에 따라

$$P(Y > 85) = P(Z > 1.62) = 1 - P(Z < 1.62) = 1 - 0.9474 \approx 0.0526$$

∴ 약 5.2% 정도의 경우에만 85점 이상의 성능 점수가 나옴

[표 1] 표준정규분포표의 일부

Z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591

적률과 적률생성함수

- 확률변수의 선형결합 (3/6)
  - 정리 7.12 (1/3)

확률변수 $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 서로 독립이면서 각각 자유도가 $v_1, v_2, \ldots, v_n$인 카이제곱분포를 따른다면, $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$은 자유도가 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$인 카이제곱분포를 따른다.

  - 증명

정리 7.10에 의해

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$$

자유도가 v인 카이제곱분포의 적률생성함수(부록#4)는

$$M_{X_i}(t) = (1-2t)^{-\frac{v_i}{2}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

따라서

$$M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{v_1}{2}}(1-2t)^{-\frac{v_2}{2}} \ldots (1-2t)^{-\frac{v_n}{2}} = (1-2t)^{-\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{2}}$$

이며, 이는 자유도 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ 인 카이제곱분포의 적률생성함수

적률과 적률생성함수

- 확률변수의 선형결합 (4/6)
  - 정리 7.12 (2/3)

확률변수 $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 서로 독립이면서 각각 자유도가 $v_1, v_2, \ldots, v_n$인 카이제곱분포를 따른다면, $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$은 자유도가 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$인 카이제곱분포를 따른다.

  - 따름정리 7.1

확률변수 $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 서로 독립이면서 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포를 따른다면,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$$

은 자유도 $v = n$인 카이제곱 분포를 따른다.

적률과 적률생성함수

- 확률변수의 선형결합 (5/6)
  - 정리 7.12 (3/3)

확률변수 $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 서로 독립이면서 각각 자유도가 $v_1, v_2, \ldots, v_n$인 카이제곱분포를 따른다면, $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$은 자유도가 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$인 카이제곱분포를 따른다.

  - 따름정리 7.2

확률변수 $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 서로 독립이면서 각각의 평균이 μ_i, 분산이 σ_i^2인 정규분포를 따른다면,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$

은 자유도 $v = n$인 카이제곱분포를 따른다.

적률과 적률생성함수

- 확률변수의 선형결합 (6/6)
  - 예제 7.9

어떤 시스템에 서로 독립인 3개의 센서가 있다. 각 센서의 측정 오차 X_1, X_2, X_3은 평균 0, 분산 1인 정규분포를 따른다고 하자. 시스템의 전체 오차 크기 Y를 다음과 같이 정의할 때, Y의 분포와 $P(Y > 7.81)$을 구하라.

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

- 각 측정 오차 X_i를 제곱한 X_i^2는 각각 자유도 1인 카이제곱분포를 따름
- 서로 독립이므로 정리 7.12에 따라

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \quad \rightarrow \quad Y \sim \chi^2(3)$$

$\therefore Y$는 자유도가 3인 카이제곱분포

[표 2] 카이제곱표의 일부

자유도	카이제곱분포의 백분위수				
	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01
2	1.386	2.77	4.61	5.99	9.21
3	2.366	4.11	6.25	7.81	11.34
4	3.357	5.39	7.78	9.49	13.28

- 확률 계산
  - 카이제곱표에 따라

$$\chi^2_{0.95,3} = 7.81 \quad \Rightarrow \quad P(Y \le 7.81) = 0.95$$

$$P(Y > 7.81) = 1 - P(Y \le 7.81) = 1 - 0.95 = 0.05$$

$\therefore Y$의 값이 7.81을 초과할 경우 상위 5%로 이상치에 해당함

Thanks!

송 민 희(minhee@pel.sejong.ac.kr)

부록#1

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 증명 (1/3)

1. 감마함수 정의

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

여기서 $\alpha = \frac{1}{2}$ 대입하면

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt$$

부록#1

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 증명 (2/3)

2. $t = x^2$ 치환

$t^{-\frac{1}{2}}$를 없애기 위해 $t = x^2$으로 치환

$$t = x^2 \quad \Rightarrow \quad dt = 2x\,dx$$
$$t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x}$$

이를 대입하면

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x^2} \cdot 2x \; dx$$
$$= 2\int_0^\infty e^{-x^2} \; dx$$

부록#1

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 증명 (3/3)

3. 가우스 적분

해당 식에 가우스 적분을 계산하면

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

부록#2

- MGF 미분 증명 (정리 7.6)

MGF를 전개하면

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + \frac{t^3E(X^3)}{3!} + \cdots$$

MGF를 한 번 미분하고 $t = 0$을 대입하면

$$M_X'(t) = E(X) + tE(X^2) + \frac{t^2E(X^3)}{2!} + \cdots$$
$$M_X'(0) = E(X)$$

MGF를 두 번 미분하고 $t = 0$을 대입하면

$$M_X''(t) = E(X^2) + tE(X^3) + \cdots$$
$$M_X''(0) = E(X^2)$$

이에 따라 MGF를 r번 미분하고 $t = 0$을 대입하면

$$M_X^r(0) = E(X^r)$$

부록#3

- 이항분포 $b(x;n,p)$ 의 평균과 분산 증명 (5장)

j번째 시행에서의 결과를 베르누이 확률변수 J_i로 표시하면 I_j는 q와 p의 확률로 각각 0과 1의 값을 가짐. 따라서, 이항실험에서 성공횟수는 n개의 독립된 베르누이 변수의 합으로 쓰여질 수 있음.
그러므로

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

I_j의 평균은 $E(I_j) = (0)(q) + (1)(p) = p$이다.

$g(X,Y) = X$이고 $h(X,Y) = Y$라 했을 때 $E[X \pm Y] = E[X] \pm E(Y)$를 이용하면,
이항분포의 평균은

$$\mu = E(X) = E(I_1) + E(I_2) + \cdots + E(I_n) = \underbrace{p + p + \cdots + p}_{n\text{개}} = np$$

I_j의 분산은

$$\sigma_{I_j}^2 = E\left[\left(I_j - p\right)^2\right] = E\left(I_j^2\right) - p^2 = (0)^2(q) + (1)^2(p) - p^2 = p(1-p) = pq$$

서로 독립인 확률변수의 합의 분산은 각 분산의 합이므로 이항분포의 분산은

$$\sigma_X^2 = \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2 + \cdots + \sigma_{I_n}^2 = \underbrace{pq + pq + \cdots + pq}_{n\text{개}} = npq$$

부록#4

- 자유도가 v인 카이제곱분포의 적률생성함수 증명 (1/4)

1. $X^2(v)$의 밀도함수

카이제곱분포는 감마분포의 특수한 형태이므로

$$X \sim X^2(v) \Leftrightarrow X \sim Gamma\left(\alpha = \frac{v}{2}, \theta = 2\right)$$

카이제곱분포의 밀도함수는

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0$$

부록#4

- 자유도가 v인 카이제곱분포의 적률생성함수 증명 (2/4)

2. 적률생성함수의 정의로 적분 세우기

적률생성함수의 정의는

$$M_X(t) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{tX}}] = \int_0^\infty e^{tx} f_X(x)\, dx$$

밀도함수를 대입하면

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

e에 대한 지수를 정리하면

$$M_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\left(\frac{1}{2}-t\right)x}\, dx$$

여기서 적분이 수렴하기 위해서는 $\frac{1}{2} - t > 0$ 즉,

$$t < \frac{1}{2}$$

부록#4

- 자유도가 v인 카이제곱분포의 적률생성함수 증명 (3/4)

3. 감마적분 형태로 계산

감마함수의 성질은

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-bx}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{b^a} \qquad (a>0, b>0)$$

$a = \frac{v}{2}$, $b = \frac{1}{2} - t$이므로

$$\int_0^\infty x^{\frac{v}{2}-1}e^{-\left(\frac{1}{2}-t\right)x}\,dx = \frac{\Gamma(\frac{v}{2})}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{v}{2}}}$$

이를 대입하면

$$M_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{v}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{v}{2}}}$$

부록#4

- 자유도가 v인 카이제곱분포의 적률생성함수 증명 (4/4)

4. 정리

$$\frac{1}{2^{\frac{v}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-t\right)^{\frac{v}{2}}} = \left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}-t\right)}\right)^{\frac{v}{2}} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{v}{2}} = (1-2t)^{-\frac{v}{2}}$$

따라서,

$$M_X(t) = (1-2t)^{-\frac{v}{2}} \qquad (t < \frac{1}{2})$$

부록#5

- 그림 1, 2

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  np.random.seed(0)

4.  X = np.random.exponential(scale=2, size=10000)
5.  Y = np.log(X + 1e-6)

6.  fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,4))

7.  axes[0].hist(X, bins=50)
8.  axes[0].hist(X, bins=50, color="#E5B9B5")
9.  axes[0].set_title("Before: Right-Skewed X")
10. axes[0].set_xlabel("X")

11. axes[1].hist(Y, bins=50)
12. axes[1].hist(Y, bins=50, color="#E5B9B5")
13. axes[1].set_title("After: Y = log X")
14. axes[1].set_xlabel("Y")

15. plt.tight_layout()
16. plt.show()
```

부록#6

- 그림 3, 4

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  np.random.seed(0)

4.  X = np.random.normal(loc=50, scale=20, size=10000)
5.  Z = (X - np.mean(X)) / np.std(X)

6.  fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,4))

7.  axes[0].hist(X, bins=50)
8.  axes[0].hist(X, bins=50, color="#E5B9B5")
9.  axes[0].set_title("Before: Session Length X")
10. axes[0].set_xlabel("X")

11. axes[1].hist(Z, bins=50)
12. axes[1].hist(Z, bins=50, color="#E5B9B5")
13. axes[1].set_title("After: Z = (X - μ)/σ")
14. axes[1].set_xlabel("Z")

15. plt.tight_layout()
16. plt.show()
```

부록#7

- 그림 5, 6

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  np.random.seed(0)
4.  lam = 20
5.  X = np.random.poisson(lam=lam, size=10000)
6.  Z = (X - lam) / np.sqrt(lam)

7.  fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(12,4))

8.  axes[0].hist(X, bins=30, density=True,
    color="#E5B9B5", alpha=0.7)

9.  axes[0].set_title("Before: Poisson vs Normal
    Approx")
10. axes[0].set_xlabel("X")
11. axes[0].set_ylabel("Density")

12. axes[1].hist(Z, bins=40, density=True,
    color="#E5B9B5", alpha=0.7)

13. z_vals = np.linspace(-4,4,400)
14. std_normal_pdf = (1/np.sqrt(2*np.pi)) * np.exp(-
    z_vals**2/2)
```

```
15. axes[1].plot(z_vals, std_normal_pdf, color="black",
    linewidth=2)
16. axes[1].set_title("After: Standardized Z vs N(0,1)")
17. axes[1].set_xlabel("Z")

18. plt.tight_layout()
19. plt.show()
```

부록#8

- 그림 7

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  p = 3/4
4.  x = np.arange(1, 11)
5.  fx = p * (1 - p)**(x - 1)

6.  plt.stem(x, fx)
7.  plt.xlabel("x")
8.  plt.ylabel("P(X=x)")
9.  plt.title("PMF of X (Geometric Distribution)")
10. plt.show()
```

- 그림 8

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  p = 3/4
4.  x = np.arange(1, 11)
5.  y = x**2
6.  gy = p * (1 - p)**(x - 1)

7.  plt.stem(y, gy)
8.  plt.xlabel("y")
9.  plt.ylabel("P(Y=y)")
10. plt.title("PMF of Y = X^2")
11. plt.show()
```

부록#9

- 그림 9

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  def u(x):
4.      c = 0.18
5.      A = 0.42
6.      k = 0.62
7.      return c + A * np.exp(k * x)

8.  x = np.linspace(-0.7, 3.3, 900)
9.  y = u(x)
10. w_a = 1.55
11. w_b = 2.75
12. a = float(u(w_a))
13. b = float(u(w_b))

14. fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.0, 3.8))
15. ax.plot(x, y, color="black", lw=1.8)
16. ax.text(w_b + 0.15, b + 0.05, r"$y=u(x)$",
    fontsize=11)

17. ax.hlines([a, b], xmin=0, xmax=[w_a, w_b],
18.           colors="black", linestyles="dashed",
    lw=1.5)
19. ax.hlines([a, b], xmin=0, xmax=[w_a, w_b],
20.           colors="black", linestyles="dashed",
    lw=1.5)
```

```
21. ax.vlines([w_a, w_b], ymin=0, ymax=[a, b],
22.           colors="black", linestyles="dashed",
    lw=1.5)

23. ax.text(-0.2, a, "a", va="center")
24. ax.text(-0.2, b, "b", va="center")
25. ax.text(w_a, -0.2, "w(a)", ha="center")
26. ax.text(w_b, -0.2, "w(b)", ha="center")

19. ax.set_xticks([])
20. ax.set_yticks([])

21. ax.spines["right"].set_visible(False)
22. ax.spines["top"].set_visible(False)
23. ax.spines["left"].set_position(("data", 0))
24. ax.spines["bottom"].set_position(("data", 0))

25. ax.set_xlim(-0.9, 3.55)
26. ax.set_ylim(-0.45, b + 0.45)

27. ax.text(1.01, -0.02, "x", transform=ax.transAxes,
    ha="left", va="top")
28. ax.text(-0.02, 1.01, "y", transform=ax.transAxes,
    ha="right", va="bottom")

29. plt.tight_layout()
30. plt.show()
```

부록#10

- 그림 10

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  def u(x, A=4.2, k=0.75, c=0.12):
4.      return c + A * np.exp(-k * x)

5.  x0 = 0.25
6.  x_end = 5.0
7.  x = np.linspace(x0, x_end, 900)
8.  y = u(x)

9.  w_b_target = 0.75
10. w_a_target = 2.35
11. b = float(u(w_b_target))
12. a = float(u(w_a_target))

13. w_b = np.interp(b, y[::-1], x[::-1])
14. w_a = np.interp(a, y[::-1], x[::-1])

15. fig, ax = plt.subplots(figsize=(5.0, 3.8))

16. ax.plot(x, y, color="black", lw=1.8)
17. ax.text((w_b + w_a)/2 + 0.25, (a + b)/2 + 0.15,
    r"$y=u(x)$", fontsize=11)

18. ax.hlines([b, a], xmin=0, xmax=[w_b, w_a],
    colors="black", linestyles="dashed", lw=1.5)
19. ax.vlines([w_b, w_a], ymin=0, ymax=[b, a],
    colors="black", linestyles="dashed", lw=1.5)

20. ax.text(-0.2, b, "b", va="center")
21. ax.text(-0.2, a, "a", va="center")

22. ax.text(w_b, -0.2, "w(b)", ha="center")
23. ax.text(w_a, -0.2, "w(a)", ha="center")

24. ax.set_xticks([])
25. ax.set_yticks([])
26. ax.spines["right"].set_visible(False)
27. ax.spines["top"].set_visible(False)

28. ax.spines["left"].set_position(("data", 0))
29. ax.spines["bottom"].set_position(("data", 0))

30. ax.set_xlim(-0.45, x_end + 0.6)
31. ax.set_ylim(-0.28, y.max() + 0.25)

32. ax.text(1.01, 0, "x", transform=ax.transAxes,
    ha="left", va="top")
33. ax.text(0, 1.01, "y", transform=ax.transAxes,
    ha="right", va="bottom")

34. plt.tight_layout()
35. plt.show()
```

부록#11

- 그림 11 - A

```
1.  import matplotlib.pyplot as plt

2.  EDGE = "#C05046"
3.  FILL = "#E5B9B5"
4.  fig, ax = plt.subplots(figsize=(4, 4))
5.  x = [0, 1, 1, 0, 0]
6.  y = [0, 0, 1, 1, 0]
7.  ax.fill(x, y, color=FILL, edgecolor=EDGE, linewidth=2)
8.  ax.plot(x, y, color=EDGE, linewidth=2)
9.  ax.set_xlim(0, 1.08)
10. ax.set_ylim(0, 1.08)
11. ax.set_xticks([0, 1])
12. ax.set_yticks([0, 1])
13. ax.set_xlabel(r"$x_1$")
14. ax.set_ylabel(r"$x_2$", rotation=0, labelpad=10)
15. ax.text(-0.06, 0.5, r"$X_1 = 0$", rotation=90, va="center")
16. ax.text(0.5, -0.08, r"$X_2 = 0$", ha="center")
17. ax.text(0.5, 1.03, r"$X_2 = 1$", ha="center", va="bottom")
18. ax.text(1.03, 0.5, r"$X_1 = 1$", va="center")
19. ax.text(0.5, 0.5, "A", ha="center", va="center", fontsize=12)
20. ax.set_aspect("equal")
21. ax.spines["top"].set_visible(False)
22. ax.spines["right"].set_visible(False)

23. plt.tight_layout()
24. plt.show()
```

부록#11

- 그림 11 - B

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  EDGE = "#C05046"
4.  FILL = "#E5B9B5"
5.  fig, ax = plt.subplots(figsize=(4, 4))
6.  y1 = np.linspace(0, 1, 600)
7.  y2 = np.sqrt(y1)
8.  ax.fill_between(y1, 0, y2, color=FILL, edgecolor=EDGE, linewidth=2)
9.  ax.plot(y1, y2, color=EDGE, linewidth=2)
10. ax.plot([0, 1], [0, 0], color=EDGE, linewidth=2)   # y2=0
11. ax.plot([1, 1], [0, 1], color=EDGE, linewidth=2)   # y1=1
12. ax.set_xlim(0, 1.08)
13. ax.set_ylim(0, 1.08)
14. ax.set_xticks([0, 1])
15. ax.set_yticks([0, 1])
16. ax.set_xlabel(r"$y_1$")
17. ax.set_ylabel(r"$y_2$", rotation=0, labelpad=10)
18. ax.text(-0.06, 0.5, r"$y_1 = 0$", rotation=90, va="center")
19. ax.text(0.5, -0.08, r"$y_2 = 0$", ha="center")
20. ax.text(0.0, 1.03, r"$y_2 = 1$", ha="left", va="bottom")
21. ax.text(1.03, 0.5, r"$y_1 = 1$", va="center")
22. ax.text(0.33, 0.65, r"$y_2^2 = y_1$", rotation=35)
23. ax.text(0.62, 0.48, "B", fontsize=12)
```

```
24. ax.set_aspect("equal")
25. ax.spines["top"].set_visible(False)
26. ax.spines["right"].set_visible(False)

27. plt.tight_layout()
28. plt.show()
```

부록#12

- 그림 12

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  x1 = np.linspace(0, 1, 250)
4.  x2 = np.linspace(0, 1, 250)
5.  X1, X2 = np.meshgrid(x1, x2)

6.  F = 4 * X1 * X2

7.  cmap = "YlOrRd"
8.  vmin, vmax = 0, 4
9.  levels = np.linspace(vmin, vmax, 9)

10. fig = plt.figure(figsize=(12, 5))

11. ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection="3d")
12. surf = ax1.plot_surface(X1, X2, F, cmap=cmap,
13.                         vmin=vmin, vmax=vmax,
14.                         edgecolor="none")

15. ax1.set_title("Joint PDF (3D Surface)")
16. ax1.set_xlabel("x1")
17. ax1.set_ylabel("x2")
18. ax1.set_zlabel("f(x1,x2)")
19. ax1.set_zlim(vmin, vmax)
20. ax1.view_init(elev=25, azim=-60)
```

```
21. ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2)
22. cont = ax2.contour(X1, X2, F,
23.                    levels=levels,
24.                    cmap=cmap,
25.                    vmin=vmin, vmax=vmax)

26. ax2.set_title("Joint PDF (Contour)")
27. ax2.set_xlabel("x1")
28. ax2.set_ylabel("x2")
29. ax2.set_aspect("equal")

30. fig.subplots_adjust(wspace=0.3)

31. cbar_ax = fig.add_axes([0.48, 0.15, 0.02, 0.7])
32. fig.colorbar(surf, cax=cbar_ax, label="f(x1,x2)")

33. plt.show()
```

부록#13

- 그림 13

```
1.  import numpy as np
2.  import matplotlib.pyplot as plt

3.  y1 = np.linspace(1e-3, 1, 350)
4.  y2 = np.linspace(0, 1, 350)
5.  Y1, Y2 = np.meshgrid(y1, y2)

6.  mask = (Y2**2 < Y1)

7.  G = np.full_like(Y1, np.nan, dtype=float)
8.  G[mask] = 2 * Y2[mask] / Y1[mask]

9.  cmap = "YlOrRd"
10. vmin = 0.0
11. vmax = 8.0
12. levels = np.linspace(vmin, vmax, 9)

13. G_plot = np.clip(G, vmin, vmax)

14. fig = plt.figure(figsize=(12, 5))

15. ax1 = fig.add_subplot(1, 2, 1, projection="3d")
16. surf = ax1.plot_surface(Y1, Y2, G_plot, cmap=cmap,
17.                         vmin=vmin, vmax=vmax,
18.                         edgecolor="none")
19. ax1.set_title("Joint PDF g(y1,y2) (3D Surface)")
20. ax1.set_xlabel("y1")
21. ax1.set_ylabel("y2")
22. ax1.set_zlabel("g(y1,y2)")
23. ax1.set_zlim(vmin, vmax)
24. ax1.view_init(elev=25, azim=-60)

25. ax2 = fig.add_subplot(1, 2, 2)
26. cont = ax2.contour(Y1, Y2, G_plot, levels=levels,
    cmap=cmap, vmin=vmin, vmax=vmax)
27. ax2.set_title("Joint PDF g(y1,y2) (Contour)")
28. ax2.set_xlabel("y1")
29. ax2.set_ylabel("y2")
30. ax2.set_xlim(0, 1)
31. ax2.set_ylim(0, 1)
32. ax2.set_aspect("equal")

33. t = np.linspace(0, 1, 400)
34. ax2.plot(t, np.sqrt(t), color="black", linewidth=1)

35. fig.subplots_adjust(wspace=0.3)
36. cbar_ax = fig.add_axes([0.48, 0.15, 0.02, 0.7])
37. fig.colorbar(surf, cax=cbar_ax, label="g(y1,y2)")

38. plt.show()
```

부록#14

- 적률의 종류 (1/2)
  - 위치적률
    - 원점에 대해 계산
    - 1차 원점적률은 평균(위치) 표현
      - $\mu_1' = \mu = E(X)$
  - 중심적률
    - 평균을 기준으로 계산
    - 2차 중심적률은 데이터의 퍼짐 정도 표현
      - $\mu' = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$

부록#14

- 적률의 종류 (2/2)
  - 표준화적률
    - 중심적률을 표준편차의 해당 차수로 나누어 계산
    - 3차 표준화적률은 왜도(비대칭) 표현
      - $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$
    - 4차 표준화적률은 첨도(뾰족함) 표현
      - $\mathrm{Kurt}(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E\left[(X-\mu)^4\right]}{\sigma^4}$